

高等数学复习与题解

张仁德 汪惠鑫 编
蒋中鑫 黄金坤

化学工业出版社

内 容 简 介

本书基本上是参照高等工科院校高等数学教学大纲的要求编写的,此外也是编者多年来从事高等数学教学、辅导工作的结晶。

全书共分十二章,内容包括一元、多元函数的极限与连续;一元、多元函数的微分学与积分学;无穷级数及常微分方程。本书的特点是叙述简要、清晰;例题多样,典型灵活且具有启发性;配有较多的习题,且都附有解答。

本书是报考工科硕士研究生的复习指导材料,是工科大学生、电大、职大学员及自学高等数学者的辅导材料,也可供从事工科数学教学的教师参考。

高等数学复习与题解

张仁德 汪惠鑫

蒋中鑫 黄金坤

责任编辑:李诵雪

封面设计:郑小红

化学工业出版社出版发行

(北京和平里七区十六号楼)

化学工业出版社印刷厂印刷

新华书店北京发行所经销

开本 $850 \times 1168^{1/32}$ 印张 $17^{1/2}$ 字数495千字
1989年12月第1版 1989年12月北京第1次印刷

印 数 1—2,830

ISBN 7-5025-0314-5/O·5

定 价8.60元

前 言

本书是参照高等工科院校高等数学教学大纲的要求编写的。全书共分十二章，内容含有一元、多元函数的极限与连续；一元、多元函数的微分学和积分学；无穷级数及常微分方程。

全书各章都对基本内容作了纲要性的叙述，并作了适当的延伸，叙述力求简要、严谨、清晰。各章都有较多的例题，这些例题类型多样、灵活典型，具有启发性。每章还配备了较多的习题，这些题许多是我们多年在教学、辅导中积累的，还有不少是近年来各校招考硕士研究生入学试题，综合性灵活性较强，有利于提高分析问题及解题能力。所有习题都附有解答，便于读者参考。

本书是准备报考（非数学专业）硕士研究生的综合复习资料，是工科大学生、电大、职工大学学员及自学高等数学者的辅导材料，也可供从事工科高等数学教学的教师参考。

本书由张仁德、汪惠鑫、蒋中鼐、黄金坤四人编写，其中第一、二、十一章由张仁德编写；第三、六、十二章由汪惠鑫编写；第四、五章由蒋中鼐编写；第七、八、九、十章由黄金坤编写。全书由蒋中鼐统稿。

在此书编写过程中，参考了我院吴颢芳、李乾生、汪惠鑫、蒋中鼐、吴锦云、黄金坤、张仁德等编写的“高等数学复习与题解”讲义，还参考了其他有关资料。限于编者水平，书中缺点与错误难免，希广大读者批评指正。

编者

目 录

第一章 极限	1
第一节 极限概念及有关定理	1
一、极限定义	1
二、极限运算法则	2
三、极限存在准则	3
四、保号定理	3
五、两个重要极限	4
六、无穷小量的比较及等价无穷小代换定理	4
七、罗必塔法则	5
第二节 二元函数的极限	6
一、二重极限	6
二、累次极限	6
三、二重极限与累次极限的关系	6
第三节 例题	7
一、用极限定义求极限	7
二、利用极限的基本性质和运算法则求极限	9
三、连续函数求极限	14
四、用极限存在准则证明极限存在或求极限	14
五、用两个重要极限求极限	16
六、利用等价无穷小代换求极限	19
七、利用罗必塔法则求极限	22
八、用函数极限与数列极限的关系求极限或证明极限不存在	27
九、用左右极限与双边极限的关系求极限	28
十、用泰勒公式求极限	29
十一、用微分或积分求极限	30
十二、杂例	31
习题一	35

习题一解答	11
第二章 连续函数	65
第一节 一元函数的连续性	65
一、连续函数的定义	65
二、函数的间断点	65
三、函数的一致连续性	66
四、连续函数的运算性质	66
五、闭区间上连续函数的性质	66
第二节 二元函数的连续性	67
一、连续函数的定义	67
二、函数的一致连续性	67
三、连续函数的运算性质	68
四、有界闭区域上连续函数的性质	68
第三节 例题	68
习题二	74
习题二解答	76
第三章 导数与微分	81
第一节 一元函数微分法	81
一、导数与微分概念	81
二、导数与微分的计算	82
第二节 多元函数微分法	85
一、偏导数与全微分概念	85
二、多元复合函数求导法则 (链锁法则)	87
三、隐函数微分法	88
第三节 例题	88
一、一元函数微分法	88
二、多元函数微分法	101
习题三	114
习题三解答	117
第四章 中值定理与泰勒公式	130
第一节 微分中值定理	150
一、费尔马 (Fermat) 定理	130

二、罗尔 (Rolle) 定理	130
三、拉格朗日 (Lagrange) 定理	130
四、柯西 (Cauchy) 定理	131
第二节 泰勒 (Taylor) 公式	131
一、皮亚诺 (Peano) 型余项的泰勒公式	131
二、拉格朗日型余项的泰勒公式	131
三、麦克劳林 (Maclaurin) 公式	131
第三节 积分中值定理	133
第四节 例题	133
习题四	149
习题四解答	152
第五章 不等式的证明	164
第一节 利用数学归纳法	164
第二节 利用中值定理	167
第三节 利用函数的单调性	169
第四节 利用函数的极值	171
第五节 一些含有积分的不等式	174
第六节 杂例	180
习题五	184
习题五解答	187
第六章 极值与最大最小值	203
第一节 一元函数情形	203
一、函数的增减性	203
二、函数的极大值与极小值	203
三、函数的最大值与最小值	204
四、函数的凸性及曲线的拐点	204
第二节 多元函数情形	206
一、二元函数的极大值与极小值	206
二、偏导数的几何应用	207
第三节 例题	209
一、一元函数情形	209
二、多元函数情形	224

习题六	236
习题六解答	238
第七章 不定积分	256
第一节 不定积分的概念与性质	256
一、定义	256
二、性质	256
第二节 基本计算方法	257
一、换元法	257
二、分部法	257
第三节 特殊类型函数的积分法	257
一、有理函数的积分法	257
二、三角有理函数的积分法	258
三、简单无理函数的积分法	258
第四节 例题	259
习题七	272
习题七解答	273
第八章 定积分	283
第一节 定积分定义与性质	283
一、定义	283
二、性质	284
第二节 积分中值定理	284
一、积分第一中值定理	284
二、积分第二中值定理	285
第三节 定积分的计算法	285
一、牛顿-莱布尼兹公式	285
二、换元法与分部法	286
第四节 常用定理	286
第五节 广义积分	287
一、第一类广义积分	287
二、第二类广义积分	287
三、广义积分的极限审敛法	288
第六节 例题	289

一、定积分部分	289
二、广义积分部分	301
三、应用及其它	306
习题八	312
习题八解答	315
第九章 重积分	329
第一节 二重积分	329
一、概念及性质	329
二、计算方法	330
三、二重积分的应用	333
第二节 三重积分	334
一、三重积分的计算方法	335
二、三重积分的应用	337
第三节 例题	338
一、二重积分部分	338
二、三重积分部分	350
习题九	357
习题九解答	360
第十章 曲线积分与曲面积分	375
第一节 曲线积分	375
一、曲线积分概念及计算公式	375
二、曲线积分的性质	377
第二节 基本定理	377
一、格林定理	377
二、曲线积分与路径无关的等价条件	378
第三节 曲面积分	379
一、对面积（或第一型）的曲面积分	379
二、对坐标（或第二型）的曲面积分	380
第四节 基本公式	381
一、高斯（Gauss）公式	381
二、斯托克斯（Stokes）公式	382
第五节 例题	382
一、曲线积分部分	382

二、曲面积分部分	394
习题十	405
习题十解答	409
第十一章 无穷级数	426
第一节 数项级数	426
一、概念及性质	426
二、正项级数判别法	427
三、任意项级数判别法	428
第二节 函数项级数	428
一、基本概念	428
二、一致收敛判别法	429
三、关于一致收敛级数的性质	430
第三节 幂级数	431
一、基本概念	431
二、收敛半径和收敛域的求法	431
三、幂级数的性质	432
四、关于函数的幂级数展开	433
第四节 级数求和法	435
一、直接求和法	435
二、构造幂级数法	435
三、其他方法	435
第五节 傅立叶 (Fourier) 级数	435
一、基本概念	435
二、收敛定理——狄里赫勒充分条件	436
三、傅立叶级数的性质	436
四、周期函数和非周期函数展开成傅立叶级数	437
五、复形式的傅立叶级数	440
第六节 例题	440
习题十一	464
习题十一解答	467
第十二章 常微分方程	488
第一节 常微分方程基本概念	488

一、常微分方程	488
二、线性微分方程	488
三、常微分方程的解	488
第二节 一阶微分方程及其解法	489
一、一阶可分离变量方程及一阶齐次方程	489
二、一阶线性方程及伯努利 (Bernoulli) 方程	491
三、全微分方程及积分因子	492
第三节 高阶可积型微分方程及其解法	494
一、类型及解法	494
第四节 变系数线性微分方程及其解法	495
一、二阶变系数线性齐次方程解法	495
二、二阶变系数线性非齐次方程解法	495
第五节 常系数线性微分方程及其解法	496
一、二阶常系数线性齐次方程解法 (特征根法)	496
二、二阶常系数线性非齐次方程解法 (待定系数法及算子法)	497
三、欧拉 (Euler) 方程解法	502
第六节 例题	503
一、常微分方程基本概念	503
二、一阶微分方程解法	505
三、高阶可积型微分方程解法	511
四、变系数线性微分方程解法	515
五、常系数线性微分方程解法	517
六、微分方程应用题举例	521
习题十二	527
习题十二解答	529
参考文献	548

第一章 极 限

第一节 极限概念及有关定理

一、极限定义

1. 数列 x_n 的极限定义

如果对于任意给定的正数 ε ，总存在正整数 N ，使得当 $n > N$ 时，恒有 $|x_n - A| < \varepsilon$ （其中 A 为某个常数），则称 A 为数列 x_n 当 n 趋于无穷大时的极限。或者说数列 x_n 收敛于 A ，记作

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = A \text{ 或 } x_n \rightarrow A, \text{ 当 } n \rightarrow \infty.$$

如果数列极限不存在，就说数列是发散的。

特别，若 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$ ，则称 x_n 为 $n \rightarrow \infty$ 时的无穷小量。

收敛数列只有一个极限，且收敛数列一定是有界的（但有界数列不一定收敛）。

2. 函数的极限

(1) 当 $x \rightarrow x_0$ 时，函数 $f(x)$ 以 A 为极限的定义

如果对于任意给定的正数 ε ，总存在正数 δ ，使得当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时，恒有 $|f(x) - A| < \varepsilon$ ，则称 A 为函数 $f(x)$ 当 $x \rightarrow x_0$ 时的极限。记作

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A \text{ 或 } f(x) \rightarrow A, \text{ 当 } x \rightarrow x_0.$$

(2) 当 $x \rightarrow \infty$ 时，函数 $f(x)$ 以 A 为极限的定义

如果对于任意给定的正数 ε ，总存在正数 N ，使得当 $|x| > N$ 时，恒有 $|f(x) - A| < \varepsilon$ ，则称 A 是函数 $f(x)$ 当 $x \rightarrow \infty$ 时的极限。记作

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A \text{ 或 } f(x) \rightarrow A, \text{ 当 } x \rightarrow \infty.$$

同样，若 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$ ，则称 $f(x)$ 是 $x \rightarrow x_0$ （或 $x \rightarrow \infty$ ）时的无穷小量。

($x \rightarrow \infty$)

(3) 函数 $f(x)$ 的单侧极限

当 $x < x_0$ 而 $x \rightarrow x_0$ 时, 若 $f(x)$ 的极限存在, 此极限称为函数 $f(x)$ 当 $x \rightarrow x_0$ 时的左极限。记作

$$\lim_{x \rightarrow x_0 - 0} f(x) \text{ 或 } f(x_0 - 0).$$

当 $x > x_0$ 而 $x \rightarrow x_0$ 时, 若 $f(x)$ 的极限存在, 此极限称为函数 $f(x)$ 当 $x \rightarrow x_0$ 时的右极限。记作

$$\lim_{x \rightarrow x_0 + 0} f(x) \text{ 或 } f(x_0 + 0).$$

函数 $f(x)$ 在 x_0 处的左右极限存在且相等是函数 $f(x)$ 当 $x \rightarrow x_0$ 时极限存在的充分必要条件。

3. 有界函数与无界函数的定义

若存在一个正数 M , 使得对于所考虑的区间内的一切 x 的值, 恒有 $|f(x)| \leq M$, 则称函数 $f(x)$ 在该区间内是有界函数; 若不存在这样的正数 M , 则称函数 $f(x)$ 在该区间内是无界函数。

二、极限运算法则

这里只以函数极限为例, 列出极限运算法则。对数列极限有完全类似的结果。

1. 若 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$, 则 $f(x) = A + \alpha(x)$, 其中 $\lim_{x \rightarrow x_0} \alpha(x) = 0$ 。

2. 有限个无穷小量之和、差、积仍为无穷小量。

3. 有界函数与无穷小量的乘积仍为无穷小量。

4. 在同一变化过程中, 如果 $f(x)$ 为无穷大量, 则 $\frac{1}{f(x)}$ 为无穷

小量; 如果 $f(x)$ 为无穷小量, 则 $\frac{1}{f(x)}$ 为无穷大量。

5. 若 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$, $\lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x) = B$, 则

$$(1) \lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) \pm \varphi(x)] = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \pm \lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x) = A \pm B;$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) \cdot \varphi(x)] = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x) = A \cdot B;$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) / \lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x) = A/B, B \neq 0.$$

6. 若 $p(x)$ 是多项式, 则 $\lim_{x \rightarrow x_0} p(x) = p(x_0)$ 。

三、极限存在准则

1. 柯西 (Cauchy) 准则

$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ 存在的充分必要条件是: 对于任意给定的正数 ε , 总存在正整数 N , 使得对满足 $n > N, m > N$ 的一切 n, m , 恒有 $|x_n - x_m| < \varepsilon$ 成立。

同样有:

$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ 存在的充分必要条件是: 对于任意给定的正数 ε , 总存在正数 δ , 使得对满足不等式 $0 < |x' - x_0| < \delta$ 和 $0 < |x'' - x_0| < \delta$ 的一切 x', x'' , 总有 $|f(x'') - f(x')| < \varepsilon$ 成立。

2. 单调有界变量的极限

单调有界数列必有极限;

若函数 $f(x)$ 在开区间 (a, b) 内广义单调且有界, 则 $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$ 及 $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$ 皆存在。

3. 夹挤定理

对于数列有:

若 $y_n \leq x_n \leq z_n, (n=1, 2, \dots)$, 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \lim_{n \rightarrow \infty} z_n = A$, 则

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = A.$$

对于函数有:

若在点 a 的某个邻域 (a 点可除外) 内, 有

$\varphi(x) \leq f(x) \leq h(x)$ 且 $\lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} h(x) = A$, 则

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A.$$

四、保号定理

如果 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$, 且 $A > 0$ (或 $A < 0$), 那末存在 x_0 的某一邻域, 当 x 在该邻域内, 但 $x \neq x_0$ 时, 有 $f(x) > 0$ (或 $f(x) < 0$)。

如果 $f(x) \geq 0$ (或 $f(x) \leq 0$), 且 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$, 那末 $A \geq 0$ (或 $A \leq 0$)。

这个定理在一些证明中有时起到重要的作用。

五、两个重要极限

$$1. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1;$$

$$2. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e \text{ 或 } \lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{1/x} = e.$$

六、无穷小量的比较及等价无穷小代换定理

以下 $\alpha, \beta, \alpha', \beta'$ 等都是同一个自变量 x 的函数, 且在 x 的同一趋向下, 均是无穷小量。

1. 无穷小量的比较

若 $\lim \frac{\alpha}{\beta} = A$; 如果 $A = 0$, 则称 α 是比 β 高阶无穷小量; 如果 $A \neq 0$, 则称 α 与 β 是同阶无穷小量; 特别当 $A = 1$ 时, 则称 α 与 β 是等价无穷小量。

等价无穷小量记作 $\alpha \sim \beta$ 。

若 $\lim \frac{\alpha}{\beta^k} = C \neq 0 (k > 0)$, 则称 α 是关于 β 的 k 阶无穷小量。

常用的等价无穷小量有:

$x \rightarrow 0$ 时,

$$\sin x \sim x, \operatorname{tg} x \sim x, \arcsin x \sim x, \ln(1+x) \sim x, e^x - 1 \sim x.$$

$$(1+x)^a - 1 \sim ax, 1 - \cos x \sim \frac{x^2}{2}.$$

2. 极限运算中的等价无穷小代换定理

设 $\alpha \sim \alpha', \beta \sim \beta'$,

(1) 如果 $\lim \frac{\alpha'}{\beta'}$ 存在, 则 $\lim \frac{\alpha}{\beta}$ 也存在, 且

$$\lim \frac{\alpha}{\beta} = \lim \frac{\alpha'}{\beta'}.$$

(2) 如果 $\lim \frac{\alpha' f(x)}{\beta'}$ 存在, 则 $\lim \frac{\alpha f(x)}{\beta}$ 也存在, 且

$$\lim \frac{\alpha f(x)}{\beta} = \lim \frac{\alpha' f(x)}{\beta'}.$$

这个定理说明在乘积因子中，可以换入与其等价无穷小量的因子。

七、罗必塔 (L'Hospital) 法则

定理 1 若

(1) 函数 $f(x)$ 与 $F(x)$ 在点 x_0 的某一邻域内除点 x_0 外，处处可微，且 $F'(x) \neq 0$ ；

$$(2) \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} F(x) = 0;$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{F'(x)} \text{ 存在 (或为 } \infty \text{)}$$

则 $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{F(x)}$ 也存在，且

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{F(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{F'(x)}.$$

定理 2 若

(1) 函数 $f(x)$ 与 $F(x)$ 在点 x_0 的某一邻域内除点 x_0 外，处处可微，且 $F'(x) \neq 0$ ；

$$(2) \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} F(x) = \infty;$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{F'(x)} \text{ 存在 (或为 } \infty \text{),}$$

则 $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{F(x)}$ 也存在 (或为 ∞)，且

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{F(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{F'(x)}.$$

定理 1 和定理 2 对 $x \rightarrow \infty$ 时亦成立。

其它形式的未定式，如 $0 \cdot \infty$ ， $\infty - \infty$ ， 0^0 ， 1^∞ ， ∞^0 等的极限都

可以归结到这两个法则来进行计算。

第二节 二元函数的极限

一、二重极限

设 $f(x, y)$ 在 $M_0(x_0, y_0)$ 的某一邻域内 (M_0 点可以除外) 有定义, 若对于任意给定的 $\varepsilon > 0$, 总存在 $\delta > 0$, 使得对满足 $0 < \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} < \delta$ 的一切 x, y , 总有 $|f(x, y) - A| < \varepsilon$ 成立, 则称常数 A 为 $f(x, y)$ 在 $M_0(x_0, y_0)$ 处 (或当 $M(x, y)$ 趋向于 $M_0(x_0, y_0)$ 时) 的极限。记作

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} f(x, y) = A \text{ 或 } \lim_{M \rightarrow M_0} f(M) = A.$$

二、累次极限

先 x 后 y 的累次极限

固定 $y(y \neq y_0)$, 让 x 趋向于 x_0 , 求极限。如果这个极限存在, 则这个极限与 y 有关, 记作

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x, y) = \varphi(y).$$

上式中再让 y 趋向于 y_0 求极限, 假若极限存在, 记作

$$\lim_{y \rightarrow y_0} \varphi(y) = A.$$

则称 A 为 $f(x, y)$ 在 $M_0(x_0, y_0)$ 点的先 x 后 y 的累次极限。记作

$$\lim_{y \rightarrow y_0} \lim_{x \rightarrow x_0} f(x, y) = \lim_{y \rightarrow y_0} [\lim_{x \rightarrow x_0} f(x, y)].$$

同样可以定义先 y 后 x 的累次极限

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \lim_{y \rightarrow y_0} f(x, y) = \lim_{x \rightarrow x_0} [\lim_{y \rightarrow y_0} f(x, y)].$$

累次极限实际上是一元函数的极限, 二重极限才真正是二元函数的极限。在一元函数的极限中, x 趋向于 x_0 的方向只有左右两个方向, 而二元函数的二重极限, 点 M 可以在平面上以任意方式趋向点 M_0 , 这就决定了二元函数的二重极限要比一元函数的极限复杂得多。

三、二重极限与累次极限的关系

二重极限存在不能保证两个累次极限存在。

两个累次极限 $\lim_{x \rightarrow x_0} \lim_{y \rightarrow y_0} f(x, y)$ 和 $\lim_{y \rightarrow y_0} \lim_{x \rightarrow x_0} f(x, y)$ 存在而且相等, 也不能保证二重极限存在。

二重极限 $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} f(x, y) = A$ 存在, 且 $\lim_{y \rightarrow y_0} f(x, y) = \varphi(x)$ 存在,

则先 y 后 x 的累次极限 $\lim_{x \rightarrow x_0} \lim_{y \rightarrow y_0} f(x, y)$ 存在, 且

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \lim_{y \rightarrow y_0} f(x, y) = \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} f(x, y)。$$

两个累次极限存在但不相等, 那么二重极限一定不存在。

如果点 $M(x, y)$ 沿着两条不同的路径趋于 $M_0(x_0, y_0)$ 时, 所得极限值不同, 那么二重极限一定不存在。

第三节 例 题

一、用极限定义求极限

例 1 用“ ε - N ”的方法证明: 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$, 则

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |x_n| = |a|。$$

证 由假设知, 对任意给定 $\varepsilon > 0$, 存在 $N > 0$, 当 $n > N$ 时, 成立

$$|x_n - a| < \varepsilon。$$

$$\therefore ||x_n| - |a|| \leq |x_n - a|,$$

$$\therefore n > N \text{ 时, 成立}$$

$$||x_n| - |a|| < \varepsilon,$$

即

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |x_n| = |a|。$$

例 2 已知数列 $\{x_n\}$ 满足条件

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n - x_{n-2}) = 0,$$

证明: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n - x_{n-1}}{n} = 0。$

证 由 $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n - x_{n-2}) = 0$, 对任意给定的 $\frac{\varepsilon}{2} > 0$, 存在 $N >$

2, 使当 $n \geq N$ 时有