

数理化自学丛书

三角

51.24
667
C.2

数理化自学丛书

三

角

数理化自学丛书编委会
数学编写小组编

210526.32
江苏工业学院图书馆
藏书章

上海科学技术出版社

数理化自学丛书

三 角

数理化自学丛书编委会

数 学 编 写 小 组 编

上海科学技术出版社出版

(上海瑞金二路 450 号)

北 京 出 版 社 重 印

北京市新华书店发行

北京新华印刷厂印刷

开本 787×1092 1/32 印张 10.75 字数 235,000

1963 年 10 月第 1 版 1978 年 12 月第 1 次印刷

书号: 13119 · 532 定价: 0.71 元

内 容 提 要

本书是数理化自学丛书中的一本，介绍中学三角课程的全部内容，只要具备平面几何和代数的初步知识即可阅读。本书叙述浅显易懂，对关键性问题讲解得特别详细，对于不易理解的内容适当分散，使逐步深入。书中附有大量习题可作为练习。书中用小一号字体排印的某些章节，初次阅读时如有困难，可以暂时略去。题号前附有*号的，是较难的题目，初学时可以暂时不做。

本书可供青年工人、知识青年、在职干部自学之用，也可供中等学校青年教师参考。

重 印 说 明

《数理化自学丛书》是一九六六年前出版的。计有《代数》四册，《平面几何》二册，《三角》一册，《立体几何》一册，《平面解析几何》一册；《物理》四册；《化学》四册。这套书的特点是：比较明白易懂，从讲清基本概念出发，循序前进，使读者易于接受和理解，并附有不少习题供练习用。这套书可以作为青年工人、知识青年和在职干部自学之用，也可供中等学校青年教师教学参考，出版以后，很受读者欢迎。但是在“四人帮”及其余党控制上海出版工作期间，这套书横被扣上所谓引导青年走白专道路的罪名，不准出版。

英明领袖华主席和党中央一举粉碎了祸国殃民的“四人帮”。我国社会主义革命和社会主义建设进入新的发展时期。党的第十一次全国代表大会号召全党、全军、全国各族人民高举毛主席的伟大旗帜，在英明领袖华主席和党中央领导下，为完成党的十一大提出的各项战斗任务，为在本世纪内把我国建设成为伟大的社会主义的现代化强国，争取对人类作出较大的贡献，努力奋斗。许多工农群众和干部，在党的十一大精神鼓舞下，决心紧跟英明领袖华主席和党中央，抓纲治国，大干快上，向科学技术现代化进军，为实现四个现代化作出贡献，他们来信要求重印《数理化自学丛书》。根据读者的要求，我们现在在原书基础上作一些必要的修改后，重新出版这套书，以应需要。

十多年来，科学技术的发展是很快的。本丛书介绍的虽仅是数理化方面的基础知识，但对于应予反映的科技新成就方面内容，是显得不够的。同时，由于本书是按读者自学的要求编写的，篇幅上就不免有些庞大，有些部分也显得有些烦琐。这些，要请读者在阅读时加以注意。

对本书的缺点，希望广大读者批评指出，以便修订时参考。

一九七八年一月

34116

目 录

重印说明

第一章 锐角的三角函数1

§1.1 锐角的三角函数的定义1

§1.2 已知某锐角的一个三角函数,求作这个角6

§1.3 余角的三角函数9

§1.4 $30^\circ, 45^\circ, 60^\circ$ 角的三角函数11

§1.5 间隔为 1° 的三角函数表 16

§1.6 角由 0° 变到 90° 时,三角函数的变化19

§1.7 四位数学用表中的三角函数表23

§1.8 直角三角形的解法29

本章提要36

复习题一38

第二章 任意角的三角函数41

§2.1 大于 90° 的角和负角41

§2.2 直角坐标系44

§2.3 任意角的三角函数49

§2.4 三角函数值的符号53

§2.5 已知某角的一个三角函数的值,求作角55

§2.6 $n \cdot 360^\circ + \alpha$ 与任意角 α 的三角函数间的关系59

§2.7 $180^\circ - \alpha, 180^\circ + \alpha, 360^\circ - \alpha$ 与锐角 α 的三角函数间的关系60

§2.8 $-\alpha$ 与任意角 α 的三角

函数间的关系66

§2.9 已知一个三角函数的值,求角70

§2.10 $90^\circ + \alpha, 270^\circ - \alpha, 270^\circ + \alpha$ 与锐角 α 的三角函数间的关系73

§2.11 诱导公式的一般性77

§2.12 同角的三角函数间的关系82

本章提要89

复习题二90

第三章 三角函数的图象和性质93

§3.1 弧度制93

§3.2 用线段表示三角函数98

§3.3 三角函数的图象102

§3.4 三角函数的定义域112

§3.5 三角函数的性质115

§3.6 一般正弦函数 $y = A \sin(n\omega + \alpha)$ 的图象 123

本章提要129

复习题三131

第四章 加法定理和它的推论 133

§4.1 两角和的正弦和余弦133

§4.2 两角和的正弦公式和余弦公式的一般性136

§4.3 两角和的正切和余切141

§4.4 两角差的三角函数143

§4.5 二倍角的三角函数146

§ 4.6 半角的三角函数.....152	§ 6.7 已知两边和它们的夹角, 利用对数解斜三角形...219
§ 4.7 三角函数的积化为和...158	§ 6.8 半角定理.....222
§ 4.8 三角函数的和化为积...161	§ 6.9 已知三边, 利用对数解 斜三角形.....225
§ 4.9 化 $a \sin x + b \cos x$ 成一 个角的正弦.....167	§ 6.10 三角形的面积.....228
§ 4.10 三角形内角的三角函数 间的关系.....169	§ 6.11 三角形的外接圆的半 径.....232
本章提要.....172	§ 6.12 三角形的内切圆的半 径.....234
复习题四.....174	本章提要.....237
第五章 斜三角形的解法176	复习题六.....238
§ 5.1 斜三角形解法的分类...176	第七章 反三角函数241
§ 5.2 正弦定理.....177	§ 7.1 反函数.....241
§ 5.3 已知两角和一边, 解斜 三角形.....180	§ 7.2 反正弦.....243
§ 5.4 已知两边和其中一边的 对角, 解斜三角形183	§ 7.3 反余弦.....249
§ 5.5 余弦定理.....191	§ 7.4 反正切.....254
§ 5.6 已知两边和它们的夹 角, 用余弦定理解斜三 角形.....195	§ 7.5 反余切.....259
§ 5.7 已知三边, 用余弦定理 解斜三角形.....197	§ 7.6 反三角函数的三角运 算.....262
本章提要.....201	§ 7.7 反三角函数间的基本关 系.....266
复习题五.....202	本章提要.....270
第六章 利用对数解三角形 ...204	复习题七.....271
§ 6.1 三角函数对数表.....204	第八章 三角方程273
§ 6.2 利用三角函数对数表进 行计算.....207	§ 8.1 最简三角方程.....273
§ 6.3 利用对数解直角三角 形.....209	§ 8.2 只含同角的同名三角函 数的三角方程.....278
§ 6.4 已知两角和一边, 利用 对数解斜三角形.....212	§ 8.3 可化成含同角的同名三 角函数的三角方程.....282
§ 6.5 已知两边和一边的对角, 利用对数解斜三角形...214	§ 8.4 可化成一边为零而另一 边是若干个因式的积的 三角方程.....285
§ 6.6 正切定理.....217	§ 8.5 形如 $a \sin x + b \cos x = c$ 的三角方程的解法.....289

§ 8.6 $\sin x$ 和 $\cos x$ 的齐次方	复习题八.....302
程的解法.....292	总复习题.....304
§ 8.7 三角方程的图象解法...296	习题答案.....316
本章提要.....301	

第一章 锐角的三角函数

§1.1 锐角的三角函数的定义

从平面几何学中,我们知道:

在直角三角形中,如果一个锐角等于 30° , 那末这个锐角所对的直角边等于斜边的一半. 换句话说, 也就是, 30° 的角所对的直角边和斜边的比等于 $\frac{1}{2}$. 这个性质同三角形的大小是没有关系的.

三角学首先要研究这样的问题: 如果直角三角形的锐角不是 30° , 而是任何其他的锐角, 它的对边和斜边的比是不是也有确定的值呢?

我们来看图 1.1. 在这个图中, 我们看到, 以 A 为端点的两条射线 AD 和 AE 组成了一个锐角. 如果从 AD 上任意的点 $B, B', B'', \dots$ 作 AE 的垂线 $BC, B'C', B''C'', \dots$, 那末, 就得到一连串的直角三角形 $ABC, AB'C', AB''C'', \dots$ 等等. 因为这些直角三角形有一个公共角 A , 所以它们是相似的.

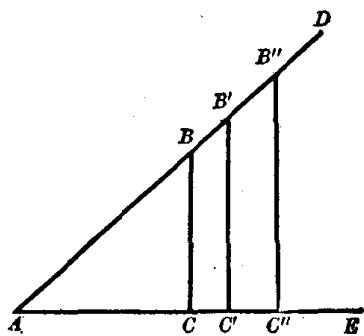


图 1.1

我们知道, 相似三角形对应边的比是相等的, 所以在直角

三角形 ABC 和 $AB'C'$ 中,就有

$$\frac{BC}{B'C'} = \frac{AB}{AB'},$$

因而

$$\frac{BC}{AB} = \frac{B'C'}{AB'}.$$

同样可以知道

$$\frac{B'C'}{AB'} = \frac{B''C''}{AB''}.$$

因此,

$$\frac{BC}{AB} = \frac{B'C'}{AB'} = \frac{B''C''}{AB''} = \dots\dots.$$

就是, 在所有的直角三角形中, $\angle A$ 的对边和斜边的比都是相等的. 换句话说, 只要 $\angle A$ 的大小确定, 那末, 在用它做一个锐角画出的直角三角形中, $\angle A$ 的对边和斜边的比就是一个确定的数.

当某一个量确定的时候, 和它有关的另一个量如果有确定的值, 那末, 我们就把第二个量叫做第一个量的函数.

例如, 当正方形的边长 a 有确定的值的时候, 正方形的面积 a^2 就完全确定了. 这里正方形的边长是一个量, 正方形的面积是另一个量. 我们说, 正方形的面积是边长 a 的函数.

又如, 假定圆的直径用 d 表示, 那末圆的周长就等于 πd . 这里, 圆的直径是一个量, 圆的周长是另一个量. 因为当圆的直径有确定的值的时候, 圆的周长也就确定, 所以我们说, 圆的周长是直径 d 的函数.

同样, 在图 1.1 中, $\angle A$ 是一个量; 当这个量有确定的值的时候, 在用它做锐角所画出的直角三角形中, 也有一个量跟着确定了. 这个量就是上面所说的对边和斜边的比. 因此我们可以说, 在直角三角形 ABC 中, $\angle A$ 的对边和斜边的比

$\frac{BC}{AB}$ 是 $\angle A$ 的函数.

我们要注意,正方形的面积可以根据边长 a 计算出来;圆的周长也可以根据直径 d 计算出来. 所以看到算式 a^2 , 就知道它是 a 的函数; 看到算式 πd , 也就知道它是 d 的函数. 但是 $\frac{BC}{AB}$ 却不能简单地用一个算式根据 $\angle A$ 的度数计算出来. 为了要说明 $\frac{BC}{AB}$ 是 $\angle A$ 的函数, 我们应用一个专门的记号“ $\sin A$ ”来表示. 记号“ $\sin A$ ”读做“ $\angle A$ 的正弦”.

以后看到“ $\sin A$ ”这个记号, 就应当联想到它就表示: 在以 $\angle A$ 为锐角的直角三角形中, $\angle A$ 的对边和斜边的比, 就是

$$\sin A = \frac{\angle A \text{ 的对边}}{\text{斜边}}.$$

为了方便, 我们通常用 C 表示直角三角形 ABC 的直角, 并且用小写字母 a 表示 $\angle A$ 的对边, b 表示 $\angle B$ 的对边, c 表示斜边(图 1.2). 这样就有

$$\sin A = \frac{a}{c}.$$

一个直角三角形有三条边. 任意取两条可以组成六个不同的比. 它们是

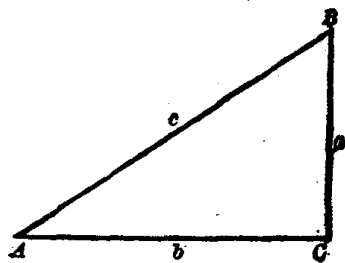


图 1.2

$$\frac{a}{c}, \frac{b}{c}, \frac{a}{b}, \frac{b}{a}, \frac{c}{b}, \frac{c}{a}.$$

大家很容易想到, 不但 $\frac{a}{c}$ 跟着 $\angle A$ 的大小而确定, 其他五个比一定也是跟着 $\angle A$ 的大小而确定的.

第一个比 $\frac{a}{c}$ 已经把它叫做 $\angle A$ 的正弦了. 其他五个比也都是 $\angle A$ 的函数. 我们都给它们规定一个名称. 现在把所

有六个函数的名称、定义和记号,一起列在下面的表里.

函数的名称	记号 ^①	定 义
$\angle A$ 的正弦	$\sin A$	$\sin A = \frac{\angle A \text{ 的对边}}{\text{斜边}} = \frac{a}{c}$
$\angle A$ 的余弦	$\cos A$	$\cos A = \frac{\angle A \text{ 的邻边}^{(2)}}{\text{斜边}} = \frac{b}{c}$
$\angle A$ 的正切	$\operatorname{tg} A$	$\operatorname{tg} A = \frac{\angle A \text{ 的对边}}{\angle A \text{ 的邻边}} = \frac{a}{b}$
$\angle A$ 的余切	$\operatorname{ctg} A$	$\operatorname{ctg} A = \frac{\angle A \text{ 的邻边}}{\angle A \text{ 的对边}} = \frac{b}{a}$
$\angle A$ 的正割	$\sec A$	$\sec A = \frac{\text{斜边}}{\angle A \text{ 的邻边}} = \frac{c}{b}$
$\angle A$ 的余割	$\operatorname{cosec} A$	$\operatorname{cosec} A = \frac{\text{斜边}}{\angle A \text{ 的对边}} = \frac{c}{a}$

$\angle A$ 的所有这些函数,总起来叫做 $\angle A$ 的三角函数.

知道了锐角三角函数的定义以后,自然会引起下面的问题:已有了一个锐角,怎样算出它的三角函数值呢?我们举例说明如下:

例 1. 求 35° 角的三角函数值.

【解】用量角器作一个 35° 的角 A (图 1.3). 过 $\angle A$ 的一边上任意一点 B , 例如取 $AB=10$ 厘米, 向另一边作垂线 BC .

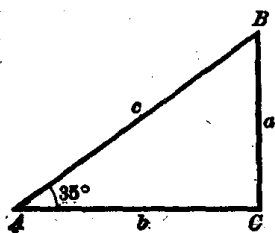


图 1.3

尽可能准确地量出直角三角形的其他两边的长,得 $BC=5.7$ 厘米, $AC=8.2$ 厘米. 于是,我们就可把测量和计算的结果写成下面的形式:

$$A=35^\circ,$$

$$a=5.7, \quad b=8.2, \quad c=10.$$

① 表示 $\angle A$ 的正切、余切和余割的记号,有些书上分别写做 $\tan A$, $\cot A$, $\csc A$.

② 在直角三角形 ABC 里,锐角 A 夹在斜边 c 和直角边 b 之间. 直角边 b 可以简单叫做 $\angle A$ 的邻边.

$$\sin 35^\circ = \frac{a}{c} = \frac{5.7}{10} = 0.57;$$

$$\cos 35^\circ = \frac{b}{c} = \frac{8.2}{10} = 0.82;$$

$$\operatorname{tg} 35^\circ = \frac{a}{b} = \frac{5.7}{8.2} = 0.70;$$

$$\operatorname{ctg} 35^\circ = \frac{b}{a} = \frac{8.2}{5.7} = 1.4;$$

$$\sec 35^\circ = \frac{c}{b} = \frac{10}{8.2} = 1.2;$$

$$\operatorname{cosec} 35^\circ = \frac{c}{a} = \frac{10}{5.7} = 1.7.$$

因为我们量 a 和 b 的长,都只量出两个数字,所以根据它们算出来的结果,从第一个不是零的数字起,也只有开头两个数字是可以信任的,下面就四舍五入。

在画直角三角形的时候,取 $c=10$ 厘米,只是为了计算正弦和余弦的值可以方便一些。我们也可以取其他的值。

例 2. 在直角三角形 ABC 中,已知 $a=4$, $b=5$, 求 $\angle A$ 的正弦,余弦,正切和余切。

【解】 先根据几何学里的勾股定理算出

$$c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{4^2 + 5^2} = \sqrt{41},$$

然后根据三角函数的定义,求得

$$\sin A = \frac{a}{c} = \frac{4}{\sqrt{41}} = \frac{4}{41} \sqrt{41};$$

$$\cos A = \frac{b}{c} = \frac{5}{\sqrt{41}} = \frac{5}{41} \sqrt{41};$$

$$\operatorname{tg} A = \frac{a}{b} = \frac{4}{5};$$

$$\operatorname{ctg} A = \frac{b}{a} = \frac{5}{4}.$$

习 题 1.1

1. 求 50° 角的六个三角函数值.
2. 已知 $a=40$, $c=41$; 求 $\angle A$ 的六个三角函数值.
3. 已知 $a=5$, $b=12$; 求 $\angle A$ 的正弦, 余弦, 正切和余切. 当 $a=10$, $b=24$ 时, $\angle A$ 的这些三角函数值有没有变化? 为什么?
4. 已知斜边 AB 等于直角边 AC 的三倍; 求 $\angle A$ 的正弦, 余弦, 正切和余切.
5. 已知 $a=\frac{1}{2}b$; 求 $\angle A$ 的正弦, 余弦, 正割和余割.
6. 已知 $a=2mn$, $b=m^2-n^2$; 根据定义求 $\angle A$ 的正弦, 正切和正割及 $\angle B$ 的余弦, 余切和余割. 比较它们的结果, 你发现了什么?
- *7. 已知 $a=2\sqrt{mn}$, $c=m+n$ ($m>n>0$); 求 $\sin A$, $\cos A$ 和 $(\sin A)^2 + (\cos A)^2$ 的值.

§1.2 已知某锐角的一个三角函数, 求作这个角

在上一节的例 1 中, 已知一个锐角, 我们用画图的方法求出了这个角的三角函数的近似值. 现在我们研究相反的问题: 已知某一锐角的一个三角函数, 怎样画出这个锐角? 举例说明如下:

例 1. 已知一个锐角的正弦等于 $\frac{4}{5}$, 求作这个锐角.

【解】 一个锐角的正弦, 就是在以它做一个锐角的直角三角形中, 这个角的对边和斜边的比. 现在已知它的正弦的值是 $\frac{4}{5}$. 要画出这个锐角, 就应当画一个直角三角形, 使一条直角边和斜边的比等于 $\frac{4}{5}$. 这样, 这条直角边的对角就是所求作的角.

因此，我们可以任意取一个长度单位(例如 1 厘米)，作 $BC=4$ 厘米(图 1.4). 从 C 作 BC 的垂线 CD . 以 B 为圆心，以 5 厘米为半径，作弧交 CD 于 A ，并且连结 AB . 这时，直角三角形 ABC 中， $\angle BAC$ 就是所求作的锐角.

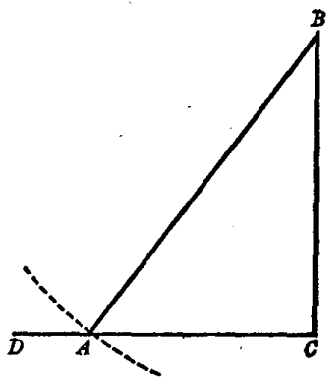


图 1.4

用量角器可以量得这个角约等于 53° (简写做 $\angle A \approx 53^\circ$).

例 2. 已知一个锐角的余弦等于 0.79, 求作这个锐角.

【解】 0.79 就是 $\frac{79}{100}$. 为了使图形不要画得太大，我们可以取 1 毫米 (就是 $\frac{1}{10}$ 厘米) 作为长度单位.

因为锐角的余弦，就是在直角三角形中，这个角的邻边和斜边的比，所以我们先作 $AC=79$ 毫米(图 1.5)，从 C 作 AC 的垂线 CD ，然后以 A 为圆心，以 100 毫米为半径作弧交 CD

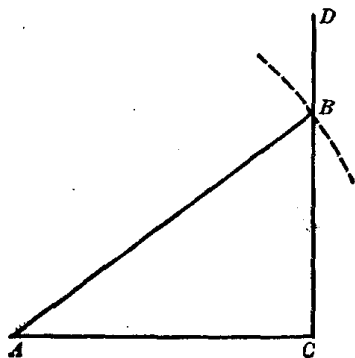


图 1.5

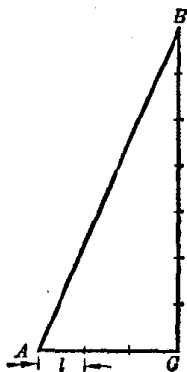


图 1.6

于 B , 并且连结 AB . $\angle A$ 就是所求作的锐角.

用量角器可以量得 $\angle A \approx 38^\circ$.

例 3. 已知 $\operatorname{tg} A = 2\frac{1}{3}$, 求作锐角 A .

【解】 我们把 $2\frac{1}{3}$ 写成 $\frac{7}{3}$. 取适当的长度单位 l (图 1.6), 作直角 C . 在它的一边上截取 $CB=7l$, 在另一边上截取 $CA=3l$. 连结 AB . 那末, 直角三角形 ABC 中的 $\angle A$ 就是所求作的锐角.

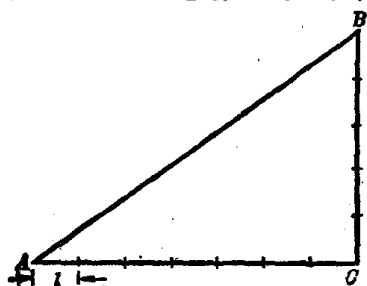


图 1.7

例 4. 已知 $\operatorname{ctg} A = 1.4$, 求作锐角 A .

【解】 这里, $1.4 = \frac{14}{10} = \frac{7}{5}$. 取适当的长度单位 l . 我们

在直角 C (图 1.7) 的两边上分别取 $AC=7l$, $CB=5l$. 连结 AB . 直角三角形 ABC 中的 $\angle A$ 就是所求作的锐角.

从上面的这些例题中, 我们看到, 要画出具有已知三角函数值的锐角 A , 它的一般步骤是:

把已知的三角函数值表示成分数 $\frac{m}{n}$ 的形式.

已 知	直角三角形的边长	
$\sin A = \frac{m}{n}$	$a=m,$	$c=n$
$\cos A = \frac{m}{n}$	$b=m,$	$c=n$
$\operatorname{tg} A = \frac{m}{n}$	$a=m,$	$b=n$
$\operatorname{ctg} A = \frac{m}{n}$	$b=m,$	$a=n$

选取一个适当的长度单位, 画直角三角形 ABC , 使 $\angle C$ 是直角, 并且使 $\angle A$, $\angle B$ 和 $\angle C$ 的对边 a , b 和 c 分别适合于上面表中的条件.

这样, 直角三角形 ABC 中的角 A 就是所求作的锐角.

习 题 1.2

1. 已知一个锐角的正弦等于 0.5, 作出这个锐角; 并量量看大约等于多少度?
2. 已知 $\cos A = 0.7$, 作出锐角 A ; 并量出它的近似值.
3. 已知一个锐角的正割等于 1.5; 求作这个锐角.
4. 已知 $\operatorname{cosec} A = 2$; 求作锐角 A .
5. 已知 $\operatorname{tg} A = \frac{5}{4}$; 作出锐角 A , 并量出它的近似值.
6. 已知 $\operatorname{ctg} A = \frac{4}{5}$; 作出锐角 A , 并和前题中所求的角作比较.

§1.3 余角的三角函数

在 §1.1 中我们已经知道, 每一个锐角都有六个三角函数. 在图 1.8 的直角三角形 ABC 中, 除了 $\angle A$ 是锐角以外, $\angle B$ 也是锐角. 因此, $\angle B$ 也有六个三角函数. 根据 §1.1 中讲过的三角函数的定义, 可以知道 $\angle B$ 的六个三角函数是

$$\sin B = \frac{\angle B \text{ 的对边}}{\text{斜边}} = \frac{b}{c};$$

$$\cos B = \frac{\angle B \text{ 的邻边}}{\text{斜边}} = \frac{a}{c};$$

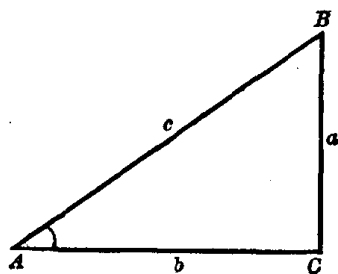


图 1.8