高等数学复习与题解

张仁德　　汪惠鑫
　　　　　　　　　　编
蒋中鑫　　黄金坤

化学工业出版社

内 容 简 介

本书基本上是参照高等工科院校高等数学教学大纲的要求编写的，此外也是编者多年来从事高等数学教学、辅导工作的结晶。

全书共分十二章，内容包括一元、多元函数的极限与连续；一元、多元函数的微分学与积分学；无穷级数及常微分方程。本书的特点是叙述简要、清晰；例题多样，典型灵活且具有启发性；配有较多的习题，且都附有解答。

本书是报考工科硕士研究生的复习指导材料，是工科大学生、电大、职大学员及自学高等数学者的辅导材料，也可供从事工科数学教学的教师参考。

高等数学复习与题解

张仁德 汪惠鑫
蒋中鑫 黄金坤 编

责任编辑：李诵雪
封面设计：郑小红

*

化学工业出版社出版发行
（北京和平里七区十六号楼）
化学工业出版社印刷厂印刷
新华书店北京发行所经销

*

开本850×1168 1/32 印张17 1/2 字数495千字
1989年12月第1版 1989年12月北京第1次印刷
印 数 1－2,830
ISBN 7-5025-0314-5/O·5
定 价8.60元

前　言

本书是参照高等工科院校高等数学教学大纲的要求编写的。全书共分十二章，内容含有一元、多元函数的极限与连续；一元、多元函数的微分学和积分学；无穷级数及常微分方程。

全书各章都对基本内容作了纲要性的叙述，并作了适当的延伸，叙述力求简要、严谨、清晰。各章都有较多的例题，这些例题类型多样、灵活典型，具有启发性。每章还配备了较多的习题，这些题许多是我们多年在教学、辅导中积累的，还有不少是近年来各校招考硕士研究生的入学试题，综合性灵活性较强，有利于提高分析问题及解题能力。所有习题都附有解答，便于读者参考。

本书是准备报考（非数学专业）硕士研究生的综合复习资料；是工科大学生、电大、职工大学学员及自学高等数学者的辅导材料；也可供从事工科高等数学教学的教师参考。

本书由张仁德、汪惠鑫，蒋中鑫、黄金坤四人编写，其中第一、二、十一章由张仁德编写；第三、六、十二章由汪惠鑫编写；第四、五章由蒋中鑫编写；第七、八、九、十章由黄金坤编写。全书由蒋中鑫统稿。

在此书编写过程中，参考了我院吴撷芳、李乾生、汪惠鑫、蒋中鑫、吴锦云、黄金坤、张仁德等编写的“高等数学复习与题解”讲义，还参考了其他有关资料。限于编者水平，书中缺点与错误难免，希广大读者批评指正。

编者

目　录

10.16

第一章 极 限

第一节 极限概念及有关定理

一、极限定义

1．数列x_n的极限定义

如果对于任意给定的正数ε，总存在正整数N，使得当$n>N$时，恒有$|x_n-A|<\varepsilon$（其中A为某个常数），则称A为数列x_n当n趋于无穷大时的极限。或者说数列x_n收敛于A，记作

$$\lim_{n\to\infty}x_n=A\text{或}x_n\to A，\text{当}n\to\infty。$$

如果数列极限不存在，就说数列是发散的。

特别，若$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$，则称$x_n$为$n\to\infty$时的无穷小量。

收敛数列只有一个极限，且收敛数列一定是有界的（但有界数列不一定收敛）。

2．函数的极限

（1）当$x\to x_0$时，函数$f(x)$以A为极限的定义

如果对于任意给定的正数ε，总存在正数δ，使得当$0<|x-x_0|<\delta$时，恒有$|f(x)-A|<\varepsilon$，则称A为函数$f(x)$当$x\to x_0$时的极限。记作

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=A\text{或}f(x)\to A，\text{当}x\to x_0。$$

（2）当$x\to\infty$时，函数$f(x)$以A为极限的定义

如果对于任意给定的正数ε，总存在正数N，使得当$|x|>N$时，恒有$|f(x)-A|<\varepsilon$，则称A是函数$f(x)$当$x\to\infty$时的极限。记作

$$\lim_{x\to\infty}f(x)=A\text{或}f(x)\to A，\text{当}x\to\infty。$$

同样，若$\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}}f(x)=0$，则称$f(x)$是$x\to x_0$（或$x\to\infty$）时的无穷小量。

(3) 函数$f(x)$的单侧极限

当$x<x_0$而$x\to x_0$时，若$f(x)$的极限存在，此极限称为函数$f(x)$当$x\to x_0$时的左极限。记作

$$\lim_{x\to x_0-0} f(x)\text{或}f(x_0-0)。$$

当$x>x_0$而$x\to x_0$时，若$f(x)$的极限存在，此极限称为函数$f(x)$当$x\to x_0$时的右极限。记作

$$\lim_{x\to x_0+0} f(x)\text{或}f(x_0+0)。$$

函数$f(x)$在x_0处的左右极限存在且相等是函数$f(x)$当$x\to x_0$时极限存在的充分必要条件。

3．有界函数与无界函数的定义

若存在一个正数M，使得对于所考虑的区间内的一切x的值，恒有$|f(x)|\leqslant M$，则称函数$f(x)$在该区间内是有界函数；若不存在这样的正数M，则称函数$f(x)$在该区间内是无界函数。

二、极限运算法则

这里只以函数极限为例，列出极限运算法则。对数列极限有完全类似的结果。

1．若$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$，则$f(x)=A+\alpha(x)$，其中$\lim\limits_{x\to x_0}\alpha(x)=0$。

2．有限个无穷小量之和、差、积仍为无穷小量。

3．有界函数与无穷小量的乘积仍为无穷小量。

4．在同一变化过程中，如果$f(x)$为无穷大量，则$\dfrac{1}{f(x)}$为无穷小量；如果$f(x)$为无穷小量，则$\dfrac{1}{f(x)}$为无穷大量。

5．若$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$，$\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)=B$，则

(1) $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)\pm\varphi(x)]=\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\pm\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)=A\pm B$；

(2) $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)\cdot\varphi(x)]=\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\cdot\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)=A\cdot B$；

(3) $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{\varphi(x)}=\lim\limits_{x\to x_0} f(x)/\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)=A/B$，$B\neq 0$。

6．若$p(x)$是多项式，则$\lim\limits_{x\to x_0}p(x)=p(x_0)$。

三、极限存在准则

1.柯西（Cauchy）准则

$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$存在的充分必要条件是：对于任意给定的正数$\varepsilon$，总存在正整数$N$，使得对满足$n>N$，$m>N$的一切$n$、$m$，恒有$|x_n-x_m|<\varepsilon$成立。

同样有：

$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$存在的充分必要条件是：对于任意给定的正数$\varepsilon$，总存在正数$\delta$，使得对满足不等式$0<|x'-x_0|<\delta$和$0<|x''-x_0|<\delta$的一切$x'$，$x''$，总有$|f(x'')-f(x')|<\varepsilon$成立。

2．单调有界变量的极限

单调有界数列必有极限；

若函数$f(x)$在开区间(a, b)内广义单调且有界，则$\lim\limits_{x\to x_0+}f(x)$及$\lim\limits_{x\to x_0-}f(x)$皆存在。

3．夹挤定理

对于数列有：

若$y_n\leqslant x_n\leqslant z_n$，$(n=1,2,\cdots)$，且$\lim\limits_{n\to\infty}y_n=\lim\limits_{n\to\infty}z_n=A$，则

$$\lim_{n\to\infty}x_n=A。$$

对于函数有：

若在点a的某个邻域（a点可除外）内，有

$$\varphi(x)\leqslant f(x)\leqslant h(x)\text{且}\lim_{x\to x_0}\varphi(x)=\lim_{x\to x_0}h(x)=A，\text{则}$$

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=A。$$

四、保号定理

如果$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$，且$A>0$（或$A<0$），那末存在$x_0$的某一邻域，当$x$在该邻域内，但$x\neq x_0$时，有$f(x)>0$（或$f(x)<0$）。

如果$f(x)\geqslant 0$（或$f(x)\leqslant 0$），且$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$，那末$A\geqslant 0$（或$A\leqslant 0$）。

这个定理在一些证明中有时起到重要的作用。

五、两个重要极限

1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$；

2. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x}=e$或$\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{1/x}=e$。

六、无穷小量的比较及等价无穷小代换定理

以下α，β，α'，β'等都是同一个自变量x的函数，且在x的同一趋向下，均是无穷小量。

1. 无穷小量的比较

若$\lim\dfrac{\alpha}{\beta}=A$；如果$A=0$，则称$\alpha$是比$\beta$高阶无穷小量；如果$A\neq 0$，则称$\alpha$与$\beta$是同阶无穷小量；特别当$A=1$时，则称$\alpha$与$\beta$是等价无穷小量。

等价无穷小量记作$\alpha\sim\beta$。

若$\lim\dfrac{\alpha}{\beta^{k}}=C\neq 0(K>0)$，则称$\alpha$是关于$\beta$的$K$阶无穷小量。

常用的等价无穷小量有：

$x\to 0$时，

$\sin x\sim x$，$\mathrm{tg}x\sim x$，$\arcsin x\sim x$，$\ln(1+x)\sim x$，$e^{x}-1\sim x$。

$$(1+x)^{\alpha}-1\sim\alpha x,\ 1-\cos x\sim\frac{x^{2}}{2}.$$

2. 极限运算中的等价无穷小代换定理

设$\alpha\sim\alpha'$，$\beta\sim\beta'$，

（1）如果$\lim\dfrac{\alpha'}{\beta'}$存在，则$\lim\dfrac{\alpha}{\beta}$也存在，且

$$\lim\frac{\alpha}{\beta}=\lim\frac{\alpha'}{\beta'}.$$

（2）如果$\lim\dfrac{\alpha' f(x)}{\beta'}$存在，则$\lim\dfrac{\alpha f(x)}{\beta}$也存在，且

$$\lim\frac{\alpha f(x)}{\beta}=\lim\frac{\alpha' f(x)}{\beta'}。$$

这个定理说明在乘积因子中，可以换入与其等价无穷小量的因子。

七、罗必塔（L' Hospital）法则

定理 1 若

（1）函数$f(x)$与$F(x)$在点x_0的某一邻域内除点x_0外，处处可微，且$F'(x)\neq 0$；

（2）$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\lim\limits_{x\to x_0}F(x)=0$；

（3）$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f'(x)}{F'(x)}$存在（或为$\infty$）

则 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{F(x)}$也存在，且

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{F(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{F'(x)}.$$

定理 2 若

（1）函数$f(x)$与$F(x)$在点x_0的某一邻域内除点x_0外，处处可微，且$F'(x)\neq 0$；

（2）$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\lim\limits_{x\to x_0}F(x)=\infty$；

（3）$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f'(x)}{F'(x)}$存在（或为$\infty$），

则 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{F(x)}$也存在（或为$\infty$），且

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{F(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{F'(x)}.$$

定理 1 和定理 2 对$x\to\infty$时亦成立。

其它形式的未定式，如$0\cdot\infty$，$\infty-\infty$，0^0，1^∞，∞^0等的极限都

可以归结到这两个法则来进行计算。

第二节　二元函数的极限

一、二重极限

设$f(x,\ y)$在$M_0(x_0,\ y_0)$的某一邻域内（M_0点可以除外）有定义，若对于任意给定的$\varepsilon>0$，总存在$\delta>0$，使得对满足$0<\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<\delta$的一切$x$，$y$，总有$|f(x,\ y)-A|<\varepsilon$成立，则称常数$A$为$f(x,\ y)$在$M_0(x_0,\ y_0)$处（或当$M(x,\ y)$趋向于$M_0(x_0,\ y_0)$时）的极限。记作

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,\ y)=A\text{或}\lim_{M\to M_0} f(M)=A。$$

二、累次极限

先x后y的累次极限

固定$y(y\neq y_0)$，让x趋向于x_0，求极限。如果这个极限存在，则这个极限与y有关，记作

$$\lim_{x\to x_0} f(x,\ y)=\varphi(y)。$$

上式中再让y趋向于y_0求极限，假若极限存在，记作

$$\lim_{y\to y_0}\varphi(y)=A。$$

则称A为$f(x,\ y)$在$M_0(x_0,\ y_0)$点的先x后y的累次极限。记作

$$\lim_{y\to y_0}\lim_{x\to x_0} f(x,\ y)=\lim_{y\to y_0}[\lim_{x\to x_0} f(x,\ y)]。$$

同样可以定义先y后x的累次极限

$$\lim_{x\to x_0}\lim_{y\to y_0} f(x,\ y)=\lim_{x\to x_0}[\lim_{y\to y_0} f(x,\ y)]。$$

累次极限实际上是一元函数的极限；二重极限才真正是二元函数的极限。在一元函数的极限中，x趋向于x_0的方向只有左右两个方向，而二元函数的二重极限，点M可以在平面上以任意方式趋向点M_0，这就决定了二元函数的二重极限要比一元函数的极限复杂得多。

三、二重极限与累次极限的关系

二重极限存在不能保证两个累次极限存在。

两个累次极限$\lim\limits_{x\to x_0}\lim\limits_{y\to y_0}f(x,y)$和$\lim\limits_{y\to y_0}\lim\limits_{x\to x_0}f(x,y)$存在而且相等，也不能保证二重极限存在。

二重极限$\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}}f(x,y)=A$存在，且$\lim\limits_{y\to y_0}f(x,y)=\varphi(x)$存在，则先$y$后$x$的累次极限$\lim\limits_{x\to x_0}\lim\limits_{y\to y_0}f(x,y)$存在，且

$$\lim_{x\to x_0}\lim_{y\to y_0}f(x,y)=\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}}f(x,y)。$$

两个累次极限存在但不相等，那么二重极限一定不存在。

如果点$M(x,y)$沿着两条不同的路径趋于$M_0(x_0,y_0)$时，所得极限值不同，那么二重极限一定不存在。

第三节 例 题

一、用极限定义求极限

例 1 用“$\varepsilon-N$”的方法证明：若$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$，则

$$\lim_{n\to\infty}|x_n|=|a|。$$

证 由假设知，对任意给定$\varepsilon>0$，存在$N>0$，当$n>N$时，成立

$$|x_n-a|<\varepsilon。$$

$\because$
$$||x_n|-|a||\leqslant|x_n-a|,$$

$\therefore$ $n>N$时，成立

$$||x_n|-|a||<\varepsilon,$$

即
$$\lim_{n\to\infty}|x_n|=|a|。$$

例 2 已知数列$\{x_n\}$满足条件

$$\lim_{n\to\infty}(x_n-x_{n-2})=0,$$

证明：$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_n-x_{n-1}}{n}=0$。

证 由$\lim\limits_{n\to\infty}(x_n-x_{n-2})=0$，对任意给定的$\dfrac{\varepsilon}{2}>0$，存在$N>2$，使当$n\geqslant N$时有