萬有文庫

第一集一千種

王雲五主編

微積學發凡

鄭太朴著

商務印書館發行

微積學發凡

鄭太朴著

算學小叢書

萬有文庫

第一集一千種

總編纂者
王雲五

商務印書館發行

王雲五主編

萬有文庫

第一集一千種

微積學發凡

鄭太朴著

發行兼印刷者　上海寶山路 商務印書館

發行所　上海及各埠 商務印書館

中華民國十八年十月初版

The Complete Library
Edited by
Y. W. WONG

AN INTRODUCTION TO CALCULUS
By
CHENG TAI PO

THE COMMERCIAL PRESS, LTD.
Shanghai, China
1929

A四〇九分

微積學發凡

目　錄

微積學發凡

第一章　基本概念

第一節　史的概觀

微積算法亦稱"極微算法",近代數學中之重要部分也.溯其來源,微分法實濫觴於切線,極端值等問題;蓋自解析方法用入幾何學後,曲線之研究漸廣,於是由此引入微分算法,亦學術進化自然之道.法人范蘇(*Fermat*, 1601–1665)於十七世紀之初,已能解決若干簡單函數之極端值問題,其理與今日微分算法中所論者無異,可謂斯學之先聲.惟微分法正式成立,則賴英人牛頓(*Newton* 1643–1727)及德人萊伯尼茲(*Leibnitz* 1646–1716),而萊氏之力尤多.故今日言微分法之創始者,端推二氏.

牛萊二氏雖生同世,其創此法亦相去不遠,然實各有匠心,初未相剿襲.牛氏法初名"流動算法",

多由研究力學問題得之.所謂流動者,亦卽是速度.然今日所用"微分"等名稱及其符號,則均係萊氏所創.又,牛氏於微分法亦僅創其概念,萊氏則幷作爲運算規例。故微分法至萊氏而有系統.

微分法初時流行頗遲,致疑及誤解者尤多.牛頓本身於其名著 *Philosophiae naturalis principia mathematica* 中亦曾未一用之.經德人柏諾理昆仲(*Jakob und Johaun Bernoulli*,1654－1705,1667－1748)及歐拉(*L. Euler*, 1707－1783) 之研究,始稍稍進步.法人拉格浪(*Lagrange* 1736－1813)欲純自代數學出發樹立微分法,尤於此多供獻.然用極限方法以從事,當以亞倫伯(*D' Alembert* 1717－1783 法人)爲首;而根據此概念,爲微分法樹確實之基礎,使其得究竟成立者,則法人考喜 (*Cauchy*, 1789－1857)也.

積分算法之歷史,較微分法爲久.就原理而論,古時求曲線形面積及體積之法,已屬於此.降及近世,可謂積分法之先驅者,有意人加佛里(*B. Cava-*

lieri 1598–1647)，法人巴司卡(*B. Pascal*, 1623–1662)，英人華里士 (*Wallis*, 1616–1703) 等．簡單函數之積分，范蘇亦已能求之．惟至萊伯尼茲，積分法始成爲系統．今日所用積分之符號，亦尚萊氏之舊，故謂積分學亦創於萊氏，實無不可．萊氏後積分法之究竟成立，亦賴考喜．惟德人黎孟(*Riemaun* 1826–1866)於此亦多供獻．

前世紀末，賴德人談德金(*Dedekind*, 1831–1916)，桓司德拉 (*Weierstrass* 1815–1897)，康鐸 (*G. Cantor* 1845–1918) 等之力，數目概念已大較前爲嚴明．故微積算法之基礎，今已可謂確立，不復有可疑處．輓近來"量論" (*Mengenlehre*) 於此頗有新創，則又爲微積算法樹新基礎矣．

然欲明微積算法，則無理數，極限值等基本概念須先瞭然而後可，故今略論之．

第二節 談德金氏之"切"

一切整數 (0 亦在內) 幷一切分數總謂之"有理

數".今試設想用一有理數 r 爲出發,將一切有理數分作上下二類,上類中一切數均大於 r, 下類中一切數均小於 r. 如是,則下類中一切數均小於上類中一切數,上類中一切數均大於下類中一切數.倘將 r 本身歸入下類,則 r 卽爲下類中之最大數;因下類中一切數均小於 r 也.反之,若將 r 歸入上類,可知 r 亦卽爲上類中之最小數.因而此有理數 r 於此分法方面占有特別地位,倘非爲上類中之最小數,則卽爲下類中之最大數.

然用一有理數 r 爲出發,此殊不必要.今試設想隨意將一切有理數分成爲上下二類,下類中一切數小於上類中一切數,上類中一切數大於下類中一切數,則可分三事論之:

1. 若非下類中有一最大數,則上類中有一最小數,二者任居其一,但不相幷.

2. 上類中旣無最小數,下類中亦無最大數.

3. 上類中旣有最小數,下類中幷有最大數.

以上三事中第 3 事不能成立;蓋若上類中有-

最小數 a，下類中并有一最大數 b，則 $\frac{a+b}{2}$ 一有理數既可屬於上類，亦可屬於下類，若屬於上類，則因 $\frac{a+b}{2}<a$，a 卽不能爲上類中之最小數，若屬於下類，b 亦卽不能爲下類中之最大數．故知同時上類中有最小數，下類中有最大數，此不可能之事也．因而以上三事中，祇有第 1 第 2 二事能成立．

第 1 事之可成立，前已舉例示及且亦不難直接知之．至第 2 事之亦能成立，讀者或尙致疑，則先可證明之．

試一研究 2 之平方根 $\sqrt{2}$，卽不難見此非有理數也．蓋如不然，則可設

$$\sqrt{2}=\frac{m}{n}，\text{卽 } 2=\frac{m^2}{n^2} \quad \text{或} \quad 2n^2=m^2,$$

於此 m 與 n 爲二無有公因子之互質整數．因偶數之平方仍爲偶數，奇數之平方亦仍爲奇數，故由 $2n^2=m^2$ 可知 m 必爲偶數．今如 $m=2m^1$，於此 m^1 爲整數，則按前式得

$$4m^{12}=2n^2, \quad \text{卽} \quad 2m^{12}=n^2,$$

由此復可知 n 亦爲偶數，此卽與所設 m,n 爲二互

質數不合.故知$\sqrt{2}$不能以分數式表之,卽非爲有理數也.

今將一切有理數分爲二類,凡平方大於 2 之正有理數概屬上類,其餘一切有理數,則歸入下類,如是,則下類中一切數均小於上類中一切數,上類中一切數均大於下類中一切數.然於此上類中旣無最小數,下類中亦無最大數,與前所云之第 2 事合.蓋如 r 爲下類中任何一正有理數,則 r^2旣不能大於2,亦不能等於 2,故必 $r^2<2$.今若 h 爲一正有理數,而

$$h<1,\ 幷\ h<\frac{2-r^2}{2r+1},$$

則$(r+h)^2=r^2+2rh+h^2<r^2+h(2r+1)<2$.此於 r 爲下類中任何正有理數均合用,故下類中無有最大數.仿此,倘 r 爲上類中任何一數,則 $r>0$, $r^2>2$,故若 h 爲一正有理數小於$\frac{r^2-2}{2r}$者,卽可得

$$(r-h)^2=r^2-2rh+h^2>r^2-2rh>2.$$

此於 r 爲上類中任何數均合,因而上類中無有最小數.從可知第 2 事實能成立.

於第1事中，下類中之最大數或上類中之最小數占有一特別地位，非其他有理數所能有者，蓋此有理數乃是上下二類之界限也。第2事中，抖無此種占有特別地位之有理數存在；然既將一切有理數分爲上下二類，則二類中間當必有一“物”爲之界，如上例中爲二類之界者，實卽2之平方根$\sqrt{2}$.

用談德金（*Dedekind*）所創語，將一切有理數分成上下二類，有以前所云屬性者，謂之“於有理數區域內作一切”，或簡稱作一“切”。倘名下類爲甲類，上類爲乙類，則可用符號（甲｜乙）以表所作之“切”。

由以前所云，可知“切”有二種。第一種“切”內上下二類之界，亦爲一有理數。第二種“切”內上下二類之界，抖非有理數。倘吾人否認有理數以外可尙有數目，則亦可簡單云第二種“切”之二類間無有界。然類於$\sqrt{2}$之符號，運算時極多遇見，若不視之爲數目，則至簡單之二次方程已不能解。故今可將數目概念稍加擴充，第二種“切”內上下二類

之界亦視之爲數目;以與有理數別,此種數目名之曰"無理數".

如是,則可知於有理數區域內作一"切"時,此"切"決定一數目,可爲有理數或無理數.若爲無理數,則此數小於上類中之一切有理數,而大於下類中之一切有理數.

以上所明無理數之概念,係談德金所創.此種詮釋法,自尙可有討論處;惟初學者得此,或已足略明無理數之性質,故不再廣論.

第三節　實數略論

有理數方面所有概念,亦多可擴充至無理數方面.今如 α 爲一無理數;由一"切"所決定者,則可觀其切之上下二類.倘 0 在其下類中,則可云 α 爲"正無理數";反之,若 0 在上類中,則 α 卽爲"負無理數".寫法作:$\alpha>0$ 或 $\alpha<0$.

有二無理數 α,β 於此,倘決定此二數之"切"爲同者,則稱此二數爲相同之數或相等之數,寫作

$\alpha=\beta$.倘決定 α 之切與決定 β 之切異,則 α 不能與 β 相等.於此分二事論之.第一,有一有理數 r,在 α 切中居於上類內而在 β 切中則居於下類,如是則必 $\alpha<r<\beta$,故可云"α 小於 β",寫作 $\alpha<\beta$. 反之,若 r 在 α 切中居於下類內而在 β 切中則居於上類,則必 $\beta<r<\alpha$,於是可云"α 大於 β",寫作 $\alpha>\beta$. 至此有理數 r 之存在,自不待言.蓋如無有此項有理數 r,則 α 切中上類之數於 β 切中仍均在上類,α 切中下類之數於 β 切中亦均在下類,是 $\alpha\beta$ 二切相同,卽違所設.從可知設 α, β 爲二無理數,則祇有三種可能性:$\alpha=\beta$, $\alpha<\beta$,或 $\alpha>\beta$.

今設(甲|乙)爲一切,決定一無理數 α;於此,甲爲下類,乙爲上類,0 則在下類中,試設想將下類中自 0 以下之數目一齊捨去不用,則仍爲一"切",其所決定之數目 α 亦不受影響,蓋用切以決定數目,所用者爲上下類之界.如是所得之切,試再設想將其上下類中之一切數,均倒之爲倒數(如 a 倒之成 $\frac{1}{a}$),同時幷將下類與上類及數目之次序亦

倒之，則得一新切，名爲原切(甲|乙)之"倒切"，用符號可作

$$\left(\frac{1}{乙}\middle|\frac{1}{甲}\right).$$

此新切所決定者爲一新數目 β，卽名之曰原來數 α 之"倒數"，亦可寫作

$$\frac{1}{\alpha}。$$

此外，有理數方面之其他概念及算法亦均可用切擴充至無理數方面，今姑從略.

無理數與有理數，合之總稱爲"實數". 於此，有數則定理須一述之.

定理 1. 設 α 與 β 爲二實數，$\alpha<\beta$，則 α 與 β 之間尚有無盡多有理數存在，卽是，有無盡多有理數 $r_1, r_2, r_3\cdots\cdots$ 能滿足以下之條件者：

$$\alpha<r_1<r_2<r_3<\cdots\cdots<\beta.$$

[證] 如 α 與 β 俱爲有理數，則可有一有理數 $r=\frac{1}{2}(\alpha+\beta)$ 存在於其間. 如 α 與 β 俱爲無理數，則因 $\alpha<\beta$，可有一有理數 r 於 α 切中居於上類於

β 切中則居於下類者，是卽 $a<r<\beta$ 也（此數 r 必存在，前已言之）。如 α 與 β 二者中一爲無理數一爲有理數，例如 α 爲有理，β 爲無理，則按所設 $\alpha<\beta$，卽是 α 在 β 切之下類中，該下類中旣無最大數，故必有一有理數 r 大於 α 者在內，亦卽得 $\alpha<r<\beta$. 從可知無論如何 α 與 β 間必有一有理數存在。反覆用此論證，不難知 α 與 β 間可有無盡多有理數存在。

定理 2. 若 $\alpha<\beta,\beta<\gamma$，則必 $\alpha<\gamma$；於此，α,β,γ 爲任何三實數。

［證］ 由定理 1.，知可有二有理數 a 與 b，能滿足以下條件者：$\alpha<a<\beta$，$\beta<b<\gamma$. 由此可見 a 在 β 之下類中，b 在 β 之上類中，故必 $a<b$. 然 b 在 γ 之下類中，故 a 亦在 γ 之下類中。a 旣同時在 α 之上類中及 γ 之下類中，是卽 $\alpha<\gamma$ 也.

定理 3. 設 a 與 b 爲二有理數，其差無限小，卽是，a 與 b 之差可小於一任何小之正數目 ε，則 a 與 b 間祇能有一數目存在。