初中学生数学课外阅读系列

# FAN ZHENG FA

FANZHENGFA

# 反证法

孙玉清 编著

上海教育出版社

初中学生数学课外阅读系列

# 反 证 法

孙玉清 编著

上 海 教 育 出 版 社

初中学生数学课外阅读系列　　反　证　法

孙玉清　编著

上海世纪出版集团
上 海 教 育 出 版 社　出版发行
（上海永福路 123 号）

各地新华书店经销　　上海市印刷三厂印刷

开本787×1092　1/32　印张3.25　插页1　字数66,000

1986 年 10 月第 1 版　2000 年 6 月第 7 次印刷

印数 35,501—40,500 本

ISBN 7-5320-5337-7/G・5579　　定价：3.40 元

# 序

在中学阶段，数学是很重要的课程，对于提高学生的文化素质，有极大的作用．学生将来无论从事哪一种职业，都需要打好数学基础，有好的数学修养，更不必说从事理工科、经济管理方面的专门工作了．

怎样学好初中数学？课堂学习是最重要的一个环节，练习一定数量的习题也是完全必要的．但是现在有一种倾向，认为题目做得越多越好，越难越好；又有一种倾向，认为课外再要请老师辅导，老师辅导得越多越好．这样不仅造成学生课业负担过重，而且会影响学生智力的发展．

我认为要想学好数学(其他学科也如此)，培养自学能力和思考能力最为重要，即使在初中阶段，能使学生有自行阅读课外读物的能力是很重要的事，特别对那些学习较好的同学，尤其如此．任课教师最好在提高课堂教学的同时，留一些时间让学生自学，启发学生思考，这样也就能进一步提高学生的兴趣和水平．因此好的课外读物就显得非常重要了．

上海教育出版社出版了《初中学生数学课外阅读系列》，内含10本小册子：《漫游勾股世界》、《绝对值》、《多项式的乘法和因式分解》、《怎样列方程解应用题》、《怎样解不等式》、《怎样用配方法解题》、《面积关系帮你解题》、《怎样添辅助线》、《根与系数的关系及其应用》、《反证法》．这些专题是中学数学中极其重要的基本内容，并且是初等数学的基础．这些专题有的注重于与横向知识的联系，以培养初中学生初

步运用知识解决问题的综合能力；有的适当介绍了知识的自身发展并注重于与后续内容的联系，以便让学生领略数学知识的应用和作用。例如《面积关系帮你解题》，看来似乎只是讲几何的，其实却蕴含着许多三角、代数的内容．又如《根和系数关系及其应用》，从二次方程的判别式和韦达定理出发，引出了许多几何和代数的问题，还包含了解析几何的思想．这套丛书还将趣味性寓于知识性之中，例如《漫游勾股世界》中，有许多有趣的故事和问题．总之，这是一套开拓学生视野，训练学生思维，为学生终身受益的一套课外读物．这套书由专家和有经验的教师所撰写，所以质量是有保证的．初中学生如果能够读懂其中的某些分册或某些部分，就会得到很多益处．

胡和生

于复旦大学数学所

1995.5.

# 目 录

# 一、什么是反证法

## 1. 反证法是一种重要的证明方法

一次数学课外小组活动，辅导老师向同学们提出一个问题："我校初中学生共有四百人，请你证明，这些学生中至少有两个学生在同一天过生日．"大家都觉得这个题目很有意思，但不知怎样证明．在老师的启发下，找到了解答方法．这个解答方法是：假设四百个学生中任何两个学生都不在同一天过生日，那么四百人就需要有四百个不同的生日——也就是四百天．但是一年只有三百六十五天（闰年三百六十六天），这就出现了时间上的矛盾．这个矛盾来源于开始的假设，因此，至少有两个学生在同一天过生日．

1589 年，伟大的科学家伽利略，为了推翻古希腊哲学家亚里士多德的"不同重量的物体从高空下降的速度与其重量成正比"的错误结论，他除了拿两个重量不同的铁球登上比萨斜塔做实验来说明外，还从理论上进行证明：假设亚里士多德的结论是正确的．设物体 $A$ 比物体 $B$ 重得多，则 $A$ 应比 $B$ 先落地．现在把 $A$ 与 $B$ 捆在一起成为物体 $A+B$．一方面，由于 $A+B$ 比 $A$ 重，它应比 $A$ 先落地．另一方面，由于 $A$ 比 $B$ 落得快，$A$、$B$ 在一起时 $B$ 应减慢 $A$ 的下落速度，

所以 $A+B$ 又应比 $A$ 后落地. 这样,便得到了自相矛盾的结论: $A+B$ 既应比 $A$ 先落地, 又应比 $A$ 后落地. 这个矛盾来源于亚里士多德的结论,因此,亚里士多德的结论是错误的.

再看一个数学上的例子.

〔例 1〕 已知: $\triangle ABC$ 是锐角三角形,

$$\angle A>\angle B>\angle C.$$

求证: $\angle B>45°$.

**证明** 假设 $\angle B\leqslant 45°$.

$\because$ $\angle B>\angle C$,

$\therefore$ $\angle C<45°$.

$\therefore$ $\angle B+\angle C<90°$.

$\because$ $\triangle ABC$ 是锐角三角形,

$\therefore$ $\angle A<90°$.

$\therefore$ $\angle A+\angle B+\angle C\neq 180°$.

这与定理"三角形内角之和等于180°"相矛盾.

$\therefore$ $\angle B>45°$.

分析上述三个问题的解答,可以看到,问题的具体内容虽然不同,但解决的方法却是相同的. 首先假定结论的反面成立;然后进行正确的推理论证,推导出一个矛盾,从而否定结论的反面成立;最后肯定原结论正确. 这种证明问题的方法通常叫做**反证法**.

反证法与直接证法有什么不同呢? 先来看下面的例题:

〔例 2〕 已知: $a$、$b$ 是正数.

求证: $\frac{a+b}{2}\geqslant\sqrt{ab}$.

| 直接证法 | 反证法 |
| --- | --- |
| $\because \quad \frac{a+b}{2}-\sqrt{ab}$ $=\frac{1}{2}(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2$, | 假设 $\frac{a+b}{2}<\sqrt{ab}$,则 $\frac{a+b}{2}-\sqrt{ab}<0$, |
| 又 $a$、$b$ 是正数, | 即 $\frac{1}{2}(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2<0$. |
| $\therefore \quad \sqrt{a}$、$\sqrt{b}$ 是实数. | 这与实数的性质 |
| $\therefore \quad (\sqrt{a}-\sqrt{b})^2\geqslant 0$, | $(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2\geqslant 0$ |
| 即 $\frac{a+b}{2}-\sqrt{ab}\geqslant 0$. | 矛盾, |
| $\therefore \quad \frac{a+b}{2}\geqslant\sqrt{ab}$. | $\therefore \quad \frac{a+b}{2}\geqslant\sqrt{ab}$. |

从上例可以看到,直接证法是从已知条件出发,经过正确的逻辑推理,最后导出所要证明的结论.反证法是从结论的反面出发,经过正确的逻辑推理,从而导出矛盾的结果,最后否定结论的反面,肯定结论的正面.因此,反证法和直接证法是两种不同的证明方法.

为了进一步说明反证法的重要作用,再举一个例题.

〔例 3〕 已知:$a$、$b$、$c$、$d$ 是实数,且 $ad-bc=1$.

求证:$a^2+b^2+c^2+d^2+ab+cd\neq 1$.

**证明** 假设 $a^2+b^2+c^2+d^2+ab+cd=1$. ①

把 $ad-bc=1$ 代入①,得

$$a^2+b^2+c^2+d^2+ab+cd=ad-bc. \quad ②$$

②×2,并整理,得

$$(a+b)^2+(b+c)^2+(c+d)^2+(d-a)^2=0,$$

$$\therefore \quad a+b=b+c=c+d=d-a=0.$$

由此得 $$a=b=c=d=0,$$

则 $$ad-bc=0\neq 1.$$
这与已知条件 $ad-bc=1$ 矛盾.
$$\therefore\quad a^2+b^2+c^2+d^2+ab+cd\neq 1.$$

这个例题的结论是用反证法证明的，但它不能用直接证法加以证明. 由此可见，反证法还可以解决直接证法不好解决和不能解决的一些问题. 它弥补了直接证法的不足. 因此，反证法是一种重要的证明方法.

但是有些人总觉得反证法没有理论根据，使用反证法总有点不放心. 另外也有人把反证法解释为"不证明原命题，而改证它的逆否命题的证明方法."这些说法对不对呢？我们的回答是不对的. 那么怎样理解才对呢？上述说法的错误又在哪里呢？为了搞清楚这些问题，我们首先介绍一点与反证法有关的逻辑知识.

## 2. 反证法的逻辑基础知识（一）

分析上节应用反证法证明的几个例题，可以发现，证明过程的关键步骤，是要在证明中推出矛盾. 出现矛盾，则原结论一定成立. 初学者往往对这一关键步骤的成立表示怀疑，因此产生了用反证法证明不可靠的想法. 为了解决这一问题，先介绍一下逻辑思维的基本规律.

逻辑思维的基本规律，是一切正确思维所必须遵守的. 逻辑思维的基本规律共有四条. 它们是同一律、矛盾律、排中律和充足理由律. 同一律和充足理由律与反证法这一内容联系较少，本书不作介绍，下面着重介绍矛盾律和排中律.

矛盾律的内容是，在同一思维的过程中，两个互相矛盾的

判断，不能同真，必有一假．矛盾律要求一种思想不能自相矛盾，因此也可把它叫做不矛盾律．

排中律的内容是，在同一时间内，从同一个方面，对于同一思维对象所作出的两个相反的矛盾判断，不能同假，必有一真．

矛盾律和排中律的作用都是排除思维中的矛盾．但是它们的使用范围是不同的．矛盾律解决的是对比性的矛盾．什么是对比性的矛盾呢？例如，“这个数是质数”和“这个数是合数”，这两个判断是互相矛盾的，但质数和合数之和并不是全体自然数，还有第三种情况存在，如“1”既不是质数，也不是合数．又例如，“这个数是质数”和“这个数是非质数”，这也是两个互相矛盾的判断，但质数和非质数之和恰是全体自然数，没有第三种情况存在．上述这两类矛盾都叫做对比性矛盾．排中律解决的矛盾是对抗性的矛盾．什么是对抗性的矛盾呢？如上面所举的“这个数是质数”和“这个数是非质数”．又如“$a$ 是负数”和“$a$ 是非负数”．负数和非负数之和恰是全体实数，没有第三种情况存在．象这样的对比性矛盾叫做对抗性矛盾．由此可知，能根据排中律解决的矛盾，也一定能利用矛盾律解决．反之则不一定．此外，矛盾律只是解决两个矛盾的判断不能同真，必有一假，因此两个矛盾的判断可能一真一假，也可能两者同假．

掌握了矛盾律和排中律以后，就可以回答本节开始所提出的问题．这个问题实际上是由下面两个小问题构成的．

(1) 在证明过程中推出矛盾，则否定结论不成立；

(2) 如果否定结论不成立，则原结论一定成立．

先说(1)．在证明中推出矛盾（如例 2 中推出结果与实数

基本性质矛盾，例3中推出结果与已知条件矛盾)，这些矛盾都是对比性矛盾，根据矛盾律，这对互相矛盾的判断不能同真，必有一假．但是已知条件和基本性质都不能假，因而只有推出的结果是假的．而产生错误结果的原因，不是由推理错误造成的．因为推理过程的每一步是有根据的，而是由于加入否定结论造成的，所以否定结论不成立．

再说(2)．否定结论和原结论这一对互相矛盾的判断，是对抗性的矛盾．根据排中律，它们不能同假，必有一真．由(1)可知否定结论为假，则原结论为真．即，如果否定结论不成立，则原结论一定成立．通常把(1)(2)两个问题概括成一个问题：如果推出矛盾，则原结论一定成立．

回答上面提出的问题，实际上就指出了反证法的理论根据．反证法的理论根据就是逻辑思维基本规律的矛盾律和排中律．因为反证法有着坚实的理论根据，所以用反证法证明是完全可靠的．

从下一节起，我们再从命题的等价性这一角度来说明反证法的可靠性，并给出反证法的严格的定义．

## 3．反证法的逻辑基础知识(二)

在平面几何里，学过有关命题的一些简单知识，并且掌握了命题的四种形式及其之间的关系，以及原命题和逆否命题是等价命题．在此基础上，再补充介绍一些有关命题的知识．为了便于研究，以后本书中的命题用大写字母 $A$、$B$、$C$、… 表示，并且规定：如果一个命题 $A$ 是真命题，就说命题 $A$ 取真值，用1代表真命题所取的值，记作 $A=1$；如果命题 $A$ 是假

命题，就说命题 $A$ 取假值，用 0 代表假命题所取的值，记作 $A=0$.

分析下列命题之间有什么关系：

(1) 6 是 3 的倍数；

(2) 6 是 2 的倍数；

(3) 6 不是 3 的倍数；

(4) 6 不是 2 的倍数；

(5) 6 是 3 的倍数，也是 2 的倍数；

(6) 6 是 3 的倍数，或是 2 的倍数；

(7) 若 6 是 3 的倍数，则 6 是 2 的倍数.

(1)、(2) 这两个命题不能再分解为更简单的命题，这样的命题叫做**单一命题**或**原始命题**. 而 (3)、(4) 这两个命题可改写成“不是‘6 是 3 的倍数’”，“不是‘6 是 2 的倍数’”. 这两个命题可以看成是在单一命题 (1)、(2) 的前面加上逻辑联结词“不是”而成. (3)、(4) 是与 (1)、(2) 意义完全相反的两个命题. 所以把 (3)、(4) 叫做 (1)、(2) 的**否定命题**，也可以说是对 (1)、(2) 的否定. 这是数学中经常遇到的一种命题. 否定命题的构成方法，是在原始命题的前面加上逻辑联词“不是”. 如“$b$ 是质数”它的否定命题“不是‘$b$ 是质数’”. 但这种说法不符合人们说话的习惯. 习惯上把它说成“$b$ 不是质数”. 为了研究上的方便，引入符号“—”. 如原命题是 $A$，则它的否定命题记作 $\overline{A}$.

(5) 这个命题可以分解成“6 是 3 的倍数”且“6 是 2 的倍数”. 即 (5) 是由 (1)、(2) 用逻辑联结词“且”组成的新命题. 这样的命题叫做 (1)、(2) 的**联言命题**. 联言命题的构成方法，是把原始命题用逻辑联结词“且”联结起来. 如“$\pi>3.14159$”、

“$\pi<3.14160$”. 由它们组成的联言命题是“$\pi>3.14159$”且“$\pi<3.14160$”. 为了研究上的方便，引入符号“$\wedge$”. 如把原始命题记作 $A$、$B$，则它的联言命题记作 $A\wedge B$.

(6)这个命题可以分解成“6 是 3 的倍数”或“6 是 2 的倍数”. 它的含义为：6 是 3 的倍数，或者 6 是 2 的倍数；或 6 是 3 的倍数也是 2 的倍数. (6)这样的命题叫做(1)、(2)的**选言命题**. 选言命题的构成方法是把原始命题用逻辑联结词“或”联结起来. 如“$x^2+5x+6=0$ 的根是 2”，“$x^2+5x+6=0$ 的根是 3”，所组成的选言命题是“$x^2+5x+6=0$ 的根是 2 或是 3”. 为了研究方便，引入符号“$\vee$”表示“或”. 则选言命题 $A$ 或 $B$ 记作 $A\vee B$. 这里要指出的是“或”有两种含义，一种就是上面所介绍的非互斥的用法. 另一种是互斥的用法. 如果需要采用互斥的用法时，一定要加以说明.

(7)是由 (1)、(2) 这两个原始命题用逻辑联结词“若……则”(也可用“如果……那么”)联结而成的. 所以(7)这样的命题叫**假言命题**. 它的构成方法，是在第一个原始命题前面加上“若”，在第二个原始命题前面加上“则”而成的. 如“$m=n$”，“$m^2=n^2$”所组成的假言命题是“若 $m=n$，则 $m^2=n^2$”. 为了研究上的方便，引入符号“$\rightarrow$”表示“若……则”. 假言命题若 $A$ 则 $B$ 记作 $A\rightarrow B$.

上面所介绍的否定命题、联言命题、选言命题和假言命题都是由原始命题组合而成的，它们叫做**复合命题**. 它们都是数学中最常见的命题. 复合命题的真假，完全可以由组成它的原始命题的真假所决定. 例如，“$4>3$”记作 $A$，是真命题，即 $A=1$，则 $\overline{A}$“4 不大于 3”是假命题，即 $\overline{A}=0$. 为了更清楚反映复合命题与其组成的原始命题之间的取值情况，习惯上用

一种特殊的表格来表示，这种表叫做**真值表**．下面就是否定命题的真值表(表1)．

**表 1**

| $A$ | $\overline{A}$ |
|---|---|
| 1 | 0 |
| 0 | 1 |

这个表的读法是：当 $A$ 取值 1 时，$\overline{A}$ 取值 0；当 $A$ 取值 0 时，$\overline{A}$ 取值 1．

仿此，根据联言命题和选言命题的定义，可以作出联言命题的真值表(表 2)和选言命题的真值表(表 3)．

**表 2**

| $A$ | $B$ | $A\wedge B$ |
|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 0 |
| 1 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 1 |

**表 3**

| $A$ | $B$ | $A\vee B$ |
|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 1 |

下面，我们来研究命题 $A$、$B$ 的真假与假言命题 $A\to B$ 的真假的关系．先看一个具体例子：

如果三角形的一个内角 $P$ 是直角，那么此三角形的其他两个内角 $Q$、$R$ 都是锐角．

这里，把“三角形的一个内角 $P$ 是直角”记作 $A$，“此三角形的其他两个内角 $Q$、$R$ 都是锐角”记作 $B$．

当 $A$ 为真、$B$ 为真时，容易知道 $A\to B$ 为真．

当 $A$ 为真、$B$ 为假时，$A\to B$ 为假．因为 $B$ 为假，即 $\angle Q$、$\angle R$ 中至少有一个角不是锐角，不妨设 $\angle Q\geqslant 90°$，而 $A$ 为真，即 $\angle A=90°$．于是，由三角形三内角之和等于 $180°$，可知 $\angle Q\geqslant 90°$ 是不可能的．因此，$A\to B$ 为假．

当 $A$ 为假、$B$ 为真时，$A\to B$ 可能为真，也可能为假．因为 $A$ 为假，即 $\angle P$ 不是直角，这时 $\angle P>90°$ 或 $\angle P<90°$，

而 $B$ 为真，即 $\angle Q$、$\angle R$ 都是锐角．于是，当 $\angle P>90^\circ$，$A\to B$ 为真；当 $\angle P<90^\circ$ 时，$A\to B$ 的真假不明显．

当 $A$ 为假、$B$ 为假时，$A\to B$ 可能为真，也可能为假．其理由，读者可根据三角形内角和定理加以说明．

由上例可以看到，当"$A$ 为假、$B$ 为真"或"$A$ 为假、$B$ 为假"时，$A\to B$ 的真假是不确定的．为了避免这种情况，我们作如下的规定：

对于假言命题 $A\to B$，只有当 $A$ 为真、$B$ 为假时，$A\to B$ 才为假．

**表 4**

| $A$ | $B$ | $A\to B$ |
|---|---|---|
| 0 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 1 |

这样，可以得到假言命题的真值表(表 4)．

真值表不仅直观地反映了复合命题与组成这个复合命题的原始命题之间的取值关系，而且利用它可以求出各种更复杂命题的值，还可以利用它来证明一些命题之间的关系．上面所列的四个真值表是求更复杂的复合命题的真值表的根据．

下面通过求 $A\wedge\overline{B}$ 的值，介绍一般复合命题真值表的作法．

$A\wedge\overline{B}$ 的真值表是

| $A$ | $B$ | $\overline{B}$ | $A\wedge\overline{B}$ |
|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 1 | 0 |
| 0 | 1 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 0 | 0 |

它的作法步骤如下：

(1) 首先列出与所求命题($A\wedge\overline{B}$)的有关命题($A$、$B$、$\overline{B}$)，最后再列出所求的命题($A\wedge\overline{B}$)，如上表第一行；

(2) 在原始命题($A$、$B$)下面填上它们各种可能取值的情况，如上表中第一列、第二列；

(3) 由 $B$ 根据表 1 在 $\overline{B}$ 下面填上它的值，如上表中的第三列；

(4) 由 $A$ 和 $\overline{B}$，根据表 2，在"$\wedge$"的下面填上所取的值，如上表中的第四列. 这就是 $A\wedge\overline{B}$ 的值.

我们可以利用真值表，给出等价命题的定义.

如果两个命题 $A$、$B$，它们的真值表完全相同，那么 $A$ 和 $B$ 叫做**等价命题**. 记作 $A=B$.

下面证明两个重要的等价命题：

〔例 4〕 求证：原命题和逆否命题是等价命题.

已知：原命题 $A\to B$，逆否命题 $\overline{B}\to\overline{A}$.

求证： $A\to B=\overline{B}\to\overline{A}$.

**证明** 作出下面的真值表.

| $A$ | $B$ | $\overline{A}$ | $\overline{B}$ | $A\to B$ | $\overline{B}\to\overline{A}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 |

$$\therefore\quad A\to B=\overline{B}\to\overline{A}.$$

〔例 5〕 求证：$A\to B=(A\wedge\overline{B})\to(C\wedge\overline{C})$.

**证明** 作出下面的真值表.