高等教育自学辅导丛书

高等数学

第一册

北京大学 蒋定华 张晓波 编

化学工业出版社

高等教育自学辅导丛书

高等数学

第一册

解析几何和一元函数微分学

北京大学 蒋定华 张晓波 编

化学工业出版社

内 容 提 要

本书是根据教育部推荐的《高等数学教学大纲》和北京市高等教育自学考试委员会公布的考试要求编写的。全书分三册出版，第一册为解析几何和一元函数微分学；第二册为一元函数积分学和级数；第三册为多元函数微积分和常微分方程。本册包括平面、空间解析几何，函数，极限，连续，导数等内容；概念叙述清楚简洁，深入浅出，通俗易懂。书中还通过较多例题和一定数量习题加深理解概念，掌握解题方法和技巧。一般习题给出答案，较难习题给出题解；每章开头指出重点，章末有小结。每一阶段有自我检查试题。本册由北京大学数学系蒋定华同志编写，沈燮昌教授审定，张晓波同志为一元函数微分学部分编选了习题，编写了习题选解和习题答案。

本书除作为自学高等数学的教材外，也可供理工科大学、师范院校、电视大学、业余大学师生选用。

高等教育自学辅导丛书

高 等 数 学

第 一 册

解析几何和一元函数微分学

北京大学 蒋定华 张晓波 编

*

化学工业出版社出版

（北京和平里七区十六号楼）

化学工业出版社印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行

*

开本850×1168 1/32 印张17 7/8 字数474千字 印数1—64,500

1982年 4 月北京第 1 版 1982年 4 月北京第 1 次印刷

统一书号7063·3390 定价2.20元

出 版 说 明

建国以来，在党的领导下，我国业余教育事业取得了很大成绩。为了进一步促进业余教育事业的发展，加速培养和选拔四化建设所需要的合格人才，教育部作出了关于建立高等教育自学考试制度的决定。凡属中华人民共和国公民经考核达到高等学校毕业生同等水平的，均承认其学历。为了配合这一工作的开展，为自学人员提供学习辅导材料，我社组织编写出版一套《高等教育自学辅导丛书》。这套丛书包括《语文》、《哲学》、《政治经济学》、《高等数学》、《物理》、《化学》、《生物》等册。

本《丛书》是根据北京市高等教育自学考试委员会公布的考试科目、教科书和考试要求以及教育部推荐的教学大纲编写的。书中力求从自学特点出发，对指定教材的内容作进一步阐述；重点突出；文字通俗；便于自学。

《丛书》除供自学人员学习外，也可供理工科大学、电视大学、业余大学师生选用。

前　　言

建设现代化的社会主义强国，需要培养众多的又红又专的人才。当前，我国只有很少一部分人直接由高等学校培养，绝大多数人只能走自学成材（包括在职学习）的道路。为了给自学者提供学习的条件，我们为化学工业出版社出版的《高等教育自学辅导丛书》编写了《高等数学》。全书共分三册：第一册包括解析几何与一元函数微分学；第二册包括一元函数积分学与级数；第三册包括多元函数微积分与常微分方程。

本书是根据北京市高等教育自学考试委员会关于高等数学考试要求，并参照所规定的学习书目〔樊映川著高等数学讲义（上、下册）〕和教育部推荐的高等数学教学大纲编写的。作为一本自学读物，本书力求做到深入浅出，通俗易懂，重点突出。为了便于自学，我们采用讲课的形式来编写。不少地方写得较细，以便将基本内容叙述清楚、讲深讲透。书中有较多的例题，在习题选解中又对一些典型题目进行分析解答，以便使读者能进一步理解书中的一些概念，掌握更多的解题方法与技巧。每节都有较多的习题，每章的最后都有小结，书后附有全部习题答案及部分习题的提示和解题步骤。书中还有阶段自我检查试题，在学完一阶段内容之后应按书中列出的自我检查试题，在规定时间内认真独立完成，然后对照书末的详细解答评定自己的成绩，总结经验，找出学习中不足之处，以便更好地掌握全书内容。

读者在自学中，应当在初步理解课本内容的基础上，务必要采取自己动手推导演算各个章节的定理、例题、习题的方式来加深理解；切不可一遇到困难就放过不做，或者去查看本书中的现成答案；这是自己独立学好本门课程的关键。

书中有少部分内容我们认为是必要的，但又超出目前教学大

纲的范围，对此均采用小号字排印。

全书由沈燮昌教授主审。

由于编写时间仓促，编者水平又有限，全书难免有错误或不妥之处，希望读者不吝指正。

编　者

1981.10

目　　录

第二篇 数 学 分 析

第一篇 解 析 几 何

第一章 行列式及线性方程组

行列式是由线性方程组求解问题提出的一个重要概念。有了行列式的概念，线性方程组是否有唯一解的条件就可以表述得非常清楚而简单，对于有唯一解的情况还可以得到解的公式。当然，行列式的用途并不仅限于解决线性方程组的问题，它还有着广泛的应用。

本章的重点是三阶行列式的计算、线性方程组有唯一解的条件和齐次线性方程组有非零解的条件。

§1 二阶行列式和二元线性方程组

首先求二元线性方程组：

$$\begin{cases} a_1x+b_1y=c_1 & (1) \\ a_2x+b_2y=c_2 & (2) \end{cases}$$

的解。我们用消元法求解。以b_2乘(1)式两边，以b_1乘(2)式两边，然后相减，就可消去y，得到

$$(a_1b_2-a_2b_1)x=c_1b_2-c_2b_1.$$

同样，消去x，可得

$$(a_1b_2-a_2b_1)y=a_1c_2-a_2c_1.$$

若$a_1b_2-a_2b_1\neq0$，就可得到

$$x=\frac{c_1b_2-c_2b_1}{a_1b_2-a_2b_1},\tag{3}$$

$$y=\frac{a_1c_2-a_2c_1}{a_1b_2-a_2b_1}.\tag{4}$$

从求解过程可以看到，条件 $a_1b_2-a_2b_1\neq 0$十分重要，它决定了方程组是否有唯一解。式子 $a_1b_2-a_2b_1$完全由方程组(1)、(2)左端的系数组成。为了把这个式子写成更规则的形式，定义它为a_1、b_1、a_2、b_2组成的二阶行列式，记作

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}=a_1b_2-a_2b_1.$$

定义　二阶行列式

$$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}=A_1B_2-A_2B_1.\tag{5}$$

二阶行列式中的每一个数A_1、B_1、A_2、B_2都称为这个行列式的**元素**，横排叫做**行**，竖排叫做**列**。

由左上角到右下角的对角线叫做**主对角线**，由右上角到左下角的对角线叫做**副对角线**，或称**第二对角线**。这样，二阶行列式的值就等于主对角线上两元素的乘积减去副对角线上两元素的乘积。

例　$$\begin{vmatrix} -2 & 5 \\ -4 & 3 \end{vmatrix}=-2.3-(-4).5=14.$$

把行列式以主对角线为轴翻转，称为**转置**。转置也称为行列互换。例如，二阶行列式

$$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}$$

的转置行列式为

$$\begin{vmatrix} A_1 & A_2 \\ B_1 & B_2 \end{vmatrix}.$$

由二阶行列式的定义可知，行列式转置其值不变，即

$$\begin{vmatrix} A_1 & A_2 \\ B_1 & B_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}.$$

另外，由定义还可知，两行对调或两列对调，行列式都要变号，即有

$$\begin{vmatrix} A_2 & B_2 \\ A_1 & B_1 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix},$$

$$\begin{vmatrix} B_1 & A_1 \\ B_2 & A_2 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}.$$

有了二阶行列式的概念，现在再回来讨论二元线性方程组。在(3)、(4)式中分母已用二阶行列式表示了，我们把它用Δ表示，即

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}.$$

(3)、(4)两式中的分子也都可以用二阶行列式表示，我们分别用Δ_x和Δ_y表示，即

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix},$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}.$$

它们分别是用常数项c_1、c_2代替Δ中x和y的系数而成的。这样，解(3)、(4)就可以表示为

$$x=\frac{\Delta_x}{\Delta},\quad y=\frac{\Delta_y}{\Delta}.$$

我们把上面讨论的关于二元线性方程组的结果归纳为一个定理.

定理1 对于二元线性方程组(1)、(2)，若其系数行列式$\Delta\neq0$，则方程组(1)、(2)必有唯一解，且其解可表示为

$$x=\frac{\Delta_x}{\Delta},\quad y=\frac{\Delta_y}{\Delta}.$$

定理2 若系数行列式 $\Delta=0$，则方程组(1)—(2)或有无穷多组解或者无解。

证明

$$\Delta=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}=a_1b_2-a_2b_1=0$$

则有

$$\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}.$$

如果又有$\Delta_x=0$，即$c_1b_2-c_2b_1=0$，可得

$$\frac{c_1}{c_2}=\frac{b_1}{b_2}.$$

与$\Delta=0$合起来，可知

$$\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}=\frac{c_1}{c_2}.$$

(此时，必有$\Delta_y=0$) 这样，方程(1)和(2)只差一常数倍，这两个方程相当于一个方程

$$a_1x+b_1y=c_1.$$

显然，这个方程有无穷多组解.

如果$\Delta_x\neq0$，即$c_1b_2-c_2b_1\neq0$，可得

$$\frac{c_1}{c_2}\neq\frac{b_1}{b_2}.$$

令 $\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}=\lambda$，方程（1）就化为

$$\lambda(a_2x+b_2y)=c_1,$$

$$a_2x+b_2y=\frac{c_1}{\lambda},$$

由于 $\frac{c_1}{c_2}\neq\lambda$，亦即 $\frac{c_1}{\lambda}\neq c_2$，故此式与方程（2）矛盾，方程组无解。证毕。

注：从证明中还可以看到，当 $\Delta=0$ 时，若 $\Delta_x=0$，则方程组（1）—（2）有无穷多组解；若 $\Delta_x\neq0$，则方程组（1）—（2）无解。

例1 解方程组

$$\begin{cases}2x+3y-8=0,\\ x-2y+3=0.\end{cases}$$

解

$$\Delta=\begin{vmatrix}2 & 3\\ 1 & -2\end{vmatrix}=-7\neq0,$$

故方程组有唯一解.

$$\Delta_x=\begin{vmatrix}8 & 3\\ -3 & -2\end{vmatrix}=-7,$$

$$\Delta_y=\begin{vmatrix}2 & 8\\ 1 & -3\end{vmatrix}=-14.$$

方程组解为

$$x=\frac{\Delta_x}{\Delta}=\frac{-7}{-7}=1,\quad y=\frac{\Delta_y}{\Delta}=\frac{-14}{-7}=2.$$

例2 解方程组

$$\begin{cases}3x+y=1,\\6x+2y=5.\end{cases}$$

解

$$\Delta=\begin{vmatrix}3&1\\6&2\end{vmatrix}=0,$$

$$\Delta_x=\begin{vmatrix}1&1\\5&2\end{vmatrix}=-3\neq 0.$$

所以方程组无解。

例3 解方程组

$$\begin{cases}x-2y=3,\\2x-4y-6=0.\end{cases}$$

解

$$\Delta=\begin{vmatrix}1&-2\\2&-4\end{vmatrix}=0,$$

$$\Delta_x=\begin{vmatrix}3&-2\\6&-4\end{vmatrix}=0.$$

所以方程组有无穷多组解。方程组中两个方程只相当于一个方程

$$x-2y=3,$$

进一步可化为

$$x=2y+3.$$

设C是任意常数，那么

$$y=C,$$
$$x=2C+3$$

就是方程组的解。

§2 三 阶 行 列 式

和二阶行列式类似，由三元线性方程组的求解问题提出三阶

行列式的概念。不过，用普通的消元法得出三元线性方程组的解的公式是很繁琐的。因此，先引进三阶行列式的概念，然后再利用行列式来讨论三元线性方程组。

定义 三阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1b_2c_3 + a_2b_3c_1 + a_3b_1c_2 - a_3b_2c_1 - a_2b_1c_3 - a_1b_3c_2。$$

和二阶行列式一样，三阶行列式中的每一个数 a_1、b_1、c_1、a_2、…、c_3 称为行列式的元素。横排称为行，竖排称为列。由左上角到右下角的对角线叫做主对角线，由右上角到左下角的对角线叫做副对角线。

从三阶行列式的定义可以看到，三阶行列式展开后共有6项，每一项都是不同行不同列的三个元素的乘积，与主对角线平行的三项相加，再减去与副对角线平行的三项。把这一计算规律用下面的图表示。(图 1)。

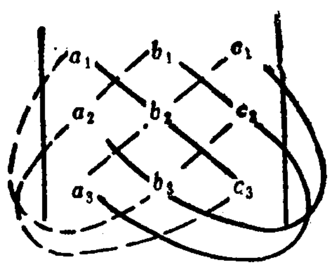

图 1 三阶行列式的计算

这种计算法则通常叫做对角线法。

例1 计算行列式

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 3 & 4 \\ 2 & 5 & 2 \end{vmatrix} = 1\cdot3\cdot2 + (-1)\cdot5\cdot3 + 2\cdot4\cdot2 - 3\cdot3\cdot2 - 2\cdot(-1)\cdot2 - 1\cdot4\cdot5$$