HAIDIAN JINGDIANTI YOUHUAJIETI

海淀高考升学率为95%

其中最重要的原因是做题，做题，再做题……

海淀精典题

优化解题

高中几何

海淀区特高级教师编写组

人民中国出版社
中国少年儿童出版社

JINGDIANTI&YOUHUAJIE.T

海淀精典题
优化解题

高中几何

海淀区特高级老师编写组编

人民中国出版社　中国少年儿童出版社

图书在版编目(CIP)数据

海淀精典题优化解题.高中几何/阚秀敏,李丽英主编;卫广红,李宏新编著.—北京:人民中国出版社,2001.5

ISBN 7-80065-707-8

Ⅰ.海…　Ⅱ.①阚…②李…③卫…④李…　Ⅲ.几何课-高中-解题　Ⅳ.G632.479

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2001)第 025665 号

海淀精典题优化解题　高中几何

本书主编:卫广红　李宏新　孙艳华
张嘉宾　肖　洁

出　　版:人民中国出版社　中国少年儿童出版社
电　　话:(010) 84551016　64649206
经　　销:新华书店
印　　刷:北京忠信诚印刷厂
开　　本:850×1168 毫米　1/32
字　　数:670 千字
印　　张:18.875 印张
版　　次:2001 年 7 月第一版 2001 年 7 月第二次印刷
书　　号:ISBN 7—80065—707—8/G·313
定　　价:19.80 元/册　140.40 元/套

目录

立体几何

解析几何

第三章 参数方程、极坐标

立体几何

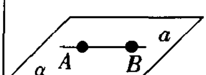
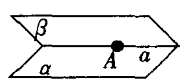
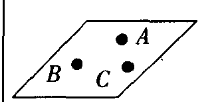
第一章　直线和平面

一　平面

知识要点

1. 平面在立体几何中是只作描述而不加定义的原始概念．对于平面概念的理解，主要抓住平面的两个基本特征，一是“平”、二是无边界，可以无限延伸”．

2. 平面的基本性质及作用．

基本性质	作　　用	图　　形	数学符号
公理 1：如果一条直线上的两点在一个平面内，那么这条直线上所有点都在这个平面内	判定直线是否在平面内的依据		$A\in a$，$B\in a$，$A\in\alpha$，$B\in\alpha\Rightarrow a\subset\alpha$
公理 2：如果两个平面有一个公共点，那么它们有且只有一条通过这个点的公共直线	判定两个平面相交于一条直线及确定交线位置的依据		$A\in\alpha$，$A\in\beta$，$\Rightarrow\alpha\cap\beta=a$ $A\in a$
公理 3：经过不在同一条直线上的三点，有且只有一个平面。推论 1，2，3	确定平面的位置以及判定两个平面重合的依据		

附：推论 1：经过一条直线和这条直线外的一点，有且只有一个平面．

推论 2：经过两条相交直线，有且只有一个平面．

推论 3：经过两条平行直线，有且只有一个平面．

关于公理的含义　公理是通过人们千万次的观察和实践总结出来的，是被人们公认的正确结论，而不是通过推理论证得到的．

关于“有且只有一个”的含义，“有”是说明存在的，“只有一个”是说明

唯一的，所以“有且只有一个”也可以说成“存在并且唯一”. 在有的书中所说的“确定一个”和“有且只有一个”也是具有相同的含义.

3. 证明若干条直线共面时，通常的方法是选择适当的二直线作一平面，再证其余直线都在平面内. 有时也采用重合法，即过这些直线作几个平面，然后证这几个平面重合.

证明直线在平面内，常采用同一法.

证明唯一性结论或证明否定性结论时，常常使用反证法.

一、选择题

1. 若点 M 在直线 b 上，b 在平面内 β 内，则 M、b、β 之间的关系可记作 ( )

A. $M \in b \in \beta$ B. $M \subset b \subset \beta$ C. $M \in b \subset \beta$ D. $M \subset b \in \beta$

答案与题解 C。点 M 与直线 b 的关系是元素与集合的关系，只能用 $\in$ 或 $\notin$ 来表示，显然 B、D 排除.

直线 b 与平面 β 的关系是集合与集合的关系，只能用 $\subset$ 或 $\not\subset$ 表示，而不能用 $\in$，因此 A 被排除.

小结：在集合论意义下，只把点作为空间图形的基本元素，把直线、平面等都看做是“点的集合”，因此直线、平面与点之间的关系是集合与其元素之间的关系；直线和平面之间的关系是集合与集合之间的关系.

2. 一条直线和直线外两点可确定平面的个数是 ( )

A. 1 个 B. 2 个 C. 3 个 D. 1 个或 2 个

答案与题解 D。第一类，当两点确定的直线与已知直线相交或平行时，则确定一个平面；第二类，当两点确定的直线与已知直线，既不相交也不平行，则已知直线与每一个已知点可确定两个平面.

说明：求类似确定平面的个数，交点的个数，交线的条数问题，都应对相应的点，线、面位置关系进行分类讨论，分类讨论是中学数学中常用的重要的数学思想和方法.

3. 一条直线 l 及 l 外的不在同一直线上的三点，所确定的平面个数为 ( )

A. 1 个 B. 3 个

C. 4 个 D. 以上答案都有可能

答案与题解 D。设有一直线 l 及 l 外的不在同一直线上的三点 A、B、C. 过 l 和点 A 确定一个平面 M. 若点 B 和 C 都在平面 M，则过这一线三点共有一个平面. 若点 B 在平面 M 内，C 不在 M 内，则过 l 和点 C 确定一个平面 N，过不共线三点 A. B、C 确定一个平面 P，共确定 3 个平面. 若点 C 不在平面 M 内，点 B 既不在 M 内，也不

在 l 和 C 所确定的平面 N 内，则过 l 和 B 确定一个平面 Q，它与平面 M、N、P 都不同，共确定 4 个平面.

综上，可知确定平面个数 1 个，3 个，4 个都有可能.

4. 已知四条不相同的直线，过其中每两条作平面，至少和至多确定平面 （　　）

A. 0 个和 1 个　　B. 1 个和 4 个

C. 0 个和 6 个　　D. 不同于 A、B、C 的答案

答案与题解　C。至多、至少问题一定产生在最特殊的几何位置. 当四条直线中任何两条直线既不相交，也不平行时，任何两条直线也不能确定平面.

当四条直线中任何两条都能确定一个平面（即过同一点而又任何三条不共面）时，个数等同于给四条直线标上 1、2、3、4 号，集合 {1, 2, 3, 4} 有多少个两个元素的子集，有{1,2}, {1,3}, {1,4}, {2,3}, {2,4}, {3,4}

5. 两个平面重合的条件是它们的公共部分有 （　　）

A. 两个公共点　　B. 三个公共点

C. 四个公共点　　D. 两条平行直线

答案与题解　D。两个、三个、四个公共点都可能在一个直线上，两个平面的公共部分是一条直线，只能说明两平面相交，而两条平行线确定一个平面.

6. 空间有四个点，如果其中任意三个点都不在同一条直线上，那么经过其中三个点的平面 （　　）

A. 可能有 3 个，也可能有 2 个　B. 可能有 4 个，也可能有 3 个

C. 可能有 3 个，也可能有 1 个　D. 可能有 4 个，也可能有 1 个

答案与题解　D。分类，第一类，四点共面，则有一个平面，第二类，四点不共面，因为没有任何三点共线，则任何三点都确定一个平面，共有 4 个.

7. 直线 $l_1 \cap l_2 = M$，l_1 上取异于 M 点 4 个点，l_2 上取异于 M 点的 5 个点，由这 9 个点能确定平面 （　　）

A. 1 个　　B. 3 个　　C. 6 个　　D. 9 个

答案与题解　A。这九个点中每三个点确定的平面都是 l_1 与 l_2 所确定的平面，主要原因是 l_1 与 l_2 相交，若改为 $l_1 /\!/ l_2$ 也如此.

8. 与不共线的三点距离都相等的点的个数是 （　　）

A. 一个　　B. 二个　　C. 三个　　D. 无数个

答案与题解　D。过这三点为顶点的三角形的外心与此三角形所在平面垂直的直线上所有点都满足条件.

9. 四条线段顺次首尾相接，可确定平面的个数是 （　　）

A. 1 个　　B. 3 个　　C. 4 个　　D. 1 个或 4 个

答案与题解 D。四条线段顺次首尾相接时，（如线段 AB、BC、CA、DA）当 A、B、C、D 四点共面时，此时可确定一个平面，当 A、B、C、D 不共面时，可确定 ABC、ABD、ACD、BCD 四个平面，故选 D.

10. 下面说法正确的是 （　　）

A. 平行四边形是一个平面

B. 直线 AB 不能全在平面内

C. 平面 α 和平面 β 只有一个公共点

D. 圆可以确定一个平面

答案与题解 D。注意平面是无限延展的和确定平面的条件.

11. 空间四点 A、B、C、D 共面但不共线，那和这四点中 （　　）

A. 必有三点共线　　B. 必有三点不共线

C. 至少有三点共线　　D. 不可能有三点共线

答案与题解 B。空间四点 A、B、C、D 四点共面不共线可分为两类：第一类，其中有三点共线，设 A、B、C 共线，则 D 在直线外，显然有 B、C、D 三点不共线，即符合 B 项；

第二类，其中只有两点共线，显然符合 B 项.

12. 空间有六个点，其中有四个点在同一平面内，由这些点最多能确定平面个数是 （　　）

A. 12　　B. 13　　C. 16　　D. 17

答案与题解 D。此题求产生最多平面情况，则一定产生在特殊位置，即除共面的四点中任何三点确定平面重合外，再其它任何三点确定平面不重合.

第一类：平面外一点与平面内的任两点，即 $2\times6=12$ 个

第二类：平面外两点与平面内的任一点，即 $1\times4=4$ 个

第三类：平面外无点而只有平面内的点，显然任何三点确定平面都重合，所以只有 1 个，共计 $12+4+1=17$ 个.

二、填空题

13. P 为 $\triangle ABC$ 所在平面外一点，连 PA、PB、PC，点 D、E、F 分别在 PC、AC、BC 上，点 G 在平面 ABP 内，画出线段 CG 与平面 DEF 的交点 H，具体画法是________.

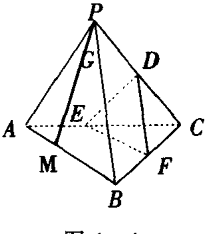


图 1—1

答案与题解 如图，可根据公理 1、公理 2、公理 3 作出.

连 PG 延长交 AB 于 M，再连 MC 交 EF 于 N，再连 ND，

最后连 CG 交 ND 于 H，H 点即为所画之点（如图 1—1）.

14. 空间有五个点，若五点共线，可确定________个平面；若其中四点共线，可确定________个平面；若其中有三点共线其它任何三点不共线，可确定________个平面；若任何三点不共线；可确定________个平面.

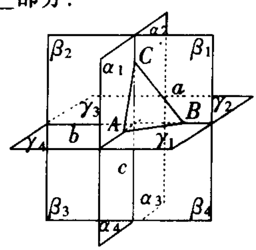
答案与题解 0；1；1 或 5；1 或 7 或 10。五点共线时，经过五个点的平面有无数个，但不能"确定"；四点共线时，符合推论 1，直线和直线外一点确定一个平面；三点共线，而其它任何三点不共线分两类，一类是直线外两点确定的直线与已知直线平行或相交，则确定一个平面，另一类此两点确定直线与已知直线既不相交也不平行，即不共面时，已知直线与直线外每一点都确定一个平面，共有三个，此类共计五个；任何三点都不共线分五点共面、四点共面、三点共面，四点共面即在三点共面中去掉四点共面中任三点共面重合多的部分，可产生 1 个或 7 个或 10 个.

15. 三条平行直线可以确定平面________.

答案与题解 1 个或 3 个。分类、一类三线共面，即确定一个平面，另一类三线不共面，每两条确定一个，可确定 3 个.

16. 空间中有四个平面，它们最多可将空间分成________部分.

答案与题解 15。如（答）图 1—2，容易知道，三个平面最多可将空间分成 8 部分，即当这三个平面共点时，可将空间分成 8 部分. 如图 1—2，设平面 α、β、γ 共点 O，它们两两相交于过 O 点的三条直线 a、b、c，并分别将 α、β、γ 均分成四个部分，记这些部分分别为 α_i、β_i、γ_i（$i=1, 2, 3, 4$），为使四个平面将空间分成的部分为最多，必需使第四个平面尽可能多地通过前三个平面所分空间区域. 为此，在 a、b、c 上分别取点 A、B、C，可以看出，由 A、B、C 所确定的平面仅不通过由 α_3、β_3、γ_3 所切割下的那部分空间，即平面 ABC 将其余七部分中的每个部分均分成两部分，故四个平面最多将空间分成 15 部分.



（答）图 1—2

17. 平面 α、β 相交，α、β 内各取两点，这四点都不在交线上，这四点能确定平面________个.

答案与题解 一个或四个。分类，如果这四点在同一平面内，那么确定一个平面；如果这四点不共面，则任意三点可确定一个平面，可确定四个.

18. 已知空间四边形的对角线相等，顺次连接它的各边中点所成的四边形是________.

答案与题解 菱形。根据三角形中位线定理：连结各边中点的四边形的边分别等于对角线的一半；且对边分别平行，则构成平面图形，并且是平行四边形，再由四条相

等，即可判断为菱形.

19. 空间一个平面把空间分成________部分；两个平面将空间分成________部分；三个平面将空间分成________个部分.

答案与题解 2个；3个或4个；4个或6个或7个或8个.
一个平面显然；两个平面分两类，一类是两面平行，分得三个部分，另一类是两平面相交分得四个部分.

20. 两两相交的三条直线，仅当交点个数等于________时这三条直线才可能不共面.

答案与题解 1。有三个公共点时，由公理三及公理1可知三条直线共面.

21. 空间四边形的两条对角线________一个平面内.

答案与题解 不在。假设两条对角线在一个平面内，那么四边形就是平面四边形与已知矛盾.

22. 已知直线 a、b 和平面 α，若 $a // b$，$a \cap \alpha = A$，$b \cap \alpha = B$，则线段 AB 与平面 α 的关系是________.

答案与题解 $AB \subset \alpha$。$\because$ $a // b$，$\therefore$ a，b 无公共点，又$\because$ $a \cap \alpha = A$，$\therefore$ $A \in \alpha$，$b \cap \alpha = B$，$\therefore$ $B \in \alpha$，$\therefore$ $AB \subset \alpha$.

23. 交于一点的五条直线最多可以确定________个平面.

答案与题解 10个。每两条都能确定一个，最多为10个

24. 已知：E、F、G、H 分别为空间四边形 $ABCD$ 四条边 AB、BC、CD、DA 的中点，若 $BD = 2$，$AC = 6$，那么 $EG^2 + HF^2 =$ ________.

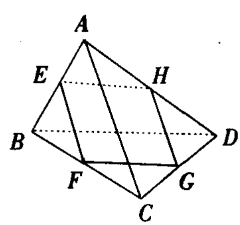


图 1—3

答案与题解 20。易知 $EFGH$ 为平行四边形，如图 1—3，$EF = 3$，$FG = 1$，$\therefore$ $EG^2 + HF^2 = 2(EF^2 + FG^2) = 20$

25. 空间四个平面两两相交，以其交线的个数为元素构成的集合是________.

答案与题解 $\{1, 4, 6\}$。情况1：四个平面两两相交于同一条直线，此时交线为1条
情况2：三个平面两两交于同一条直线，然后再分别和第四个平面相交，此时共有交线为1条+3条=4条
情况3：四面体可知有6条.

26. 三角形、四边形、正六边形、圆，其中一定是平面图形的有________个.

答案与题解 三个。三角形的三个顶点不在一条直线上，故可确定一个平面，三角形在这个平面内；圆上任取三点一定不在一条直线上，这三点即确定一个平面，也确定了这个圆所在的平面，所以圆是平面图形；而正六边形内接于圆，故正六边形也

是平面图形；而四边形就不一定是平面图形，它的四个顶点可以不在同一平面内.

27. 四边形 $ABCD$ 中，$AB=BC=CD=DA=BD=1$，则成为空间四面体时，AC 的取值范围是________.

答案与题解 $(0,\sqrt{3})$。若想成为空间四面体，则必须排除 $ABCD$ 为平面图形，而 $AC>0$ 是显然的，当 $ABCD$ 为平面图形时，构成时，菱形 $AC=\sqrt{3}$，所以 $0<AC<\sqrt{3}$.

说明：无论什么事物的运动都采取两种状态，相对地静止和显著地变动的状态，立体几何知识也如此．有些知识若静止地孤立地去看，似乎它们都是矛盾，然而运用辩证唯物主义的观点，从运动变化的角度去看，则它们之间就有着密切的联系．如上述的空间图形与平面图形就有着内在的联系.

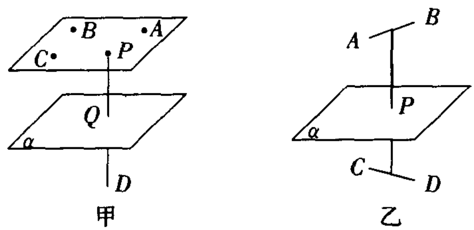


图 1—4

28. 与空间不共面四点距离相等的平面数为________个.

答案与题解 7 个。要使各点到该平面的距离相等，又此四个点不共面，显然此四点不能在所求平面的同侧，因此只能有下面两类情况：

(1) 三个点在所求平面的一侧，第四个点在另一侧，设 A、B、C 三点在一侧，D 点在另一侧，作 DP 垂直于平面 ABC，P 为垂足，再过 DP 的中点作平面 α 平行于平面 ABC，则平面 α 即为所求如图 1—4—甲.

同理可知，在这类情况下，这样的平面还有三个，共计四个.

(2) 两点在所求平面一侧，而其余两点在另一侧，如图 1—4—乙

因 A、B、C、D 不共面，故线段 AB 和 CD 是异面直线过 AB 和 CD 的公垂线中点，作与公共垂线垂直的平面 α，则此平面 α 即为所求的平面.（想象有即可）

同理可知，这样的平面还有两个，共计三个.

综上所述，所求平面共有 7 个.

三、解答题

关于证点、线共面问题.

29. 如图 1—5，已知 $l_1 /\!/ l_2 /\!/ l_3$，$l\cap l_1=A$，$l\cap l_2=B$，$l\cap l_3=C$

求证：L_1，l_2，l_3，l 共面.

证明：（重合法）$l_1 /\!/ l_2$，l_1，l_2 确定一个平面 α，同理 l_2，l_3 确定一个平面 β

由 $A\in l_1$，$l_1\subset\alpha$，知 $A\in\alpha$，同理 $B\in\alpha$，又 A、$B\in l$，故 $l\subset\alpha$，同理 $l\subset\beta$（确定两平面 α、β 且四线分别在 α 或 β 内）

由上知 $l\cap l_2=B$，且 l，$l_2\subset\alpha$，l，$l_2\subset\beta$，因两相交直线 l，l_2 确定一个平面，故 α 与 β 重合，所以 l_1，l_2，l_3，l 共面.

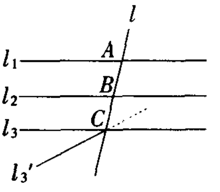


图 1—5

证法 2：（归一法）由 $l_1 /\!/ l_2$，知 l_1，l_2 确定一个平面 α，再证 l_3，l 在 α 内.

由 $A\in l_1$，$l_1\subset\alpha$，知 $A\in\alpha$，同理 $B\in\alpha$，又 A、$B\in l$，

故 $l\subset\alpha$.

由 $C\in l$，$l\subset\alpha$，知 $C\in\alpha$，过 C 在 α 内作 $l_3' /\!/ l_2$，又 l_3 过 C 也平行 l_2，因为过直线外一点只能有一条直线与此直线平行，所以 l_3 与 l_3' 重合，由 $l_3'\subset\alpha$，知 $l_3\subset\alpha$，即 l_1，l_2，l_3，l 共面.

说明：归一法：(1) 先根据题设确定一个平面；(2) 再证其余的点、线在这个平面内（证点在平面内，常转证这个点所在直线在这个平面内，而证直线在平面内，又往往证这条直线上有两点在这个平面内，即转化的思想方法）

重合法：(1) 先根据题设条件确定两个或两个以上的平面（这些平面必须包括要证共面的所有点线）；(2) 再证以上平面重合.

30. **已知：a、b、c、d 是两两相交而不共点的四条直线，求证：a、b、c、d 在同一平面内.**

分析：证图形共面的一般步骤是：先用其中的部分图形确定一个平面，然后证明图形中的其余元素都在这个平面内. 此题 a、b、c、d 有两种不同的位置关系，因此要分两种不同的情况加以证明.

证明：分两种情况.

(1) 四条直线中，设有三条直线过同一点，这时它们共有六个交点 A、B、C、D、E、F，并且各不相同. 如图 1—6

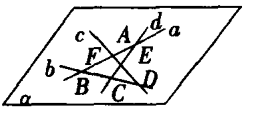


图 1—6

$\because$ a、b 是相交直线，

$\therefore$ a、b 确定一个平面 α

$\because$ $F\in a$，$a\subset\alpha$

$\therefore$ $F\in\alpha$，同理 $D\in\alpha$

$\therefore$ $C\subset\alpha$，同理 $d\subset\alpha$

$\therefore$ a，b，c，d 在同一平面内.

(2) 四条直线中有三条，例如 a，b，c 过同一点 A，而直线 d 不过点 A.

$\because$ $A \notin d$

$\therefore$ A、d 确定一个平面 α

$\because$ $B \in d$，$d \subset \alpha$，

$\therefore$ $B \in \alpha$，又 $A \in \alpha$，

$\therefore$ $a \subset \alpha$，同理 $b \subset \alpha$，$c \subset \alpha$

$\therefore$ a、b、c、d 在同一平面内

综合（1），（2）证得 a、b、c、d 在同一平面内

小结：证明点、线共面的问题，一般有两种方法.

①先由一些点线确定一个平面，然后证其它的点、线也在该平面内.

②先由一些点线确定多个平面，然后证这些平面重合.

关于证点共线问题

31. 若直线 a 与平面 α 无公共点，在空间取点 A，使 $A \notin a$，且 $A \notin \alpha$，在直线 a 上取三点 B、C、D，直线 AB、AC、AD 与平面 α 相交于 E、F、G.（如图 1—7）求证：E、F、G 三点共线.

证明： $\because$ $A \notin a$，$\therefore$ 经过 A，a 确定一个平面 β，

$\because$ B、C、$D \in a$，$\therefore$ B、C、$D \in \beta$

$\therefore$ 直线 AB、AC、AD 都在平面 β 内，

$\therefore$ $E \in$ 直线 AB，$\therefore$ $E \in \beta$，而 $E \in \alpha$，

$\therefore$ α，β 相交，设 $\alpha \cap \beta = l$，

$\therefore$ E 为 α，β 的公共点，

$\therefore$ $E \in l$，同理 F、$G \in l$，

$\therefore$ E、F、G 三点共线

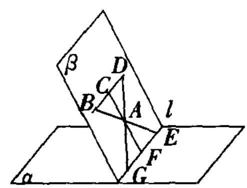


图 1—7

小结：证若干个点共线，基本思路是说明这些点是某两个平面的公共点，因而它们都在这两个平面的交线上，从而共线. 证明这类问题的主要根据是两个平面相交交线的性质.

①交线上的点是两个平面的公共点

②二个平面的公共点都在交线上

32. 正方体 $ABCD—A_1B_1C_1D_1$ 中的棱 AB、BC、CC_1、C_1D_1、D_1A_1、A_1A 的中点 E、F、G、H、P、Q 在同一平面内.

证法 1：如图 1—8，$\because$ Q、G 是棱的中点，

$\therefore$ $AQ \underline{\parallel} CG$，$\therefore$ $ACGQ$ 是矩形

$\therefore$ $QG \parallel AC$，

又 $\because$ E、F 是棱的中点，$\therefore$ $EF \parallel AC$

$\therefore$ $EF \parallel QC$，

$\because$ E、F、G、Q 四点共面 α，

$\because$　H、G 是棱的中点，$\therefore$　$HG /\!/ D_1C$，

$\because$　Q、E 是棱的中点，$\therefore$　$QE /\!/ A_1B$

$\because$　A_1D_1CB 是矩形，$\therefore$　$D_1C /\!/ A_1B$

$\therefore$　$HG /\!/ QE$，而 $QE \subset \alpha$；$G \in \alpha$，

$\therefore$　$HG \subset \alpha$，$\therefore$　$H \in \alpha$.

同理，$PQ /\!/ FG$，$FG \subset \alpha$，$Q \in \alpha$，

$\therefore$　$PQ \subset \alpha$，$\therefore$　$P \in \alpha$，

$\therefore$　E、F、G、H、P、Q 六点共面.

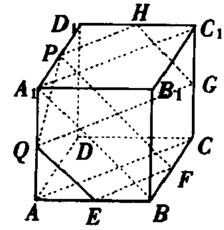


图 1—8

证法 2：由正方体的对称性，设 O 是对称中心，

$\because$　H、E 关于 O 点对称，P、F 关于 O 点对称，

$\therefore$　$HE \cap PF = 0$　$\therefore$　E、F、H、P 四点共面 α.

$\because$　Q、G 关于 O 点对称，$O \in \alpha$，

$\therefore$　QG 与 α 有公共点 O，

$\because$　$QC /\!/ AC$，$EF /\!/ AC$，

$\therefore$　$GO /\!/ EF$，

又 $\because$　$EF \subset \alpha$，$\therefore$　$QG /\!/ \alpha$，

$\because$　$O \in \alpha$，$O \in QG$，

$\therefore$　$QG \subset \alpha$，$G \in \alpha$，

$\therefore$　E、F、G、H、P、Q 六点共面.

33. 若平面 α 不通过$\triangle ABC$ 的任一顶点与 AB 边相交，则平面 α 与边 AC 或 BC 边相交.

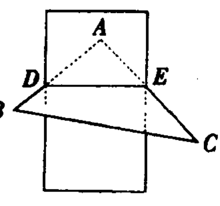


图 1—9

证明：如图 1—9 设平面 α 交 AB 于 D，由平面公理三，则平面 α 与平面 ABC 必有过 D 的直线 a，$\because$　直线 a 在$\triangle ABC$ 所在面内，故若 $a /\!/ BC$，由平行截割定理，则 a 必与 AC 相交于某点，设为 E，同理 $a /\!/ AC$，则 a 必与 BC 相交.

34. 设由一点 A 为端点的若干条直线，过其中任意两条直线作一平面，试证：所作诸平面中，任两个平面的交线必过点 A.

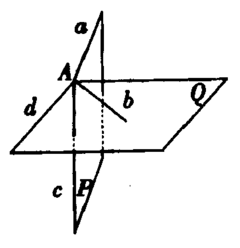


图 1—10

证明：设过 A 的若干条射线为 a、b、c、d……设 a、c 确定平面为 P，c、d 确定平面为 Q，$\because$　点 A 在直线 a 上，又在直线 b 上，$\therefore$　点 A 在平面 P 和平面 Q 内，故点 A 在两平面 P 和 Q 的交线 AB 上，同理，其他任意两直线确定的平面和平面 P 的交线都过 A 点. 如图 1—10.

35. 空间六个点，其中任何三点都不共线，任何四点都不共面，在每两点间连起直线段后，将每一条这样的线段涂上红色或蓝色

中的任一种，试证：不论如何涂色，一定有一个三角形它的三条边有相同的颜色．

证明：从任一点出发到其余五个点，共有五条直线，分别涂红蓝两种颜色，根据抽屉原理，其中至少有三条线段染有相同的颜色，例如是红色，把这三条由一点出发具有相同颜色的线段的另外三个端点两两连结起来，就组成一个三角形，如图 1—11 中虚线所示，如果这虚线三角形的三条边是由两种颜色组成，其中至少有一条红边与两条实线组成一个红边三角形；如果这三条虚线中一条红边也没有，那么三条虚线本身就组成一个蓝边三角形，因此，无论如何涂色，一定存在一个三角形，它的三条边有相同的颜色．

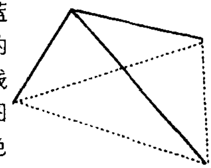


图 1—11

说明：此类问题的研究必须以一个顶点为基准去进行研究，使问题的研究有一定的程序性．

36．四边形 $ABCD$ 为空间四边形，E、H 分别是 AB、AD 的中点．F、G 分别是 CB、CD 上的点，且 $\frac{CF}{CB}=\frac{CG}{CD}=\frac{2}{3}$，

（1）求证：四边形 $EFGH$ 是梯形；

（2）延长 FE、GH 交于点 P，证明 P、A、C 三点共线．

证明：(1) $\because$ EH 是$\triangle ABD$ 的中位线，

$\therefore$ $EH /\!/ FG$

又 $\frac{CF}{CB}=\frac{CG}{CD}=\frac{2}{3}$

$\therefore$ $FG /\!/ BD$，故 $EH /\!/ FG$

又 $EH=\frac{1}{2}BD$，$FG=\frac{2}{3}BD$

$\therefore$ $EH\neq FG$，故 $EHFG$ 是梯形．

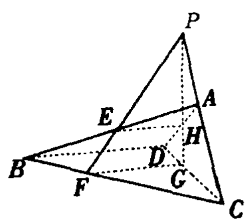


图 1—12

(2) 如图 1—12 所示．平面 ABC 与平面 ADC 交于直线 AC，P 为直线 EF 与直线 GH 的交点．

$\because$ $P\in EF$，$EF\in$ 平面 ABC，故 $P\in$ 平面 ABC

又 $\because$ $P\in GH$，$GH\subset$ 平面 ACD，故 $P\in$ 平面 ACD．

$\therefore$ P 必在二面的交线 AC 上，即 P、A、C 三点共线．

说明：在空间中，证明点共线的问题，常转化为证明点在直线上，而证明点在直线上，可设法找到两个平面，使该直线是这两个平面的交线，再证明该点是这两个平面的公共点，由公理 2 知，两个平面的公共点必在这两个平面的公共直线上，“转化”的思想方法在中学数学中是十分重要的．

37．如图 1—13，在四面体 $ABCD$ 中，E、F 分别是 AB 和 BC 的中点，G、H 分

别在 CD 和 AD 上，且 $DG:DC=DH:DA=1:m$（$m>2$）

求证：直线 FH、FG、BD 相交于一点.

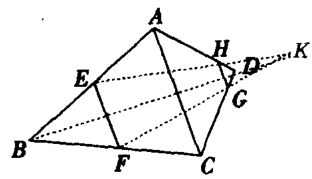


图 1—13

证明：连 EF 和 GH，因为 E、F 分别是 AB 和 BC 中点，所以 $EF/\!/AC$；又 $DG:DC=DH:DA=1:m$（$m>2$）

所以 $HG/\!/AC$，又 $EF/\!/AC$，故 $EF/\!/HG$

又 $EF\neq HG$，则 $EFGH$ 是梯形.

设二腰 EH 与 FG 所在直线相交于 K.

$EH\subset$平面 ABD，又 $FG\subset$平面 BCD，

所以 $K\in$平面 $ABD\cap$平面 $BCD=BD$.

所以，直线 EH、FG、BD 相交于一点.

38. 已知如图 1—14，$\alpha\cap\beta=VA$，$\beta\cap\gamma=VC$，$\gamma\cap\alpha=VB$，$\angle AVB$，$\angle BVC$，$\angle CVA$ 的平分线分别为 VD、VE、VF.

求证：平面 VDC、平面 EVA，平面 EVB 交于同一条直线.

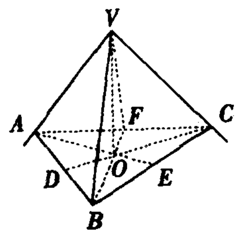


图 1—14

证法（1）归一法：

不失一般性，取 $VA=VB=VC$，易知 D、E 是 AB、BC 的中点，连结 AE、CD，设 $AE\cap CD=O$，故 O 为$\triangle ABC$ 的重心，虽然平面 $VDC\cap$平面 $EVA=VO$.

连结 BO 延长交 AC，易知 BO 延长线与 AC 的交点必为 AC 中点，即为 F 点.

显然 V、B、F，共面，即平面 VBF 过 VO

故平面 VDC，平面 EVA，平面 FVB 交于同一直线 VO

（2）重合法

同上设平面 $VDC\cap$平面 $VEA=VO$

设平面 $VEA\cap$平面 $VFB=VO'$

则不难得出，O、O'都为$\triangle ABC$ 的重心，

而$\triangle ABC$ 的重心唯一，故 O 与 O'重合.

故平面 VDC，平面 VEA，平面 FVB 交于同一直线.

说明：证明三面共线问题，可采用归一法或重合法，先求得两个平面的交线，再证明此交线在第三个平面内或第三个平面过此交线；或根据条件求得每两个平面的交线，再证明这些交线重合.

39. 已知：如图 1—15，E、F、G、H 分别为空间四边形 $ABCD$ 四边上的点，$AE/EB=AH/HD=m$，$CF/FB=CG/GD=n$，