本书是根据全国高等学校理科数学教材编写大纲讨论会上所制定的化、生、地类《高等数学》教材编写大纲编写的．全书分一、二、三册出版．第三册包括矩阵和向量，群论初步和群的表示等三章．可供综合大学和师范院校化、生、地类有关专业作试用教材．

高　等　数　学

（化、生、地类专业）

第　三　册

上海师范大学数学系
中山大学数学力学系合编
上海师范学院数学系

*

人民教育出版社出版

新华书店上海发行所发行

上海市印刷六厂印装

*

1978年5月第1版　1978年10月第1次印刷

书号 13012·0183　　定价 0.34 元

目　　录

第十一章　矩阵和向量

矩阵代数是线性代数的一个重要组成部分. 我们在这一章里学习矩阵和向量,主要目的是为以后研究群表示论作好准备.

§11.1　n 阶行列式

1. n 阶行列式的定义

二阶行列式和三阶行列式是为解二元一次方程组和三元一次方程组而引入的. 现在为了解 n 元一次方程组(即 n 元线性方程组)我们来引入 n 阶行列式的概念.

首先复习一下二阶行列式和三阶行列式. 二阶行列式是指

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}; \tag{1}$$

三阶行列式是指

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}. \tag{2}$$

在行列式中横排称为行,纵排称为列,数 a_{ij} 称为第 i 行第 j 列的元素. 三阶行列式是一个算式,算出来是一个数.

我们再介绍一下代数余子式的概念.

在三阶行列式中划去元素 a_{ij} 所在的行和列的元素,剩下的元素按原来的排法所构成的一个二阶行列式称为 a_{ij} 的余子式, a_{ij} 的余子式乘以 $(-1)^{i+j}$ 称为 a_{ij} 的代数余子式,记作 A_{ij}. 例如

$$A_{23}=(-1)^{2+3}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cancel{a_{13}} \\ \cancel{a_{21}} & \cancel{a_{22}} & \cancel{a_{23}} \\ a_{31} & a_{32} & \cancel{a_{33}} \end{vmatrix}=-\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}.$$

引入了代数余子式,我们可以将三阶行列式按任意一行展开,例如行列式按第 $i(i=1, 2, 3)$行展开,可写为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+a_{i3}A_{i3}=\sum_{j=1}^{3}a_{ij}A_{ij}. \qquad (3)$$

三阶行列式也可以按任意一列展开,例如按第 $j(j=1, 2, 3)$列展开,可写为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=a_{1j}A_{1j}+a_{2j}A_{2j}+a_{3j}A_{3j}=\sum_{i=1}^{3}a_{ij}A_{ij}. \qquad (4)$$

这就是说,三阶行列式按某一行(或列)的展开式,就是这一行(或列)的元素与各自的代数余子式的乘积之和.

例 1 计算行列式

$$\Delta=\begin{vmatrix} 3 & 5 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \\ 5 & 2 & 3 \end{vmatrix}.$$

解 按第二行展开,

$$\Delta=-2\begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 5 & 3 \end{vmatrix}-\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 2 \end{vmatrix}$$
$$=-2\times9-6+19=-5.$$

再按第一列展开,

$$\Delta=3\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}-2\begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}+5\begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$$
$$=3\times1-2\times9+5\times2=-5.$$

此例说明行列式按行或按列展开的结果是一样的.

综上所述,可以认为,三阶行列式,是利用二阶行列式通过(2)式来定义的. 仿此,四阶行列式,可利用三阶行列式定义,如此可以定义五阶、六阶……直至任意 n 阶行列式.

定义 1 n 阶行列式

$$\Delta=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

是一个算式,当 $n=2$ 时,令

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21};$$

当 $n>2$ 时,令

$$\Delta=a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+\cdots+a_{1n}A_{1n}, \tag{5}$$

其中 $A_{1j}(j=1, 2, \cdots, n)$ 称为元素 a_{1j} 的代数余子式,它表示从行列式 Δ 中划去第 1 行和第 j 列的元素所剩下的 $n-1$ 阶行列式乘以 $(-1)^{1+j}$,即

$$A_{1j}=(-1)^{1+j}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \cdots a_{2,j-1} & a_{2,j+1} \cdots a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} \cdots a_{3,j-1} & a_{3,j+1} \cdots a_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} \cdots a_{n,j-1} & a_{n,j+1} \cdots a_{nn} \end{vmatrix}. \tag{6}$$

所以,在定义了二阶行列式以后,按上述方法,三阶、四阶、…直到任意 n 阶行列式都有了定义①.

2. n 阶行列式的性质

三阶行列式的性质(见本书第一册附录 III 之三)对于 n 阶行列式同样也是正确的,我们现在仅叙述 n 阶行列式的一些主要性质而不加以证明.

---

① 如果定义一阶行列式 $|a_{11}|=a_{11}$(在这里 $|a_{11}|$ 不是表示 a_{11} 的绝对值),则二阶行列式也可以由(5)式来定义.

此为试读,需要完整PDF请访问: www.ertongbook.com

① 行列互调，行列式的值不变，即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \cdots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \cdots a_{2n} \\ \cdots & \cdots\cdots\cdots \\ a_{n1} & a_{n2} \cdots a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} \cdots a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} \cdots a_{n2} \\ \cdots & \cdots\cdots\cdots \\ a_{1n} & a_{2n} \cdots a_{nn} \end{vmatrix}.$$

性质①说明，凡是对行成立的性质，对列也同样成立。

② 任意两行(或两列)对调，行列式改变符号，即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \cdots a_{1n} \\ \cdots & \cdots\cdots\cdots \\ a_{i1} & a_{i2} \cdots a_{in} \\ \cdots & \cdots\cdots\cdots \\ a_{k1} & a_{k2} \cdots a_{kn} \\ \cdots & \cdots\cdots\cdots \\ a_{n1} & a_{n2} \cdots a_{nn} \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \cdots a_{1n} \\ \cdots & \cdots\cdots\cdots \\ a_{k1} & a_{k2} \cdots a_{kn} \\ \cdots & \cdots\cdots\cdots \\ a_{i1} & a_{i2} \cdots a_{in} \\ \cdots & \cdots\cdots\cdots \\ a_{n1} & a_{n2} \cdots a_{nn} \end{vmatrix}.$$

③ 行列式的某一行(或列)如有公因子，则可将公因子提出行列式记号之外，即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ ka_{i1} & ka_{i2} & \cdots & ka_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = k\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

④ 如果行列式的某一行(或列)的各元素是两数的和，则此行列式为相应的两个行列式的和，即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1}+a'_{i1} & a_{i2}+a'_{i2} & \cdots & a_{in}+a'_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \cdots a_{1n} \\ \cdots & \cdots\cdots\cdots \\ a_{i1} & a_{i2} \cdots a_{in} \\ \cdots & \cdots\cdots\cdots \\ a_{n1} & a_{n2} \cdots a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \cdots a_{1n} \\ \cdots & \cdots\cdots\cdots \\ a'_{i1} & a'_{i2} \cdots a'_{in} \\ \cdots & \cdots\cdots\cdots \\ a_{n1} & a_{n2} \cdots a_{nn} \end{vmatrix}.$$

⑤ 如果行列式中有两行(或两列)的对应元素成比例,则行列式的值等于零,即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ ka_{i1} & ka_{i2} & \cdots & ka_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=0.$$

⑥ 把行列式的某一行(或列)的各元素同乘以一数 k 后,加到另一行(或列)的对应元素上去,行列式的值不变,即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1}+ka_{j1} & a_{i2}+ka_{j2} & \cdots & a_{in}+ka_{jn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

n 阶行列式和三阶行列式一样,也可以按任意一行或任意一列展开,为此我们类似三阶行列式定义任一元素的代数余子式的概念.

定义 2 n 阶行列式 Δ 的元素 a_{ij} 所对应的代数余子式 A_{ij} 是从 Δ 中划去第 i 行和第 j 列的元素以后所剩下的元素按原来的排法所成的 $n-1$ 阶行列式乘以 $(-1)^{i+j}$,即

$$A_{ij}=(-1)^{i+j}\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,j-1} & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i-1,1} & \cdots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j+1} & \cdots & a_{i-1,n} \\ a_{i+1,1} & \cdots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j+1} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}. \tag{7}$$

⑦ 行列式 Δ 等于它的任意一行(或任意一列)的元素与其对应的代数余子式的乘积之和，即

$$\Delta=a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+\cdots+a_{in}A_{in}, \tag{8}$$

或

$$\Delta=a_{1k}A_{1k}+a_{2k}A_{2k}+\cdots+a_{nk}A_{nk}. \tag{9}$$

⑧ 行列式 Δ 的某一行(或列)的元素与另一行(或列)相应元素的代数余子式的乘积之和等于零，即

$$a_{i1}A_{k1}+a_{i2}A_{k2}+\cdots+a_{in}A_{kn}=0,\ \text{当}\ i\neq k; \tag{10}$$

或

$$a_{1i}A_{1k}+a_{2i}A_{2k}+\cdots+a_{ni}A_{nk}=0,\ \text{当}\ i\neq k. \tag{11}$$

我们把(8)与(10)可合并写成

$$a_{i1}A_{k1}+a_{i2}A_{k2}+\cdots+a_{in}A_{kn}=\begin{cases}\Delta, & \text{当}\ i=k,\\ 0, & \text{当}\ i\neq k.\end{cases} \tag{12}$$

或

$$\sum_{j=1}^{n}a_{ij}A_{kj}=\begin{cases}\Delta, & \text{当}\ i=k,\\ 0, & \text{当}\ i\neq k.\end{cases} \tag{12'}$$

把(9)与(11)可合并写成

$$a_{1i}A_{1k}+a_{2i}A_{2k}+\cdots+a_{ni}A_{nk}=\begin{cases}\Delta, & \text{当}\ i=k,\\ 0, & \text{当}\ i\neq k.\end{cases} \tag{13}$$

或

$$\sum_{j=1}^{n}a_{ji}A_{jk}=\begin{cases}\Delta, & \text{当}\ i=k,\\ 0, & \text{当}\ i\neq k.\end{cases} \tag{13'}$$

3. n 阶行列式的计算

行列式的计算是一个重要而复杂的问题. 我们知道二阶行列式要计算两项，三阶行列式要计算三个二阶行列式，即要计算 3×2 项，四阶行列式要计算四个三阶行列式，即要计算 $4\times3\times2$ 项，类似地五阶行列式要计算 $5\times4\times3\times2$ 项. 一般 n 阶行列式要计算 $n\times(n-1)\times\cdots\times3\times2=n!$ 项，随着 n 的增大，这个计算量增加得很快. 这就需要利用行列式的性质来简化计算.

例 2 计算

$$\Delta=\begin{vmatrix}5&3&1&6\\0&2&2&3\\0&0&1&4\\0&0&0&7\end{vmatrix}.$$

解 这是一个特殊的行列式,对角线下的元素都是零,我们按第一列展开 Δ.

$$\Delta=5\times\begin{vmatrix}2&2&3\\0&1&4\\0&0&7\end{vmatrix}-0\times\begin{vmatrix}3&1&6\\0&1&4\\0&0&7\end{vmatrix}+0\times\begin{vmatrix}3&1&6\\2&2&3\\0&0&7\end{vmatrix}$$

$$-0\times\begin{vmatrix}3&1&6\\2&2&3\\0&1&4\end{vmatrix}=5\times\begin{vmatrix}2&2&3\\0&1&4\\0&0&7\end{vmatrix}.$$

这时只有一个三阶行列式需要计算,其余的项都是零. 我们把这个三阶行列式继续按第一列展开.

$$\Delta=5\times2\times\begin{vmatrix}1&4\\0&7\end{vmatrix}=5\times2\times1\times7=70.$$

从这个例子我们可以得出一个规律,即展开这一类型的行列式 Δ 时,每展开一次都是由对角线上的一个元素乘以它所对应的子式,将 Δ 逐步展开,最后得到 Δ 是对角线上元素的乘积. 例 2 可以推广如下:

上三角形的行列式

$$\Delta=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}&\cdots&a_{1,n-1}&a_{1n}\\0&a_{22}&a_{23}&\cdots&a_{2,n-1}&a_{2n}\\0&0&a_{33}&\cdots&a_{3,n-1}&a_{3n}\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\0&0&0&\cdots&0&a_{nn}\end{vmatrix}$$

的值等于 $a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$，即对角线上元素的连乘积．证明留给读者作为习题．

例 3 计算

$$\Delta=\begin{vmatrix} -1 & -9 & -2 & 3 \\ -5 & 5 & 3 & -2 \\ -12 & -6 & 1 & 1 \\ 9 & 0 & -2 & 1 \end{vmatrix}.$$

解 这是一个四阶行列式，如果我们直接按第一行展开，需要计算四个三阶行列式，工作量很大．如果按第四行展开，可少计算一个三阶行列式，因为这行有一个元素为零．现在我们利用行列式的性质，设法使第四行的其它元素尽可能变为零，这样就使计算大大简化．为此我们以 2 乘第四列加到第三列上，根据行列式的性质⑥，行列式的值不变，即

$$\Delta=\begin{vmatrix} -1 & -9 & -2 & 3 \\ -5 & 5 & 3 & -2 \\ -12 & -6 & 1 & 1 \\ 9 & 0 & -2 & 1 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} -1 & -9 & 4 & 3 \\ -5 & 5 & -1 & -2 \\ -12 & -6 & 3 & 1 \\ 9 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

类似地，以 -9 乘第四列加到第一列上，则

$$\Delta=\begin{vmatrix} -28 & -9 & 4 & 3 \\ 13 & 5 & -1 & -2 \\ -21 & -6 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}=(-1)^{4+4}\begin{vmatrix} -28 & -9 & 4 \\ 13 & 5 & -1 \\ -21 & -6 & 3 \end{vmatrix}.$$

这最后一步是按四阶行列式的第四行展开而得出的．现在的问题已化为计算一个三阶行列式．我们设法把这个三阶行列式化为二阶行列式来计算．为此我们以 4 乘第二行加到第一行上，则

$$\Delta=\begin{vmatrix} 24 & 11 & 0 \\ 13 & 5 & -1 \\ -21 & -6 & 3 \end{vmatrix}.$$

再以 3 乘第二行加到第三行上，则

$$\Delta=\begin{vmatrix}24 & 11 & 0\\13 & 5 & -1\\18 & 9 & 0\end{vmatrix}=(-1)(-1)^{2+3}\begin{vmatrix}24 & 11\\18 & 9\end{vmatrix}.$$

这后一步是按三阶行列式的第三列展开而得出的. 再提出二阶行列式第二行的元素的公因子 9，据行列式的性质③，行列式的值不变，即

$$\Delta=9\begin{vmatrix}24 & 11\\2 & 1\end{vmatrix}=9\times 2=18.$$

从这个例子我们看出，为了简化计算，中心思想是把行列式的某一行(或某一列)，用行列式的性质化为最多只剩下一个不为零的元素，而这一行(或列)的其它元素全化为零. 这样将行列式按这一行(或列)展开时，就剩下一个低一阶的行列式了. 继续这样做下去，每次降低一阶，直到算出行列式的值为止.

4. 行列式在解线性方程组上的应用——克莱姆规则

二阶行列式和三阶行列式是为解二元一次方程组和三元一次方程组而引入的. 在二阶行列式和三阶行列式的基础上我们引入了 n 阶行列式. 二元一次方程组和三元一次方程组的解在一定的条件下是可以用行列式来表示的. 下面我们将对 n 元线性方程组给出与二元和三元一次方程组相类似的结果，称为 n 元线性方程组的行列式法则——克莱姆规则.

克莱姆规则 如果线性方程组

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1,\\a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2,\\\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n=b_n\end{cases}\tag{14}$$

的系数行列式

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

$$\Delta=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

不为零，则线性方程组(14)有唯一解，且解可表为

$$x_1=\frac{\Delta_1}{\Delta},\quad x_2=\frac{\Delta_2}{\Delta},\quad \cdots,\quad x_n=\frac{\Delta_n}{\Delta},$$

其中 Δ_j 是把行列式 Δ 的第 j 列元素换为方程组(14)的常数项 $b_1, b_2, \cdots, b_n$ 后所得出的行列式，即

$$\Delta_j=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,j-1} & b_1 & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2,j-1} & b_2 & a_{2,j+1} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & b_n & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},\ (j=1, 2, \cdots, n).$$

这个规则的证明将在§11.3之4给出.

例4 解线性方程组

$$\begin{cases} x_1+2x_2+3x_3+4x_4=-3, \\ x_1 \qquad\ \ + x_3+2x_4=-1, \\ 3x_1-x_2-x_3 \qquad\quad = 1, \\ x_1+2x_2 \qquad\ -5x_4= 1. \end{cases}$$

解 方程组的系数行列式

$$\Delta=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & -5 \end{vmatrix}=-24\neq 0.$$

所以可以应用克莱姆规则. 由于

$$\Delta_1=\begin{vmatrix} -3 & 2 & 3 & 4 \\ -1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & -5 \end{vmatrix}=-2,$$

$$\Delta_2=\begin{vmatrix}1 & -3 & 3 & 4\\ 1 & -1 & 1 & 2\\ 3 & 1 & -1 & 0\\ 1 & 1 & 0 & -5\end{vmatrix}=4,$$

$$\Delta_3=\begin{vmatrix}1 & 2 & -3 & 4\\ 1 & 0 & -1 & 2\\ 3 & -1 & 1 & 0\\ 1 & 2 & 1 & -5\end{vmatrix}=14,$$

$$\Delta_4=\begin{vmatrix}1 & 2 & 3 & -3\\ 1 & 0 & 1 & -1\\ 3 & -1 & -1 & 1\\ 1 & 2 & 0 & 1\end{vmatrix}=6,$$

方程组的唯一解为

$$x_1=\frac{\Delta_1}{\Delta}=\frac{-2}{-24}=\frac{1}{12},$$

$$x_2=\frac{\Delta_2}{\Delta}=\frac{4}{-24}=-\frac{1}{6},$$

$$x_3=\frac{\Delta_3}{\Delta}=\frac{14}{-24}=-\frac{7}{12},$$

$$x_4=\frac{\Delta_4}{\Delta}=\frac{6}{-24}=-\frac{1}{4}.$$

克莱姆规则的意义在于它给出了解与系数的明显关系，但是用克莱姆规则计算 n 元线性方程组的解是很不方便的．因为按照这个规则，解一个 n 个未知量 n 个方程的线性方程组就要计算 $n+1$ 个 n 阶行列式，当 n 的值较大时，计算量是很大的．对于方程个数较多的线性方程组，我们常用数值解法．它已成为数学中的一个重要分支．

习　　题

1. 求行列式

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{vmatrix}$$

的各元素所对应的代数余子式.

2. 计算下面的行列式:

(1) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$,　　(2) $\begin{vmatrix} -2 & 5 & 0 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 3 & 7 & -2 \\ 3 & -1 & 0 & 5 & -5 \\ 2 & 6 & -4 & 1 & 2 \\ 0 & -3 & -1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$,

3. 解下列线性方程组:

(1) $\begin{cases} 5x_1 + 4x_3 + 2x_4 = 3, \\ x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 = 1, \\ 4x_1 + x_2 + 2x_3 = 1, \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0. \end{cases}$　　(2) $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 5x_3 + x_4 = 8, \\ x_1 - 3x_2 - 6x_4 = 9, \\ 2x_2 - x_3 + 2x_4 = -5, \\ x_1 + 4x_2 - 7x_3 + 6x_4 = 0. \end{cases}$

§11.2　线性变换和矩阵的乘法

在解析几何中，我们知道，把平面上一个直角坐标系的轴旋转角 α 后(图 11-1)，点的坐标有下面的变换:

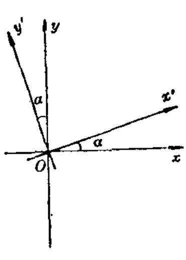

图　11-1

$$\begin{cases} x' = x\cos\alpha + y\sin\alpha, \\ y' = -x\sin\alpha + y\cos\alpha. \end{cases} \qquad (1)$$

其中 x, y 为点的旧坐标，x', y' 为点的新坐标. 这就表明 x' 与 y' 是经由 x 与 y 以某些数为系数线性表出的. 在许多场合中我们常常碰到变量的代换，把新的变量经由旧的变量线性表出. 变量的这种代换通常称为线性变换.

我们还可以对线性变换(1)作另外的解释．这就是在平面上取定直角坐标系 $O\text{-}xy$ 后，线性变换(1)把向量 $\overrightarrow{OP}=(x, y)$ 变为另一个向量 $\overrightarrow{OP'}=(x', y')$，或(1)把点 $P(x, y)$ 变为另一点 $P'(x', y')$（图 11-2）．这时(1)称为平面上绕原点 O 作角度 α 的旋转变换①．换句话说，我们把线性变换(1)看作是平面上的向量变换或点变换．另一方面，上一段的解释是把线性变换(1)看作是平面上的坐标变换．对于我们来说，在以后的讨论中向量变换和点变换的观点是重要的．

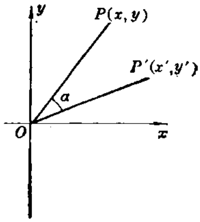

图 11-2

1．线性变换和矩阵乘法的定义

定义 1 把新变量 $y_1, y_2, \cdots, y_m$ 用旧变量 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 齐次线性表出的代换：

$$\left\{\begin{array}{l} y_1=a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n \\ y_2=a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ y_m=a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n \end{array}\right. \tag{2}$$

称为把变量 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 换为新变量 $y_1, y_2, \cdots, y_m$ 的线性变换，其中 $a_{ij}(i=1, 2, \cdots, m;\ j=1, 2, \cdots, n)$ 是数．

线性变换(2)中新变量的个数 m 与旧变量的个数 n 不一定相等．特别，如果 $m=n$，那么我们说，(2)是 n 个变量的线性变换．这种变换是我们以后常用到的．例如变换(1)就是一个含有两个变量的线性变换．

① 必须注意：把公式(1)看作点的旋转变换时，沿顺时针方向旋转的角 α 取正值，而把公式(1)看作坐标轴的旋转变换时，沿逆时针方向旋转的角 α 取正值．因此，如果按照普通规定，把沿逆时针方向旋转的角 α 取正值，那么平面上绕原点 O 作角度 θ 的旋转变换（点变换！）的公式是

$$\left\{\begin{array}{l} x'=x\cos\theta-y\sin\theta, \\ y'=x\sin\theta+y\cos\theta. \end{array}\right.$$

把线性变换(2)的系数 a_{ij} 按原有的相对位置排成一个表

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \tag{3}$$

我们就得一个 m 行 n 列的矩阵，称为线性变换(2)的矩阵．矩阵不仅在线性代数中，而且在物理、力学和工程技术等方面都有广泛的应用．

定义 2 mn 个数所排成的 m 行 n 列的表(3)称为一个 m 行 n 列矩阵(简称 $m\times n$ 型矩阵)．横的各排称为矩阵(3)的行，而纵的排称为矩阵(3)的列．a_{ij} 称为矩阵(3)的第 i 行第 j 列的元素，或矩阵(3)的 (i, j) 元素．

我们常用 A 代表矩阵(3)，也可以把矩阵(3)记作 (a_{ij}) 或 $(a_{ij})_{m\times n}$ 或 $A_{m\times n}$．特别，如果 $m=n$，则称(3)为 n 级方阵或 n 级矩阵．

两个 m 行 n 列矩阵

$$A=(a_{ij})_{m\times n},\quad B=(b_{ij})_{m\times n}$$

当且仅当它们的对应元素相等时，即

$$a_{ij}=b_{ij}\quad (i=1, 2, \cdots, m;\ j=1, 2, \cdots, n)$$

时，我们称这两个矩阵相等，记作 $A=B$.

必须指出，从矩阵与行列式的记号外表来看，它们是很相类似的，但它们是两个完全不同的概念．一般的说行列式是一个数量，只是为了方便，才把它写成正方阵列外加两条垂直线的形状．至于矩阵，一般的说，它既不是一个数，也不是一个函数，而是由某些元素所排成的矩形阵列本身．例如

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

是一个二级矩阵，而行列式

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}$$

之值等于 -2. 我们说: 矩阵 A 的行列式为 -2, 记作 $|A|=-2$.

现在我们来说明线性变换(2)或

$$y_i=\sum_{k=1}^{n} a_{ik}x_k \quad (i=1, 2, \cdots, m) \tag{2'}$$

和它的矩阵

$$A=(a_{ik})_{m\times n}$$

之间存在一一对应的关系. 事实上，由线性变换(2)的系数唯一的确定一个 m 行 n 列的矩阵 A, 反之，给定了一个 m 行 n 列的矩阵 A, 就有唯一的一个以 A 为它的矩阵的线性变换(2)，因为这时最多只有表示变量的记号有差别，但这对我们来说是不重要的. 这样，线性变换和它的矩阵是密切的关联着的.

其次，讨论连续施行两个线性变换的问题. 设在线性变换(2)之后施行线性变换

$$\begin{cases} z_1=b_{11}y_1+b_{12}y_2+\cdots+b_{1m}y_m \\ z_2=b_{21}y_1+b_{22}y_2+\cdots+b_{2m}y_m \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ z_p=b_{p1}y_1+b_{p2}y_2+\cdots+b_{pm}y_m \end{cases} \tag{4}$$

或

$$z_k=\sum_{i=1}^{m} b_{ki}y_i \quad (k=1, 2, \cdots, p), \tag{4'}$$

它的对应矩阵是

$$B=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12}\cdots b_{1m} \\ b_{21} & b_{22}\cdots b_{2m} \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots \\ b_{p1} & b_{p2}\cdots b_{pm} \end{pmatrix}.$$

把(2′)中 $y_1, y_2, \cdots, y_m$ 的表示式代入(4′)，我们得到

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com