

第 18 篇 液压控制

主 编 卢长耿

主要撰稿 林少芬 卢长耿 吴根茂 魏建华 钟荣龙 黄 畚

审 稿 卢长耿 宋京其 黄效国 姬奎生

第 1 章 控制理论基础

1 控制系统的一般概念

自动控制就是用各类控制装置和仪表包括计算机代替人工，自动地、有目的地控制和操纵机器及生产设备，使之具有一定性能。随着对生产设备机械化和自动化要求的不断提高，自动控制的生产过程已成为现代化生产的必要条件之一。液压伺服系统和电力伺服系统就是这一领域中的重要组成部分。

自动控制理论是研究自动控制系统运动规律，并运用这些规律分析和设计自动控制系统的理论。控制理论根据研究对象的不同分为两大类。研究连续自动控制系统运动规律的理论，一般称为反馈控制理论；研究断续自动控制系统运动规律的理论，称为开关控制理论或逻辑控制理论。反馈控制理论的基础是线性连续反馈控制理论。

反馈控制理论包括有应用状态空间分析法为基础的现代控制理论，以及自然科学和社会科学相结合的系统理论。需要指出的是，虽然现代控制理论的发展，解决了某些“经典”控制理论所不能解决的问题，但是经典控制理论仍在工程技术中发挥着指导性的作用，相当多的问题用它来解决是非常简便而有效的。

1.1 反馈控制原理

反馈控制是实现自动控制的最基本的方法。反馈控制的基本原理是利用控制装置将被控制对象的输出信号回输到系统的输入端，并为给定值进行比较形成偏差信号，以产生对被控对象的控制作用，使系统的输出量与给定值之差保持在容许的范围之内。反馈控制的基本特征是存在负反馈过程和按偏差进行调节，图 18-1-1 为电液位置控制系统原理图，其工作原理是：工作台期望到达某一位置，这一期望位置由输入给系统的指令电压 u 给定，工作台的实际位置由位移传感器测量，测量值被转换成相应的电压 u_2 。当工作台的实际位置与期望位置相等时， $u_1 = u_2$ 。若二者有差异则将存在电压差 $\Delta u = u_1 - u_2$ ， Δu 经放大器放大并驱动电液伺服阀，经阀输出的相应油液压力和流量则驱使液压缸活塞带动工作台移动。由期望位置 and 实际位置的偏差产生的调节作用，最终实现工作台的实际位置接近于指令给定的期望位置，当某种干扰引起工作台的实际位置产生偏移时，也会由位置偏差产生调节作用，使工作台的位置恢复到原始的状态。基于反馈控制过程中信号在系统内构成一个闭合回路，所以反馈控制通常又叫闭环控制。自动控制系统也称为反馈控制系统或闭环控制系统。

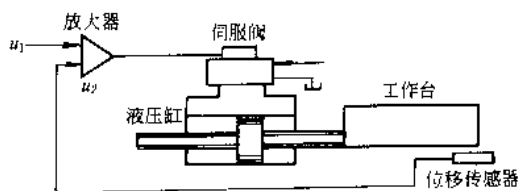


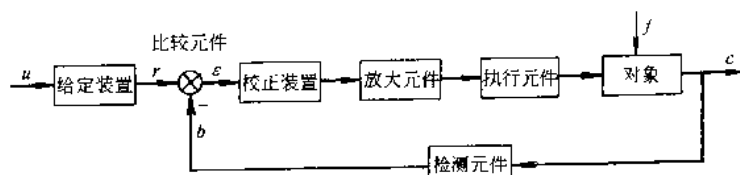
图 18-1-1 电液位置控制系统原理图

1.2 反馈控制系统的组成、类型和要求

表 18-1-1

下表职能方块图表示了一个典型的反馈控制系统一般组成、组成型式、信号传递和变换过程

基本组成



基本组成	系统中的主要信号	(1) 输入信号(指令)u 来自系统外部确定的或变化的信号,它决定着被控量的变化规律 (2) 参考输入r 比例于输入信号并与主反馈信号进行比较,r为固定值,也称给定值 (3) 主反馈信号h 它是被控制量的函数,并与参考输入进行比较以产生偏差信号 (4) 偏差信号e 参考输入与主反馈信号之差 (5) 输出信号(被控制量)c 系统中变化规律需要被检测和加以控制信号 (6) 误差信号e 系统的期望输出值与实际输出值之差 (7) 干扰信号f 除输入信号外对系统的输出产生影响的因素,它可能来自系统外部,也可以来自系统的内部
基本类型	按控制要求分	(1) 自动调节系统 其输入量为常值或随时间缓慢变化,系统的主要任务是在受到干扰时,使系统的实际输出量保持或接近于期望值 (2) 程序控制系统 其输入量的变化规律是事先确定的,系统将自动地使输出量尽可能准确地按事先给定的规律变化 (3) 伺服系统 输入量为任意的时间函数,系统应使输出量以一定的精度跟随输入量的变化而变化,若系统的输出量是位置、速度之类的机械量,工程中通常称伺服控制系统
基本类型	按其他不同特征来分	(1) 线性系统和非线性系统 线性系统是描述系统动态特性的数学方程为线性微分方程的一类系统,否则为非线性系统。线性系统满足叠加原理和均匀性定理 (2) 连续系统和离散系统 系统中各部分的信号均为连续的时间变量t的函数,称为连续系统,其运动特性可用微分方程来描述。若系统中的一处或某几处信号的形式是脉冲或数码,这类系统称为离散系统,离散控制系统运动特性可用差分方程来描述 (3) 确定系统和不确定系统 系统的结构和参数是确定和已知的,且作用于系统的输入信号(包括干扰信号)也是确定的一类系统为确定系统。若系统本身或作用于该系统的信号不确定或模糊时,则称为不确定系统 (4) 单输入单输出系统和多输入多输出系统 系统的输入和输出量各为一个称为单输入单输出系统,它只有一个主反馈信号。若系统有多个输入和输出量,则为多输入多输出系统,也称多变量系统
		一般讲,不同类型的系统的分析方法是不同的
反馈控制系统的基本要求		(1) 稳定性 系统稳定且有一定的稳定裕量 (2) 稳态精度 系统达到平衡状态后要求满足一定的准确度 (3) 动态品质 要求系统过渡过程的性能满足一定的指标 (4) 运行条件 (5) 可靠性 (6) 经济性

2 线性控制系统的数学描述

控制系统的运动特性可用一定形式的数学式来描述,通常称为系统的数学模型。在自动控制系统的分析和设计中,建立一个合理的数学模型是一项极为重要的任务。系统的数学模型可用解析法和实验法来建立。解析法是从元件或系统所依据的物理规律出发,从理论上推导出输入输出变量及内部变量之间的数学关系式。实验法是对实际系统输入一个一定形式的输入信号,根据实测的输出响应来建立系统的数学模型。

经典控制理论中描述线性控制系统的数学模型有微分方程、传递函数、函数方块图、信号流图、脉冲响应函数、阶跃响应函数和频率特性等。一个系统当采用不同的方法来分析和设计时将用到不同的数学模型。

2.1 微分方程

(1) 线性微分方程

线性元件或线性定常连续系统运动特性的数学方程是常系数线性微分方程,其一般形式为

$$a_n \frac{d^n y}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \cdots + a_1 \frac{dy}{dt} + a_0 y = b_m \frac{d^m x}{dt^m} + b_{m-1} \frac{d^{m-1} x}{dt^{m-1}} + \cdots + b_1 \frac{dx}{dt} + b_0 x \quad (18-1-1)$$

式中

x ——元件或系统的输入量;

y ——元件或系统的输出量；

$a_n, \dots, a_0, b_m, \dots, b_0$ ——由系统的结构参数决定的常系数，实际的系统，均满足 $m \leq n$ 的条件。

(2) 非线性运动方程的线性化

实际的自动控制系统中经常存在一些非线性因素，液压伺服系统中通过阀的流量特性就是非线性方程。当研究在某一工作点附近的运动特性或所研究的系统变量在动态过程中偏离平衡点不大时，可以应用线性化的方法把非线性运动方程转化为线性微分方程，称为非线性方程的线性化。线性化的目的是使某些非线性问题近似为线性问题。线性化的数学方法是将在非线性函数在某工作点展开成泰勒级数后，取其一阶近似式，并以增量的形式表示相应的变量。线性化的公式如下。设非线性函数

$$y = f(x) \quad (18-1-2)$$

其稳定工作点为 x_0, y_0 ，则线性化后的线性方程为

$$\Delta y = \left. \frac{df}{dx} \right|_{x=x_0} \Delta x \quad (18-1-3)$$

其中

$$\Delta y = y - y_0, \Delta x = x - x_0 \quad (18-1-4)$$

若非线性函数

$$y = f(x_1, x_2) \quad (18-1-4)$$

其稳定工作点为 x_{10}, x_{20} 和 y_0 ，则线性化后的线性方程为

$$\Delta y = \left. \frac{\partial f}{\partial x_1} \right|_{\substack{x_1=x_{10} \\ x_2=x_{20}}} \Delta x_1 + \left. \frac{\partial f}{\partial x_2} \right|_{\substack{x_1=x_{10} \\ x_2=x_{20}}} \Delta x_2 \quad (18-1-5)$$

其中

$$\Delta x_1 = x_1 - x_{10}, \Delta x_2 = x_2 - x_{20}, \Delta y = y - y_0$$

线性化举例，在液压伺服系统分析中，阀口的流量方程为

$$Q = Cx \sqrt{\frac{p_s - p_L}{\rho}}$$

式中 Q ——通过阀的流量；

x ——阀芯位移量或阀的开口度；

p_L ——负载压力；

p_s ——恒定的供油压力。

若阀处于某平衡状态时相应的变量为 Q_0, x_0 和 p_{L0} ，则在平衡点附近线性化后，可得线性方程为

$$\Delta Q = K_q \Delta x - K_c \Delta p_L;$$

式中 $\Delta Q = Q - Q_0$ ；

$\Delta x = x - x_0$ ；

$\Delta p_L = p_L - p_{L0}$ ；

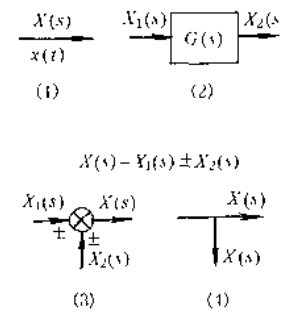
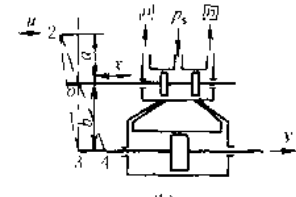
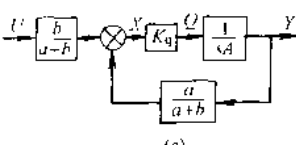
K_q ——流量增益， $K_q = \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{\substack{x=x_0 \\ p_L=p_{L0}}}$ ；

K_c ——流量压力系数， $K_c = - \left. \frac{\partial f}{\partial p_L} \right|_{\substack{x=x_0 \\ p_L=p_{L0}}}$ 。

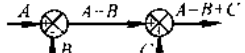
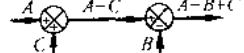
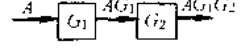
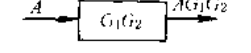
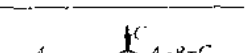
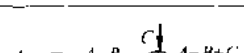
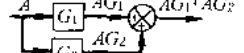
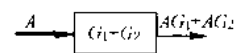
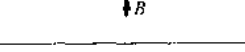
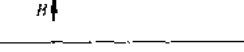
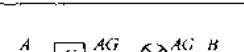
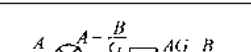
2.2 传递函数及方块图

表 18-1-2 传递函数、方块图及其等效变换

	定义及功能	表达(形)式	特点或应用
传递函数	线性定常系统，在零初始条件下，其输出量的拉氏变换式和输入量的拉氏变换式之比，称为系统的传递函数，记作 $G(s)$ 。它是经典控制理论中一个重要的概念，它	根据线性控制系统(或元件)的运动微分方程(18-1-1)，在零初始条件下对等式两边逐项进行拉氏变换 ^① ，并取 $Y(s)$ 和 $X(s)$ 的比值，可得 $G(s)$ ： $G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0}$	(1) 各项系数 $a_n, \dots, a_0, b_m, \dots, b_0$ 决定于系统的结构参数 (2) 传递函数 $G(s)$ 一般为复变量 s 的有理分式。其分母多项式所构成的方程称为系统的特征方程。方程的根称为系统的极点。分子多项式所构成方程的根称为系统的零点。

	定义及功能	表达(形)式	特点或应用
传递函数	可以用来描述元件或系统的动态特性	传递函数是在复变量 s 域内描述系统特性的数学表达式	$G(s)$ 的零、极点在复平面上的位置可以用来确定系统的稳定性和动态品质 (3) 分母多项式 s 的阶次 n , 称系统的阶。由于物理条件的限制, 实际控制系统分子多项式 s 的阶次 m 不可能大于分母多项式 s 的阶次 n , 即 $m \leq n$ (4) 传递函数的概念只适用于线性定常系统
	是描述控制系统中变量之间传递关系的数学图形, 是工程中描述复杂系统的一种简便方法	方块图的组成要素如图 a 所示:  (1) 信号线 带箭头的直线, 箭头表示信号传递的方向, 线上标注相应变量的象函数或时间函数 (2) 方块 系统中的传递函数用方块来表示。方块两侧为相应的输入量和输出量, 方块内写入输入与输出之间的传递函数, 如图中(2)。方块具有运算功能, 即 $X_2(s) = G(s)X_1(s)$ (3) 比较点 对两个以上信号进行代数运算。“+”表示信号相加,“-”表示信号相减。“+”常可省略, 如图中(3) (4) 引出点 表示信号引出和测量的位置。从同一引出点上引出的信号, 其性质和数值都是相同的。如图中(4)	图 b 为液压助力器, 是一种液压伺服机构   当在杠杆的 1 点处输入位移 u 时, 阀芯左移使阀口开启, 液压缸的活塞将向右移动并带动支点 3 向右移动, 又使控制阀阀口减小。当支点 3 移动到位置 4 时, 控制阀阀口完全关闭, 液压缸活塞停止运动。反向运动时也如此。因此, 通过操纵反馈连杆可以实现输入一定的位移 u 将使活塞移动一定的位移 y, 并实现出力放大。所以该装置具有功率放大的助力作用, 该系统的方块图如图(c)所示 (该装置由控制阀、液压缸和反馈连杆三部分组成)

即通过一定的运算法则把复杂的方块图转化成较为简单的方块图或单一方块图, 以便求取系统的传递函数。等效变换的原则是变换前后系统的输入输出之间总的传递关系保持不变

方块图的等效变换	变换方式	原来结构	等效结构	变换方式	原来结构	等效结构
	加、减点互换			环节串联		
	加、减点重排			环节并联		
	环节互换			加、减点左移		

续表

变换方式	原来结构	等效结构	变换方式	原来结构	等效结构
加、减、点、右移			分点、分点、加、减、左、边		
分点、左移			从反馈回路中移出环节		
分点、右移			简化反馈回路		

① 拉氏变换(拉普拉斯变换)参见第1篇。

2.3 控制系统的传递函数

反馈控制系统的方块图经等效变换后,一般具有如图 18-1-2 所示的典型结构。其中 $R(s)$ 、 $C(s)$ 和 $F(s)$ 分别为系统的输入量、输出量和扰动作用的象函数, $E(s)$ 和 $B(s)$ 分别为偏差信号和反馈信号的象函数, $G_1(s)$ 、 $G_2(s)$ 和 $H(s)$ 分别为系统中各信号之间的传递函数。

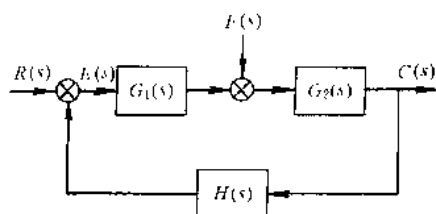


图 18-1-2 反馈控制系统的典型方块图

应用叠加原理,反馈控制系统的传递函数可以分别表示为下列函数。

(1) 控制输入作用下的闭环传递函数 $\Phi(s)$

控制输入作用下的闭环传递函数是指假定扰动作用 $F(s) = 0$ 时,系统的输出量 $C(s)$ 和输入量 $R(s)$ 之间的传递函数,对于图 18-1-2,有

$$\Phi(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{G_1(s)G_2(s)}{1 + G_1(s)G_2(s)H(s)} \quad (18-1-6)$$

(2) 扰动作用下的闭环传递函数 $\Phi_f(s)$

扰动作用下的闭环传递函数是指假定控制输入 $R(s) = 0$ 时系统的输出量 $C(s)$ 和扰动作用 $F(s)$ 之间的传递函数。对于图 18-1-2,有

$$\Phi_f(s) = \frac{C(s)}{F(s)} = \frac{G_2(s)}{1 + G_1(s)G_2(s)H(s)} \quad (18-1-7)$$

(3) 闭环系统的开环传递函数 $G_k(s)$

闭环系统的开环传递函数等于反馈控制系统中前向通路的传递函数和反馈通路传递函数的乘积,对于图 18-1-2,有

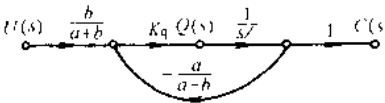
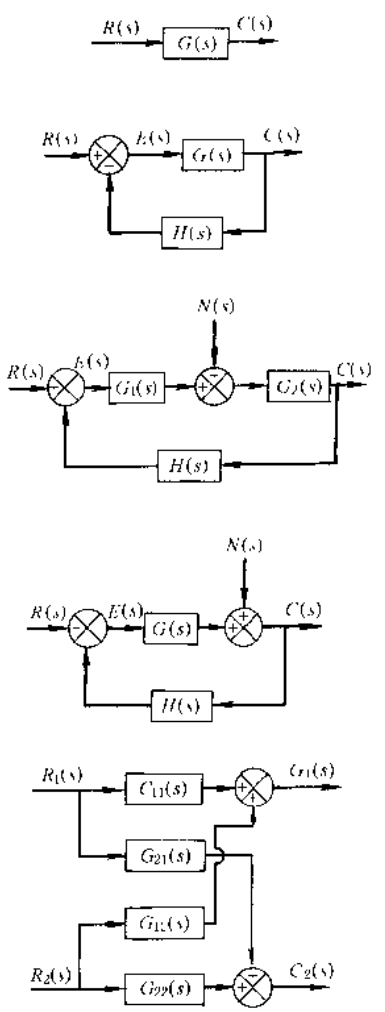
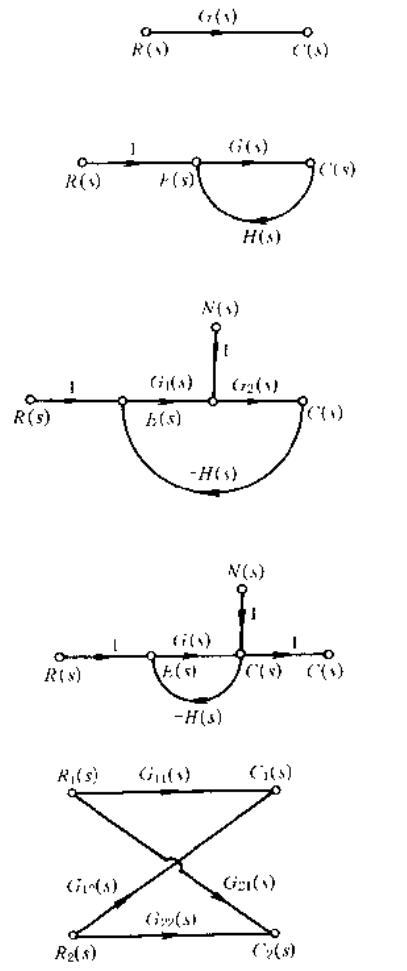
$$G_k(s) = G_1(s)G_2(s)H(s) \quad (18-1-8)$$

开环传递函数是反馈控制系统分析和设计的一个十分有用的概念。在反馈控制系统的分析中还有误差传递函数。

2.4 信号流图及梅逊增益公式

2.4.1 信号流图和方块图的对应关系

表 18-1-3

	定义、功能	表 达 形 式	图中的专门术语
信 号 流 图	是另一种以图解的形式来描述控制系统中传递关系的数学图形。在控制系统的计算机模拟及状态空间分析中,利用信号流图较为方便	信号流图是由节点和支路所组成的信号传递网路。节点用“○”表示,它代表系统中的变量。支路是两个节点之间的定向线段,支路上的箭头表示信号的传递方向,在两变量之间的传递函数称为支路的增益。下图为表 18-1-2 图 c 所示的液压助力器的信号流图 	(1) 输入节点(或源点) 只有输出支路无输入支路的节点,如左图中的 $U(s)$ (2) 输出节点(或阱点) 只有输入支路无输出支路的节点,如左图中的 $C(s)$ (3) 混合节点 既有输入支路,又有输出支路的节点,如左图中的 $Q(s)$ (4) 前向通路 从输入节点开始沿各相连支路到输出节点的通道 (5) 回路 从一个节点开始又回到该节点的通道 (6) 前向通路增益 前向通路中,各支路增益的乘积 (7) 回路增益 回路中各支路的增益的乘积 (8) 不接触回路 没有任何公共节点的两个或两个以上回路
信 号 流 图 和 方 块 图 的 对 应 关 系	信号流图和方块图是相似的,两者一一对应。右图给出了相互对应的例子	方 块 图 	相对应的信号流图 

2.4.2 梅逊增益公式

梅逊增益公式可用来计算输入节点和输出节点之间的总增益，即系统的传递函数。梅逊公式为

$$P = \frac{1}{\Delta} \sum_{k=1}^n P_k \Delta_k \quad (18-1-9)$$

式中 P ——输入节点和输出节点之间的总增益；

n ——前向通路的条数；

P_k ——第 k 条前向通路的增益；

Δ ——信号流图的特征式，

$$\Delta = 1 - \sum_a L_a + \sum_{bc} L_b L_c - \sum_{def} L_d L_e L_f + \cdots$$

$\sum_a L_a$ ——流图中每一个回路的增益之和；

$\sum_{bc} L_b L_c$ ——流图中每两个互不接触回路增益乘积之和；

$\sum_{def} L_d L_e L_f$ ——流图中每三个互不接触回路增益乘积之和；

Δ_k ——第 k 条前向通路特征式的余子式，它等于在 Δ 式中除去与第 k 条通路相接触的回路增益后的特征式。

例 控制系统信号流图如图 18-1-3 所示，计算其总增益。

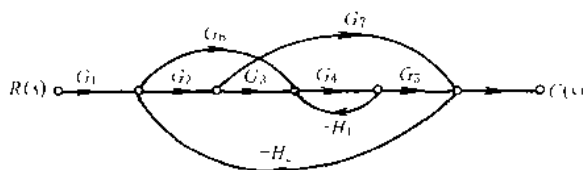


图 18-1-3

本例中输入量为 $R(s)$ ，输出量 $C(s)$ ，其间有三条前向通路。各前向通路的增益为

$$P_1 = G_1 G_2 G_3 G_4 G_5$$

$$P_2 = G_1 G_6 G_4 G_5$$

$$P_3 = G_1 G_2 G_7$$

四个独立的回路增益为

$$L_1 = -G_4 H_1$$

$$L_2 = -G_2 G_7 H_2$$

$$L_3 = -G_6 G_4 G_5 H_3$$

$$L_4 = -G_2 G_3 G_4 G_5 H_4$$

本例中回路 L_1 和 L_2 不相接触，其他回路都相互接触。不相接触回路的增益为

$$L_1 L_2 = G_2 G_4 G_7 H_1 H_2$$

流图的特征式 Δ 为

$$\begin{aligned} \Delta &= 1 - (L_1 + L_2 + L_3 + L_4) + L_1 L_2 \\ &= 1 + G_4 H_1 + G_2 G_7 H_2 + G_6 G_4 G_5 H_3 + G_2 G_1 G_4 G_5 H_2 + G_2 G_4 G_7 H_1 H_2 \end{aligned}$$

P_1 通路中除去与其相接触的回路 L_1 , L_2 , L_3 , L_4 和 $L_1 L_2$ 后，余子式 Δ_1 为

$$\Delta_1 = 1$$

P_2 通路中除去与其相接触的回路 L_1 , L_2 , L_3 , L_4 和 $L_1 L_2$ 后，余子式 Δ_2 为

$$\Delta_2 = 1$$

P_3 通路中除去与其相接触的回路 L_2 , L_3 , L_4 和 $L_1 L_2$ 后，余子式 Δ_3 为

$$\Delta_3 = 1 - L_1$$

信号流图的总增益 P 为

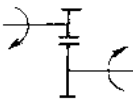
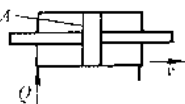
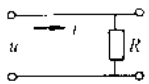
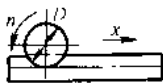
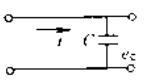
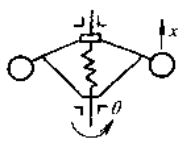
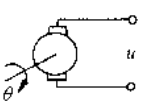
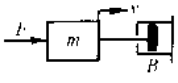
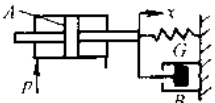
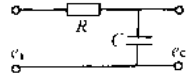
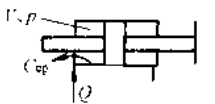
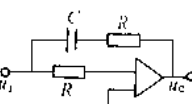
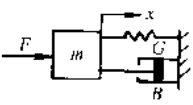
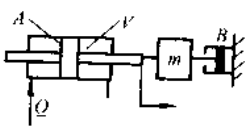
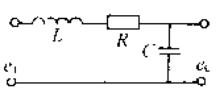
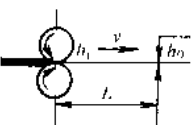
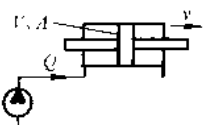
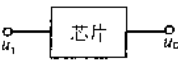
$$P = \frac{1}{\Delta} (P_1 \Delta_1 + P_2 \Delta_2 + P_3 \Delta_3) = \frac{G_1 G_2 G_3 G_4 G_5 + G_1 G_6 G_4 G_5 + G_1 G_2 G_7 (1 + G_4 H_1)}{1 + G_4 H_1 + G_2 G_7 H_2 + G_6 G_4 G_5 H_3 + G_2 G_1 G_4 G_5 H_2 + G_2 G_4 G_7 H_1 H_2}$$

2.5 机、电、液系统中的典型环节

任何复杂的控制系统的数学模型,可以划分成一些简单基本的微分方程或传递函数,这些基本的数学描述称为系统的典型环节。典型环节是系统的动态特性描述,它与组成系统的基本元件是不同的概念,表 18-1-4 列出了机、液和电系统中相应的典型环节和传递函数。

表 18-1-4

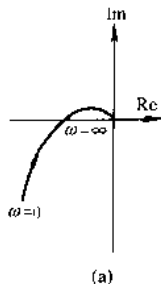
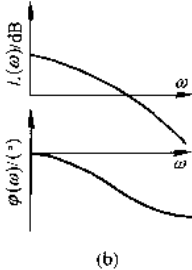
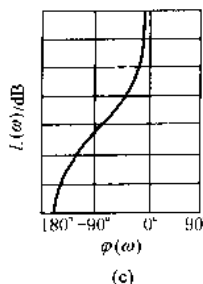
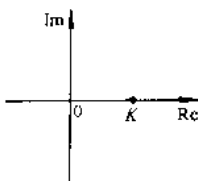
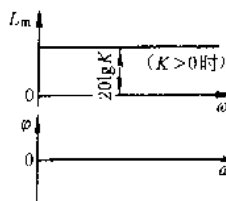
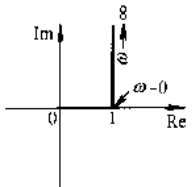
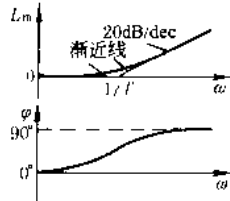
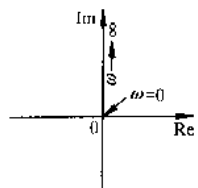
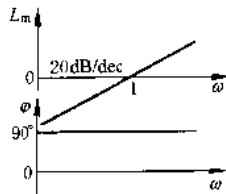
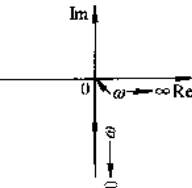
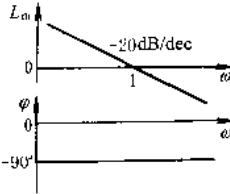
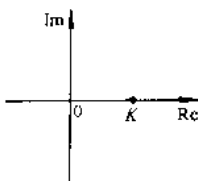
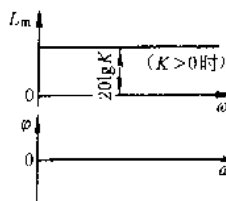
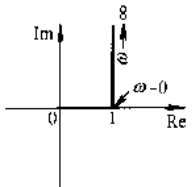
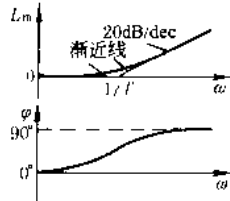
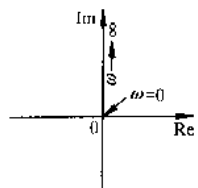
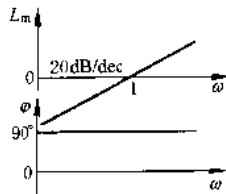
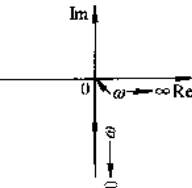
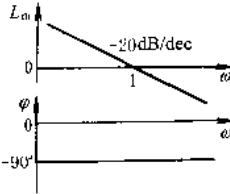
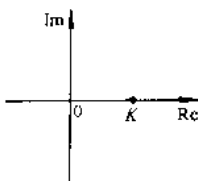
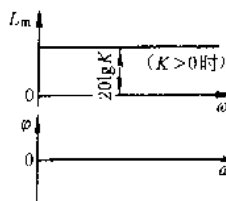
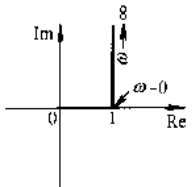
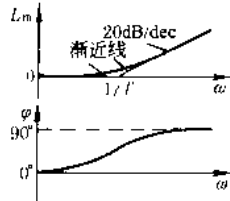
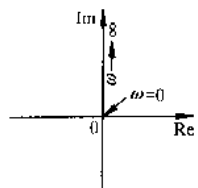
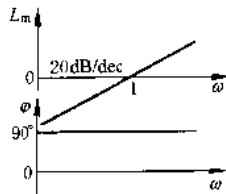
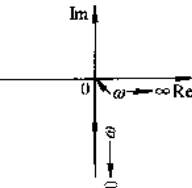
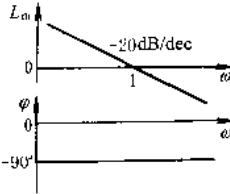
典型环节实例及其传递函数

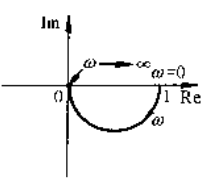
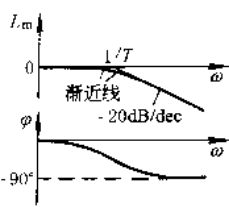
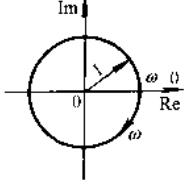
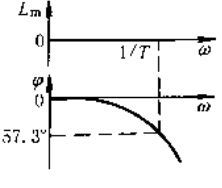
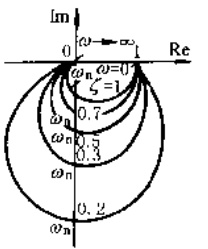
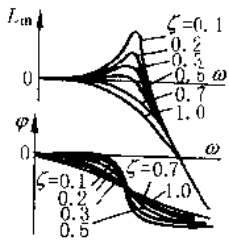
名称及传递函数	机 械 例	液 压 例	电 例
比例环节 $G(s) = K$	 $K = \frac{1}{l}$	 $K = \frac{1}{A}$	 $K = \frac{1}{R}$
积分环节 $G(s) = \frac{K}{s}$	 $K = \pi D$	 $K = \frac{1}{A}$	 $K = \frac{1}{C}$
微分环节 $G(s) = Ks$	 $K = \frac{1}{l}$	 $K = \frac{V}{\beta_c}$	 $K = K_L$
惯性环节 $G(s) = \frac{K}{Ts + 1}$	 $K = \frac{1}{B} \quad T = \frac{m}{B}$	 $K = \frac{A}{G} \quad T = \frac{B}{G}$	 $K = 1 \quad T = RC$
一阶微分环节 $G(s) = K(Ts + 1)$		 $K = C_{ep} \quad T = \frac{V}{\beta_c C_{ep}}$	 $K = 1 \quad T = RC$
振荡环节 $G(s) = \frac{K}{s^2 + \frac{2\zeta}{\omega}s + 1}$	 $K = \frac{1}{G} \quad \omega = \sqrt{\frac{G}{m}} \quad \zeta = \frac{\beta}{\sqrt{mG}}$	 $K = \frac{1}{A} \quad \omega = \sqrt{\frac{4\beta_c A^2}{Vm}} \quad \zeta = \frac{B}{4A\sqrt{\frac{V}{\beta_c m}}}$	 $K = 1 \quad \omega = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad \zeta = \frac{RC}{2\sqrt{LC}}$
延迟环节 $G(s) = Ke^{-\tau s}$	 $K = 1 \quad \tau = \frac{l}{v}$	 $K = \frac{1}{A} \quad \tau = \frac{V}{Q}$	 $K = 1 \quad \tau = \frac{V}{Q}$

2.6 频率特性

2.6.1 频率特性的定义、求法及表示方法

表 18-1-5

	线性控制系统的输入端输入正弦信号后,其输出量的稳态分量是同频率的正弦信号,但幅值和相位将随输入频率而变化。系统的频率特性就是其输出量稳态分量的复数符号与输入函数复数符号的比,记为 $G(j\omega)$ $G(j\omega) = \frac{\dot{y}(t)}{\dot{x}(t)} = \frac{Y e^{j\varphi_y}}{X e^{j\varphi_x}} = \frac{Y}{X} e^{j(\varphi_y - \varphi_x)}$ 式中 Y, X——稳态分量和输入函数的幅值; φ_y, φ_x——稳态分量和输入函数的相位。 频率特性的模等于输出稳态分量的幅值和输入函数的幅值比,称为系统的幅频特性,记为 $A(\omega)$。频率特性的幅角等于稳态分量和输入函数之间的相位差,称为系统的相频特性,记为 $\varphi(\omega)$。因此,频率特性是幅频特性和相频特性的统称,即 $G(j\omega) = A(\omega) e^{j\varphi(\omega)}$ 频率特性是线性控制系统数学模型的另一类形式,是用频率法分析和设计自动控制系统的重要工具																		
求取方法	微分方法 以正弦函数作为系统的输入信号,求解系统输出的稳态分量,最后取二者的复数比 传递函数法 即取 $G(j\omega) = G(s) _{s=j\omega}$ 实测方法 在系统或元件的输入端输入一定幅值且频率由小逐渐增大的正弦信号。利用频率测定仪测出对应于每一频率情况下的稳态输出和输入信号之间的幅值比和相位差。由此来确定系统或元件的频率特性																		
图示方法	幅相频率特性图(又称奈魁斯特图)  (a) 它是在复平面上,描绘出当频率由零变化到无限大时, $G(j\omega)$ 的极坐标图 对数频率特性图(又称波德图)  (b) 它是由对数幅频特性和对数相频特性两张图组成。分别绘制在半对数坐标纸上。 对数幅相频率特性图(又称尼柯尔斯图)  (c) 它以频率作为参变量,在直角坐标系中绘出对数幅频特性和相位之间的关系																		
典型环节的频率特性	<table><tr><td>名称</td><td>奈氏图</td><td>波德图</td><td>名称</td><td>奈氏图</td><td>波德图</td></tr><tr><td>比例环节</td><td></td><td></td><td>一阶微分环节</td><td></td><td></td></tr><tr><td>微分环节</td><td></td><td></td><td>积分环节</td><td></td><td></td></tr></table>	名称	奈氏图	波德图	名称	奈氏图	波德图	比例环节			一阶微分环节			微分环节			积分环节		
名称	奈氏图	波德图	名称	奈氏图	波德图														
比例环节			一阶微分环节																
微分环节			积分环节																

	名称	奈氏图	波德图	名称	奈氏图	波德图
	惯性环节			延迟环节		
典型环节的频率特性	振荡环节					
			$\zeta=0.1$ 0.2 0.3 0.5 0.7 1.0 $\zeta=0.7$ 0.1 0.2 0.3 0.5	谐振频率 $\omega_r = \omega_0 \sqrt{1-2\zeta^2}$ 谐振峰值 $M_r = \frac{1}{2\zeta \sqrt{1-\zeta^2}}$		

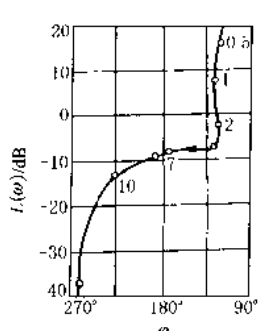
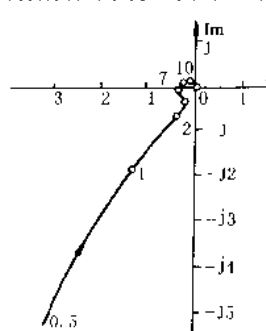
注: dec 为十倍频程。

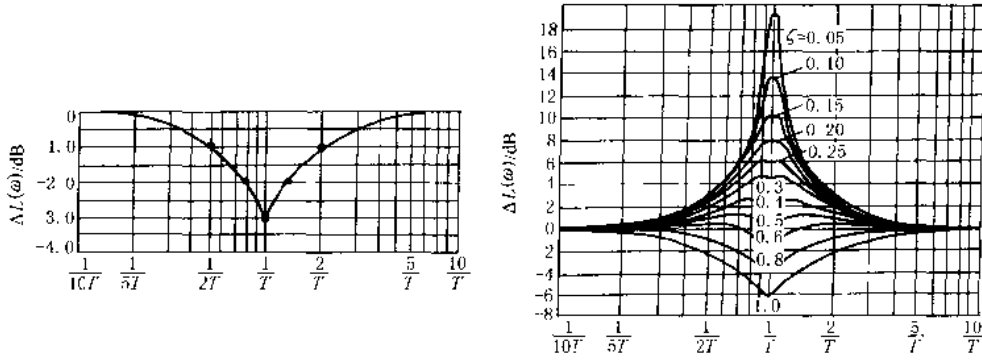
2.6.2 开环波德图、奈氏图和尼柯尔斯图的绘制

表 18-1-6

开环波德图、奈氏图和尼柯尔斯图的绘制

绘制步骤	举 例
1. 绘制系统的波德图	试绘制出以下系统的波德图、奈奎斯特图和尼柯尔斯图 $G(s) = \frac{64(s+2)}{s(s+0.5)(s^2+3.2s+64)}$
(1) 绘制波德图时先将 $G(j\omega)$ 改写成典型环节乘积形式	将 $G(s)$ 变换成典型环节乘积形式 $G(s) = \frac{4\left(\frac{1}{2}s+1\right)}{s(2s+1)\left(\frac{1}{64}s^2+\frac{2\times 0.2}{8}s+1\right)}$ 其频率特性为 $G(j\omega) = \frac{4\left(\frac{j\omega}{2}+1\right)}{j\omega(j2\omega+1)\left[-\left(\frac{\omega}{8}\right)^2+j2\times 0.2\left(\frac{\omega}{8}\right)+1\right]}$
(2) 求出相应典型环节的转角频率	随频率的增加依次出现的典型环节和相应的转角频率 ω 为 比例积分环节 $4/j\omega$ 惯性环节 $1/(j2\omega+1)$, $\omega_1=0.5\text{rad/s}$ 一阶微分环节 $j\omega/2+1$, $\omega_2=2\text{rad/s}$ 振荡环节 $1/\left[-\left(\frac{\omega}{8}\right)^2+j2\times 0.2\left(\frac{\omega}{8}\right)+1\right]$, $\omega_3=8\text{rad/s}$ $(\zeta=0.2)$

绘制步骤	半 例																																																																					
(3) 随着频率的增加,以比例环节(或比例积分和比例微分环节)开始在半对数坐标纸上依次在各转角频率之间绘出相应的对数幅频特性的渐近直线 绘制相频特性时,先绘制出各典型环节的相频特性,然后根据各典型环节的相频曲线在各频率处的相位叠加,得到系统的相频特性 (4) 最后通过修正渐近线得到精确的对数幅频曲线	各典型环节的对数幅频特性渐近线的特征																																																																					
	典型环节	$\omega/\text{rad}\cdot\text{s}^{-1}$	对数幅频渐近线特征	相频特性																																																																		
	$\frac{4}{j\omega}$	无	一条斜率为 $-20\text{dB}/\text{dec}$ 的直线与 ω 轴相交于 $\omega = 4$ 处	恒等于 -90°																																																																		
	$\frac{1}{j2\omega + 1}$	$\omega_1 = 0.5$	$\omega < \omega_1$ 时为零分贝的直线 $\omega \geq \omega_1$ 时为一条斜率为 $-20\text{dB}/\text{dec}$ 的直线,交 ω 轴于 $\omega = 0.5\text{rad/s}$ 处	在 $0^\circ \sim 90^\circ$ 之间变化, $\omega = \omega_1$ 时 $\varphi(\omega_1) = -45^\circ$																																																																		
	$\frac{j\omega}{2} + 1$	$\omega_2 = 2$	$\omega < \omega_2$ 时为零分贝的直线 $\omega \geq \omega_2$ 时为一条斜率为 $20\text{dB}/\text{dec}$ 的直线,交 ω 轴于 $\omega = 2\text{rad/s}$ 处	在 $0^\circ \sim 90^\circ$ 之间变化, $\omega = \omega_2$ 时 $\varphi(\omega_2) = 45^\circ$																																																																		
	$-\left(\frac{\omega}{2}\right)^2 + j2 \times 0.2 \times \left(\frac{\omega}{8}\right) + 1$	$\omega_3 = 8$ ($\zeta = 0.2$)	$\omega < \omega_3$ 时为零分贝的直线 $\omega \geq \omega_3$ 时为一条斜率为 $-40\text{dB}/\text{dec}$ 的直线,交 ω 轴于 $\omega = 8\text{rad/s}$ 处	在 $0^\circ \sim -180^\circ$ 之间变化, $\omega = \omega_3$ 时 $\varphi(\omega_3) = -90^\circ$																																																																		
	在半对数坐标纸上随着频率的增大,依次将上表中的典型环节的对数幅频渐近线斜率进行叠加,得到 $G_j(\omega)$ 的对数幅频特性渐近线。各典型环节的对数相频特性叠加,可得到系统的对数相频特性如图 a 按各典型环节的对数幅频特性进行修正,可得到如图 a 的精确对数幅频特性^①																																																																					
	根据图 a 可依次求出各频率值时的幅值和相位,如下表 <table><tr><th>频率/$\text{rad}\cdot\text{s}^{-1}$</th><th>0</th><th>0.5</th><th>1</th><th>2</th><th>4</th><th>7</th><th>8</th><th>10</th><th>20</th><th>∞</th></tr><tr><td>增益 $L(\omega)$</td><td>∞</td><td>15.3</td><td>7.3</td><td>-2.6</td><td>-8.6</td><td>-8.6</td><td>-9.3</td><td>-13</td><td>-37.3</td><td>$-\infty$</td></tr><tr><td>相位 $\varphi(\omega)$</td><td>-90°</td><td>-123°</td><td>-127.5°</td><td>-124.5°</td><td>-127.5°</td><td>-175.5°</td><td>-196.5°</td><td>-225°</td><td>-263°</td><td>-270°</td></tr><tr><td>幅值 $A(\omega)$</td><td>∞</td><td>5.8</td><td>2.3</td><td>0.74</td><td>0.37</td><td>0.37</td><td>0.34</td><td>0.22</td><td>0.14</td><td>0</td></tr><tr><td>$o(\omega) = A(\omega)\cos\varphi(\omega)$</td><td>0</td><td>-3.16</td><td>-1.40</td><td>-0.42</td><td>-0.22</td><td>-0.37</td><td>-0.33</td><td>-0.16</td><td>-0.02</td><td>0</td></tr><tr><td>$Q(\omega) = A(\omega)\sin\varphi(\omega)$</td><td>$-\infty$</td><td>-4.86</td><td>-1.80</td><td>-0.60</td><td>-0.29</td><td>-0.03</td><td>0.10</td><td>0.16</td><td>0.14</td><td>0</td></tr></table>				频率/ $\text{rad}\cdot\text{s}^{-1}$	0	0.5	1	2	4	7	8	10	20	∞	增益 $L(\omega)$	∞	15.3	7.3	-2.6	-8.6	-8.6	-9.3	-13	-37.3	$-\infty$	相位 $\varphi(\omega)$	-90°	-123°	-127.5°	-124.5°	-127.5°	-175.5°	-196.5°	-225°	-263°	-270°	幅值 $A(\omega)$	∞	5.8	2.3	0.74	0.37	0.37	0.34	0.22	0.14	0	$o(\omega) = A(\omega)\cos\varphi(\omega)$	0	-3.16	-1.40	-0.42	-0.22	-0.37	-0.33	-0.16	-0.02	0	$Q(\omega) = A(\omega)\sin\varphi(\omega)$	$-\infty$	-4.86	-1.80	-0.60	-0.29	-0.03	0.10	0.16	0.14	0
频率/ $\text{rad}\cdot\text{s}^{-1}$	0	0.5	1	2	4	7	8	10	20	∞																																																												
增益 $L(\omega)$	∞	15.3	7.3	-2.6	-8.6	-8.6	-9.3	-13	-37.3	$-\infty$																																																												
相位 $\varphi(\omega)$	-90°	-123°	-127.5°	-124.5°	-127.5°	-175.5°	-196.5°	-225°	-263°	-270°																																																												
幅值 $A(\omega)$	∞	5.8	2.3	0.74	0.37	0.37	0.34	0.22	0.14	0																																																												
$o(\omega) = A(\omega)\cos\varphi(\omega)$	0	-3.16	-1.40	-0.42	-0.22	-0.37	-0.33	-0.16	-0.02	0																																																												
$Q(\omega) = A(\omega)\sin\varphi(\omega)$	$-\infty$	-4.86	-1.80	-0.60	-0.29	-0.03	0.10	0.16	0.14	0																																																												
2. 根据波德图绘制其他二图 根据波德图求取各频率下的幅值和相位,即可方便地绘制出相应的奈氏图和尼柯尔斯图,如图 b 和 c 所示 对渐近线进行幅值修正时,惯性环节和 - 阶微分环节可按图 d 求取修正量。振荡环节和二阶微分环节可按图 e 求取修正量。总的幅值修正量等于在各频率处修正量的代数和	根据上表可分别绘出系统的奈氏图 b 和尼柯尔斯图 c 																																																																					

绘制步骤	举 例
3. 修正渐近线用图	 (d) (e)

① 波德图可以用计算机来绘制。

2.7 单位脉冲响应函数和单位阶跃响应函数

利用系统的单位脉冲响应函数或单位阶跃响应函数可以求取系统在任何其他形式输入条件下的系统响应。同时系统的单位脉冲响应函数和单位阶跃响应函数还反映了系统本身的固有特性。因此它们也都是描述系统动态特性的重要数学工具。

(1) 单位脉冲响应函数

当系统受到一个单位脉冲函数 $\delta(t)$ 输入作用时,其输出函数 $g(t)$ 称为单位脉冲响应函数,又称权函数。

$$g(t) = L^{-1}[G(s)] \quad (t \geq 0) \quad (18-1-10)$$

式中 $G(s)$ ——系统的传递函数。

系统的 $g(t)$ 已知时,系统对其他任何输入函数 $x(t)$ 的响应 $y(t)$ 可用 Duhamel 公式求出:

$$y(t) = \int_0^t g(\tau) x(t - \tau) d\tau \quad (t \geq 0) \quad (18-1-11)$$

(2) 单位阶跃响应函数

当系统受到一阶单位阶跃函数 $1(t)$ 输入作用时,其输出函数 $h(t)$ 称为单位阶跃响应函数。它等于

$$h(t) = \int_0^t g(\tau) d\tau \quad (18-1-12)$$

式中 $g(t)$ ——系统的单位脉冲响应函数。

若系统的 $h(t)$ 已知时,系统对其他任何输入函数 $x(t)$ 的响应 $y(t)$ 可由 Duhamel 公式求出:

$$y(t) = x(0)h(t) + \int_0^t h(t - \tau) \frac{dx(\tau)}{d\tau} d\tau \quad (t \geq 0)$$

例 已知系统的单位阶跃响应函数 $h(t) = \frac{1}{K}(1 - \cos\omega t)$,当 $t=0$ 时输入 $x(t) = A\sin\phi t$,则系统的输出响应函数为

$$y(t) = \int_0^t \frac{1}{K} [1 - \cos\omega(t - \tau)] A\phi \cos\phi t d\tau$$

积分后得

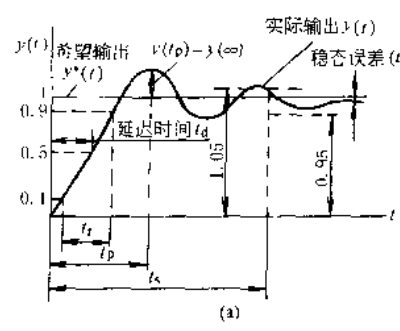
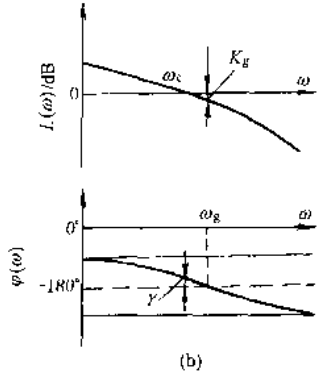
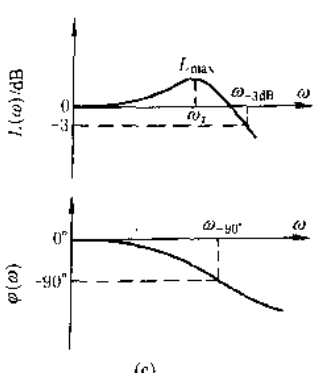
$$y(t) = \frac{A}{K(1 - \phi^2)} \left(\sin\phi t - \frac{\phi}{\omega} \sin\omega t \right)$$

3 线性控制系统的性能指标

自动控制系统首先应该是稳定的。在保证系统稳定的条件下,还应进一步衡量系统的工作质量,以判别系统是否满足生产实际所提出的各项要求。评价系统性能的标准就是相应的各项性能指标,大体上分四类,如表 18-1-7。

表 18-1-7

控制系统的主要性能指标与要求

指标	主要内容	要求
时域动态指标	一般是指系统在单位阶跃输入作用下,其输出响应的形状所反应出来的特征值,如图 a,主要是:  上升时间 t_r 响应曲线从稳态值的 10% 上升到 90% 所需时间 峰值时间 t_p 响应曲线达到过调量的第一个峰值所需时间 超调量 σ_p 响应曲线的最大过调量与稳态值之比的百分数 $\sigma_p = \frac{y(t_p) - y(\infty)}{y(\infty)} \times 100\%$ 调节时间 t_s 响应曲线衰减到与稳态值之差不超过稳态值的 $\pm 5\%$ (或 $\pm 2\%$) 时所需时间	$< 30\text{ms}$ $\sigma_{p\max} < 25\%$ $< 80\text{ms}$
	实际的控制系统分析中还会依据具体的情况对动态指标提出其他要求,如过渡过程中的振荡次数、单调无超调响应以及扰动输入作用下的性能评价等	
频域动态指标	相当多的控制系统常用频域动态指标来衡量系统的过渡过程品质。频域动态指标有开环频域指标和闭环频域指标。前者是根据开环波德图来确定系统性能的特征值,后者是根据闭环波德图来确定系统性能的特征值  增益交界频率 ω_c 开环波德图上幅频特性的增益 $L=0$ 处的频率值 相位裕量 γ 在 ω_c 处的开环相频特性与 -180° 线的相位差,即 $\gamma = 180^\circ + \varphi(\omega_c)$ 增益裕量 K_g 在相位等于 -180° 时的频率 ω_g 处(称相位交界频率)幅频特性增益的相反数,即 $K_g = -L(\omega_g)(\text{dB})$	$30^\circ \sim 60^\circ$ $> 8\text{dB}$
	 谐振频率 ω_r 闭环波德图上幅频特性的增益为最大值 $L_{\max}$ 处的频率值 谐振峰值 M_r 对应于 $L_{\max}$ 的闭环频率特性的幅值 截止频率 ω_b 在闭环波德图上,当幅频特性的增益值下降到零频率处增益值以下 3dB 时所对应的频率 -3dB 带宽 $\omega_{-3\text{dB}}$ 零到截止频率 ω_b 之间的频率范围 -90° 带宽 ω_{-90° 在闭环波德图上,零频率到相频特性等于 -90° 处所对应频率的频率范围	$> 300\text{rad/s}$ < 1.04 $0 \sim 400\text{rad/s}$ $0 \sim 350\text{rad/s}$

$$\begin{array}{c|cccc}
 s^n & a_n & a_{n-2} & a_{n-4} & a_{n-6} \cdots \\
 s^{n-1} & a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} & a_{n-7} \cdots \\
 s^{n-2} & b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \cdots \\
 s^{n-3} & c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \cdots \\
 \vdots & \vdots & & & \\
 s^0 & \cdots & & &
 \end{array}$$

其中

$$\begin{aligned}
 b_1 &= -\frac{1}{a_{n-1}} \begin{vmatrix} a_n & a_{n-2} \\ a_{n-1} & a_{n-3} \end{vmatrix} \\
 b_2 &= -\frac{1}{a_{n-1}} \begin{vmatrix} a_n & a_{n-4} \\ a_{n-1} & a_{n-5} \end{vmatrix} \\
 b_3 &= -\frac{1}{a_{n-1}} \begin{vmatrix} a_n & a_{n-6} \\ a_{n-1} & a_{n-7} \end{vmatrix} \\
 &\cdots \\
 c_1 &= -\frac{1}{b_1} \begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \\
 c_2 &= -\frac{1}{b_1} \begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-5} \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} \\
 c_3 &= -\frac{1}{b_1} \begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-7} \\ b_1 & b_4 \end{vmatrix} \\
 &\cdots
 \end{aligned}$$

表中各行元素均计算到全部为零为止。

劳斯判据：若表中第一列元素（ $a_n, a_{n-1}, b_1, c_1 \cdots$ ）不为零且均为正，则系统稳定；否则，系统不稳定。第一列元素符号改变的次数表示系统的特征方程根中不稳定根的数目。

四阶以下系统劳斯稳定判据可以简化如表 18-1-8 所示。

表 18-1-8 低阶系统劳斯稳定判据

阶次	系统闭环传递函数	稳定的充要条件
1	$\Phi(s) = \frac{M(s)}{a_1 s + a_0}$	$a_1 > 0, a_0 > 0$
2	$\Phi(s) = \frac{M(s)}{a_2 s^2 + a_1 s + a_0}$	$a_2 > 0, a_1 > 0, a_0 > 0$
3	$\Phi(s) = \frac{M(s)}{a_3 s^3 + a_2 s^2 + a_1 s + a_0}$	$a_3 > 0, a_2 > 0, a_1 > 0, a_0 > 0, a_2 a_1 > a_3 a_0$
4	$\Phi(s) = \frac{M(s)}{a_4 s^4 + a_3 s^3 + a_2 s^2 + a_1 s + a_0}$	$a_4 > 0, a_3 > 0, a_2 > 0, a_1 > 0, a_0 > 0, a_3 a_2 - a_4 a_1 > 0, a_3 a_2 a_1 - a_4 a_1^2 - a_3^2 a_0 > 0$

劳斯表中元素计算时，可能会出现第一列为零元素或全零行的情况，此时劳斯表的计算需参阅专门文献。

(2) 奈魁斯特稳定判据

奈魁斯特稳定判据是一种频率准则，它利用系统的开环频率特性来判别闭环系统是否稳定。奈魁斯特稳定判据如下：

① 若系统的开环传递函数没有正实部的极点（ $P=0$ ），当频率 ω 由 $-\infty$ 变化到 ∞ 时，开环频率特性 $G_k(j\omega)$ 不包围复平面上的 $(-1, j0)$ 点则系统稳定，否则系统不稳定；

② 若系统的开环传递函数有 P 个极点具有正实部，当频率 ω 由 $-\infty$ 变化到 ∞ 时开环频率特性 $G_k(j\omega)$ 逆时针方向包围 $(-1, j0)$ 点 P 圈时系统稳定，否则系统不稳定。