

GAODENG
SHUXUE
XITIJI

高等数学习题集

大连理工大学出版社

高等数学习题集

曹绳武 王振中 编
于远许 张凤香

大连理工大学出版社

403599

高等数学习题集

Gaodeng Shuxue Xitiji

曹绳武 王振中 于远许 张凤香 编

大连理工大学出版社出版发行 辽宁省新华书店经销
(大连市甘井子区凌水) 沈阳新华印刷厂印刷

开本: $850 \times 1168 \frac{1}{32}$ 印张: 14 字数: 350千字

1987年第1版第1次印刷 1990年2月第2次印刷

印数15001—27000册

责任编辑: 张亚军 高晓凌

封面设计: 羊 戈 责任校对: 李 鸽 钱京姬

ISBN 7-5611-0201-1/O·34 定价: 4.50元

前 言

这本《高等数学学习题集》是为工科院校的大学生编写的。他们在学习高等数学时，除了要做一定量的基本习题外，还需要做一些有适当难度的综合性习题，以便加深对所学课程内容的理解、灵活地掌握运算方法和提高自己的解题技巧，培养解题、解决问题的能力。本习题集就是为适应这种要求而编写的。对于在校的或社会上的准备报考工科研究生的读者，本书也可供他们在应试之前复习高等数学时参考之用。

本习题集是根据高等学校工科数学课程教学指导委员会制订的《高等数学教学基本要求》，按照高等数学通用教材的章节顺序编写的，因此它可以与通用教材配合使用。习题集各章均由例题、基本题和杂题三部分组成（例题约100个，基本题约1430个，杂题约900个），例题是为了配合杂题选解的，计算题都附有答案，为了启发思考、提供解题方法大部分杂题给出了提示，书末附录备有常见公式以便查找。准备报考研究生的读者，可以阅读完例题之后，越过基本题而进入杂题，对于在校的大学生可以演算基本题后，再阅读例题并选作一部分杂题，对高等数学要求较低的某些专业的学生，做基本题后再选做少量杂题就够了。

本书大部分习题是应用数学系许多老师在教学过程中积累起来的，我们在编选时，参考了有关资料，并吸收了我院及一些兄弟院校近年来研究生的试题，为此谨向有关的同志致谢。

参加本书编写的人员有：曹绳武、王振中、于远许和张凤香四人。

应用数学系领导为我们提供完成编写工作的条件；我们的

工作还得到了许多老师的关心、支持和帮助；在此，我们表示衷心的感谢。

由于编者水平有限，加之时间仓促，本习题集一定还有许多缺点和错误，恳请多加批评、指正。

编者

1987年3月

目 录

第一章 函数与极限.....	(1)
一、例题.....	(1)
二、基本题.....	(6)
1. 函数(6) 2. 极限(13) 3. 连续(18)	
三、杂题.....	(21)
第二章 导数与微分.....	(30)
一、例题.....	(30)
二、基本题.....	(35)
1. 导数(35) 2. 微分(48)	
三、杂题.....	(51)
第三章 中值定理与导数的应用.....	(59)
一、例题.....	(59)
二、基本题.....	(68)
1. 中值定理(66) 2. 导数的应用(69)	
三、杂题.....	(73)
第四章 不定积分.....	(86)
一、例题.....	(86)
二、基本题.....	(90)
三、杂题.....	(97)
第五章 定积分.....	(102)
一、例题.....	(102)
二、基本题.....	(108)
三、杂题.....	(113)
第六章 定积分的应用.....	(127)
一、例题.....	(127)

二、基本题	(132)
1. 定积分在几何上的应用(132)	2. 定积分在物理学及力学上的应用(136)
三、杂题	(139)
第七章 向量代数与空间解析几何	(148)
一、例题	(148)
二、基本题	(154)
1. 向量代数(154)	2. 空间解析几何(158)
三、杂题	(164)
第八章 多元函数微分法及其应用	(171)
一、例题	(171)
二、基本题	(178)
三、杂题	(186)
第九章 重积分	(198)
一、例题	(198)
二、基本题	(207)
1. 二重积分(207)	2. 三重积分(213)
三、杂题	(216)
第十章 曲线积分与曲面积分	(226)
一、例题	(226)
二、基本题	(232)
1. 曲线积分(232)	2. 曲面积分(237)
三、杂题	(242)
第十一章 无穷级数	(252)
一、例题	(252)
二、基本题	(263)
1. 数项级数(263)	2. 幂级数(268)
3. 傅立叶级数(270)	
三、杂题	(273)
第十二章 微分方程	(283)
一、例题	(283)

二、基本题.....	(290)
1. 一阶微分方程(290) 2. 高阶微分方程(295)	
3. 微分方程组(299)	
三、杂题.....	(300)
答案与提示.....	(310)
附录.....	(417)
一、导数公式.....	(417)
二、积分公式.....	(420)
三、幂级数展开式.....	(435)

第一章 函数与极限

一、例 题

例 1 设 $f(x) = \begin{cases} 1+x, & x < 0, \\ 1, & x \geq 0, \end{cases}$ 求 $f[f(x)]$.

解 $f[f(x)] = \begin{cases} 1+f(x), & f(x) < 0, \\ 1, & f(x) \geq 0. \end{cases}$ 先求 $f(x) \geq 0$ 及 $f(x) < 0$ 的区域. 由 $f(x) \geq 0$ 得 $1+x \geq 0$, 于是 $x \geq -1$; 由 $f(x) < 0$ 得 $1+x < 0$, 于是 $x < -1$. 所以

$$f[f(x)] = \begin{cases} 1+f(x), & x < -1, \\ 1, & x \geq -1. \end{cases}$$

又当 $x < -1$ 时, $f(x) = 1+x$, 故有

$$f[f(x)] = \begin{cases} 2+x, & x < -1, \\ 1, & x \geq -1. \end{cases}$$

例 2 设 $f(x)$ 满足方程 $af(x) + bf\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{c}{x}$, 其中 a 、 b 、 c 为常数, 且 $|a| \neq |b|$, 求 $f(x)$ 的表达式并证明 $f(x)$ 是奇函数.

解
$$af(x) + bf\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{c}{x} \quad (1)$$

在式(1)中用 $\frac{1}{x}$ 代 x , 则得

$$af\left(\frac{1}{x}\right) + bf(x) = cx \quad (2)$$

由式(1)、(2)消去 $f\left(\frac{1}{x}\right)$, 得

$$(a^2 - b^2)f(x) = \frac{ac}{x} - bcx,$$

故
$$f(x) = \frac{c}{a^2 - b^2} \left(\frac{a}{x} - bx \right).$$

由于
$$f(-x) = \frac{c}{a^2 - b^2} \left(-\frac{a}{x} + bx \right) = \frac{-c}{a^2 - b^2} \left(\frac{a}{x} - bx \right) \\ = -f(x),$$

所以, $f(x)$ 是奇函数.

例 3 求极限

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2^3 - 1}{2^3 + 1} \cdot \frac{3^3 - 1}{3^3 + 1} \cdot \dots \cdot \frac{n^3 - 1}{n^3 + 1} \right).$$

解 若采用连乘记号, 则

$$\text{原式} = \lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{k=2}^n \frac{k^3 - 1}{k^3 + 1}.$$

由于
$$\frac{k^3 - 1}{k^3 + 1} = \frac{k-1}{k+1} \cdot \frac{k^2 + k + 1}{k^2 - k + 1},$$

而
$$\prod_{k=2}^n \frac{k-1}{k+1} = \frac{2}{n(n+1)},$$

$$\prod_{k=2}^n \frac{k^2 + k + 1}{k^2 - k + 1} = \prod_{k=2}^n \frac{(k+1)^2 - (k+1) + 1}{k^2 - k + 1} = \frac{n^2 + n + 1}{2^2 - 2 + 1} \\ = \frac{1}{3}(n^2 + n + 1),$$

故
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{k=2}^n \frac{k^3 - 1}{k^3 + 1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{k=2}^n \frac{k-1}{k+1} \cdot \frac{k^2 + k + 1}{k^2 - k + 1}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{k=2}^n \frac{k-1}{k+1} \cdot \prod_{k=2}^n \frac{k^2 + k + 1}{k^2 - k + 1}$$

$$\begin{aligned}
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{n(n+1)} \cdot \frac{n^2+n+1}{3} \\
 &= \frac{2}{3} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2+n+1}{n^2+n} = \frac{2}{3} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}{1+\frac{1}{n}} = \frac{2}{3}
 \end{aligned}$$

注 记号 $\prod$ 表示连乘, 例如 $\prod_{k=1}^n a_k = a_1 a_2 \cdots a_n$.

例4 已知 $\lim_{x \rightarrow +\infty} (5x - \sqrt{ax^2 - bx + c}) = 2$, 求 a, b .

解 因为

$$\begin{aligned}
 \text{原式} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(5x - \sqrt{ax^2 - bx + c})(5x + \sqrt{ax^2 - bx + c})}{5x + \sqrt{ax^2 - bx + c}} \\
 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{25x^2 - (ax^2 - bx + c)}{5x + \sqrt{ax^2 - bx + c}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(25-a)x^2 + bx - c}{5x + \sqrt{ax^2 - bx + c}} \\
 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(25-a)x + b - \frac{c}{x}}{5 + \sqrt{a - \frac{b}{x} + \frac{c}{x^2}}} = 2,
 \end{aligned}$$

所以

$$\begin{cases} 25-a=0, \\ \frac{b}{5+\sqrt{a}}=2, \end{cases}$$

解此两式, 得

$$a=25, \quad b=20.$$

例5 设 $x_{n+1} = \frac{1}{2} \left(x_n + \frac{a}{x_n} \right)$ ($n=0, 1, 2, \dots$), 其中

$a>0, x_0>0$. (1) $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ 是否存在; (2) 若存在, 试求其值.

解 (1) 由

$$x_n = \frac{1}{2} \left(x_{n-1} + \frac{a}{x_{n-1}} \right) = \frac{x_{n-1}^2 + a}{2x_{n-1}}$$

$$\geq \frac{2\sqrt{a}x_{n-1}}{2x_{n-1}} = \sqrt{a} \quad (n=1, 2, \dots),$$

可见数列 $\{x_n\}$ 有下界 $\sqrt{a}$ 。又因为

$$x_{n+1} - x_n = \frac{1}{2} \left(x_n + \frac{a}{x_n} \right) - x_n = \frac{a - x_n^2}{2x_n} \leq 0,$$

所以数列 $\{x_n\}$ 单调减少, 由极限存在准则可知 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ 存在, 设

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x.$$

(2) 对等式 $x_{n+1} = \frac{1}{2} \left(x_n + \frac{a}{x_n} \right)$ 两端取极限, 得

$$x = \frac{1}{2} \left(x + \frac{a}{x} \right),$$

$$\text{解之得} \quad x = \pm \sqrt{a}.$$

因为 $x_n > 0$, 所以取 $x = \sqrt{a}$ (负值舍去), 即

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \sqrt{a}.$$

例6 设

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\ln(1+x)}{x}, & x > 0, \\ 0, & x = 0, \\ \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{x}, & -1 \leq x < 0. \end{cases}$$

试讨论 $f(x)$ 在 $x=0$ 处的连续性。

解 因为

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow 0} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{x} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{x(\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x})} \\
 &= 1,
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow +0} f(x) &= \lim_{x \rightarrow +0} \frac{\ln(1+x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm 0} \ln(1+x)^{\frac{1}{x}} \\
 &= \ln e = 1,
 \end{aligned}$$

故 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1$, 但 $f(0) = 0$, 所以

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) \neq f(0),$$

因此, $f(x)$ 在 $x=0$ 处不连续.

例 7 设函数

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^{2n-1} + ax^2 + bx}{x^{2n} + 1}$$

是连续函数, 求 a, b 的值.

解 当 $|x| < 1$ 时, $f(x) = ax^2 + bx$,

$$\text{当 } |x| > 1 \text{ 时, } f(x) = \frac{1}{x},$$

$$\text{当 } x = 1 \text{ 时, } f(1) = \frac{1}{2}(1+a+b),$$

$$\text{当 } x = -1 \text{ 时, } f(-1) = \frac{1}{2}(-1+a-b).$$

因为函数 $f(x)$ 在 $x=1$ 处连续, 有

$$a+b=1 = \frac{1}{2}(1+a+b),$$

即

$$a+b=1$$

又函数 $f(x)$ 在 $x=-1$ 处连续, 有

$$a-b = -1 = \frac{1}{2}(-1+a-b),$$

即 $a-b = -1, \quad (2)$

解(1)、(2)两式, 可得

$$a=0, \quad b=1.$$

例 8 设函数 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上连续, 且 $a < c < d < b$. 证明在 $[a, b]$ 内至少存在一点 ξ , 使

$$pf(c) + qf(d) = (p+q)f(\xi)$$

成立, 其中 p, q 均为任意正常数.

证明 因为 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上连续, 所以此函数在区间 $[a, b]$ 上能取得最大值 M 和最小值 m , 且有

$$(p+q)m \leq pf(c) + qf(d) \leq (p+q)M,$$

即

$$m \leq \frac{pf(c) + qf(d)}{p+q} \leq M.$$

由介值定理可知, 在 $[a, b]$ 内至少存在一点 ξ , 使得

$$\frac{pf(c) + qf(d)}{p+q} = f(\xi)$$

即

$$pf(c) + qf(d) = (p+q)f(\xi).$$

二、基本题

1. 函数

求下列函数的定义域, 并用区间符号表示 (1.1~1.12).

$$1.1 \quad y = \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}.$$

$$1.2 \quad y = \sqrt{x^2 - 1}.$$

$$1.3 \quad y = 2^{\frac{1}{x}}.$$

$$1.4 \quad y = \arcsin \frac{x-3}{2}.$$

$$1.5 \quad y = \frac{1}{x^2 + 3x + 6}. \quad 1.6 \quad y = \sqrt{x^2 - 3x + 2}.$$

$$1.7 \quad y = \frac{x-4}{\sqrt{2+x-x^2}}. \quad 1.8 \quad y = \frac{x}{\sin x}.$$

$$1.9 \quad y = \begin{cases} -x, & -1 \leq x \leq 0 \\ x, & 0 < x < 2 \end{cases} \quad 1.10 \quad y = \sqrt{\lg\left(\frac{5x-x^2}{4}\right)}.$$

$$1.11 \quad y = \sqrt{3-x} + \frac{1}{\ln(x+1)}$$

$$1.12 \quad y = \sqrt{\sin x} + \sqrt{16-x^2}.$$

1.13 设 $\varphi(x) = |x-3| + |x-1|$, 求 $\varphi(0), \varphi(1), \varphi(2), \varphi(3), \varphi(-1)$ 和 $\varphi(-2)$.

1.14 设 $f(x) = x^2$, 证明:

$$(1) \quad f(-x) = f(x);$$

$$(2) \quad f(y) - f(x) = (y-x)(y+x);$$

$$(3) \quad f(x+h) - f(x) = 2xh + h^2;$$

$$(4) \quad f(t^2) = [f(t)]^2.$$

1.15 设 $\varphi(x) = \lg \frac{1-x}{1+x}$, 证明 $\varphi(u) + \varphi(v) = \varphi\left(\frac{u+v}{1+uv}\right)$.

1.16 若 $f(x) = \frac{x}{x-1}$, 求 $f(2), f(0), f[f(x_0)],$

$f(x_0+1)$, 其中 $x_0 \neq 0$.

作出下列函数的图形(1.17~1.20):

$$1.17 \quad y = |x| + x. \quad 1.18 \quad y = \sqrt{\sin^2 x}.$$

$$1.19 \quad y = \begin{cases} x^2, & x < 0 \\ -x, & x \geq 0 \end{cases} \quad 1.20 \quad y = |x^2 - 1|.$$

1.21 设 $y=f(x)$ 和 $y=\varphi(x)$ 的图形是已知的, 如何作出 $y=f(x)+\varphi(x)$ 的图形?

(1) 试作 $y = x + \frac{1}{x}$ 的图形;

(2) 试作 $y = \sin x + \cos x$ 的图形。

1.22 设 $y = f(x)$ 的图形是已知的, 如何作出 $y = f(x-a)$ 与 $y = f(x) + b$ 以及 $y = hf(x)$ 和 $y = f(-x)$ 的图形 (a, b, h 为常数)。试作出下列函数图形:

(1) $y = \ln(x+1),$

(2) $y = \frac{x+1}{x-1},$

(3) $y = \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right),$

(4) $y = \lg 2x,$

(5) $y = \sin^2 \frac{x}{2},$

(6) $y = \sin 2x.$

1.23 证明 $\sin x + \cos x = \sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$, 并利用这个结果作函数 $y = \sin x + \cos x$ 的图形。

1.24 对于二次函数 $f(x) = a_0 x^2 + a_1 x + a_2$, 若有三个彼此相异的实数 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$, 使 $f(\alpha_1) = f(\alpha_2) = f(\alpha_3) = 0$, 证明 $a_0 = a_1 = a_2 = 0$ 。

1.25 求满足下列性质的二次函数 $g(x) = ax^2 + bx + c$,

(1) $g(-1) = 5, g(0) = 2, g(1) = 7;$

(2) $g(3) = 7, g(5) = 5, g(7) = 3.$

1.26 设 $f(x) = \frac{ax+b}{cx-a}$, 且 $a^2 + bc \neq 0$, 证明

$$f[f(x)] = x \quad \left(x \neq \frac{a}{c}\right).$$

1.27 设 $f(x) = x + \sqrt{x^2 + 1}$, $g(x) = x + \sqrt{x^2 - 1}$, 证明 $g(\sqrt{x^2 + 1}) = f(x) (x \geq 0)$; $f(\sqrt{x^2 - 1}) = g(x) (x \geq 1)$ 。

1.28 $y = x$ 、 $y = \sqrt{x^2}$ 以及 $y = (\sqrt{x})^2$ 是否表示同一

函数?为什么?并作出它们的图形.

1.29 设 $f\left(x + \frac{1}{x}\right) = x^2 + \frac{1}{x^2}$, 求 $f(x)$.

1.30 设 $f\left(\frac{1}{x}\right) = x + \sqrt{1+x^2}$ ($x>0$), 求 $f(x)$.

1.31 指出下列函数中哪些是奇函数?哪些是偶函数?哪些是非奇非偶函数?

(1) $y = x^4 - x^2$; (2) $y = x^2 - x$;

(3) $y = \cos x$; (4) $y = \sin x$;

(5) $y = \lg x$; (6) $y = \lg x$;

(7) $y = 2^x$; (8) $y = 2^{-x^2}$;

(9) $y = \frac{1}{2}(a^x + a^{-x})$ ($a>0, a \neq 1$);

(10) $y = \frac{1}{2}(a^x - a^{-x})$ ($a>0, a \neq 1$);

(11) $y = \frac{a^x + 1}{a^x - 1}$ ($a>0, a \neq 1$);

(12) $y = x \cdot \frac{a^x + 1}{a^x - 1}$ ($a>0, a \neq 1$).

1.32 证明函数 $y = \log_a(x + \sqrt{x^2 + 1})$ ($a>0, a \neq 1$) 为奇函数. 并问 $y = \log_a(x - \sqrt{x^2 - 1})$ ($a>0, a \neq 1$) 是否为奇函数?

1.33 设 $y = f(x)$ 和 $y = g(x)$ 都定义在对称区间 $(-l, l)$ 内, 试证明:

(1) 若 $f(x)$ 、 $g(x)$ 均为偶函数, 则 $f(x) \cdot g(x)$ 为偶函数;

(2) 若 $f(x)$ 、 $g(x)$ 均为奇函数, 则 $f(x) \cdot g(x)$ 为偶函数;