

技術微積分

原著者 H. R. Stillwell

D. H. Price

譯述者 黃 穗 群

校訂者 熊 烈 豆

科技圖書股份有限公司

引 言

坊間出版的中文微積分書籍，已逾廿種，厚者達千頁最薄者亦在三百頁以上，欲求一簡單扼要、切合實用，既不浪費學習時間，其內容又易吸收實用者，實不易得。在數以百計的原版微積分書中，選擇到這一本書，經多方研究認為適合以上要求，遂急切譯出，以應需要。

此書篇幅較少，內容簡明，原作為二年制工業專科學校的教本，每週二小時在一年內讀畢，即可應付此短短二年中的專門學課的應用。本公司鑒於近年來公佈專科學校（二年制）課程標準，將微積分的學習時縮短至四學分，則以往出版的各種微積分教科書，均將感到內容太多而無法修習完畢，則本書的譯印將適應此項要求而達成其目的，自無疑義。

本書由黃穗群小姐初譯，譯文忠實而簡潔，經本公司編審部另請熊烈豆教授逐句校訂修詞，以期無誤而示鄭重負責。特將本書編印原委說明如上，幸垂察焉。

科技圖書公司編審部 誌

六十五年元旦日

序

這本教科書專為工業專科學校（二年制短期學院）所需的微積分課程而編輯的。

本書所需的預備數學知識，是三角、代數與對數各門。為了某些學生對這些預備數學雖曾學過，但已荒疏有年，在首先列出一些簡單扼要的內容，以供複習之用。

本書的若干重點，特予提出加以說明如下：

1. 在工業（技術）方面使用的實際問題所需的練習題，特別注重編入。
2. 強調用圖示來表達。
3. 用代數的極限來發展微分及積分觀念。
4. 保持教科書內容儘可能的簡單，將冗長的證明減至最少。
5. 舉例特多，並列出逐步詳解。
6. 循表達順序，確保教材能繼續發展。

一覽本書的目錄，即可瞭解教材內容的簡明程度，為求補充容易，將本書內容作基本的分類，每一分類可獨成系統。而這些系統的結構，可使教師能把握重點，就某種要求的重要性以定其課業的進步。

謝詞略。

司帝威 *H. Richard Stillwell*

柏勞斯 *Dennis H. Price*

表 1 常用數學符號

符號	意義	符號	意義
\times 或 \cdot	乘以	\gg	過大於
\div 或 $:$	除以	$<$	小於
$+$	正、加、加上	\ll	過小於
$-$	負、減、減去	\geq	大於或等於
\pm	加或減	\leq	小於或等於
\mp	減或加	\therefore	故
$=$ 或 $::$	等於	\angle	角
\equiv	恆等	Δ	增量或減量
\approx	接近等於	\perp	垂直於
\neq	不相等	\parallel	平行於
$>$	大於	$ n $	n 之絕對值

表 2. 希臘字母

大寫	小寫	讀音	大寫	小寫	讀音
A	α	Alpha	N	ν	Nu
B	β	Beta	Ξ	ξ	Xi
Γ	γ	Gamma	O	\omicron	Omicron
Δ	δ	Delta	Π	π	Pi
E	ϵ	Epsilon	P	ρ	Rho
Z	ζ	Zeta	Σ	σ	Sigma
H	η	Eta	T	τ	Tau
Θ	θ	Theta	Υ	υ	Upsilon
I	ι	Iota	Φ	ϕ	Phi
K	κ	Kappa	X	χ	Chi
Λ	λ	Lambda	Ψ	ψ	Psi
M	μ	Mu	Ω	ω	Omega

技術微積分

目 錄

序	
表1 常用數學符號	
表2 希臘字母	
引言	1

第一章 三角學

1 - 1 直角三角形	10
1 - 2 習題	14
1 - 3 斜三角形	14
1 - 4 弧度量	17
1 - 5 三角函數圖形	20
1 - 6 恆等式	22

第二章 解析幾何

2 - 1 距離公式	26
2 - 2 圓	28
2 - 3 拋物線定義	30
2 - 4 拋物線方程式	32
2 - 5 對稱法則	34
2 - 6 拋物線段線	37
2 - 7 習題	39
2 - 8 橢圓	41
2 - 9 離心率	42
2 - 10 習題	44

第三章 基本原則

3 - 1	常數與變數	45
3 - 2	自變數與應變數	45
3 - 3	函數	46
3 - 4	代數與超越函數	47
3 - 5	漸增與漸減函數	48
3 - 6	顯函數與隱函數	49
3 - 7	連續函數	49
3 - 8	無窮大與無窮小	49
3 - 9	無窮大與無窮小之階	50
3 - 10	無窮小的幾何圖例	52
3 - 11	公理	53
3 - 12	習題	56

第四章 微積分定義

4 - 1	傳統的數學訓練—微積分	60
4 - 2	習題	61
4 - 3	函數符號	61
4 - 4	直線函數之方程式	63
4 - 5	斜截式	65
4 - 6	曲線之斜率	67
4 - 7	傳統代數微分	69
4 - 8	極限	75
4 - 9	極限法則	78
4 - 10	習題	80

第五章 導數之定義

5 - 1	代數極限	83
5 - 2	落體極限	83
5 - 3	習題	86
5 - 4	加速度	87

5 - 5	應用	90
5 - 6	代數極限之擴展	91
5 - 7	應用	92

第六章 微分

6 - 1	導數法則	96
6 - 2	常數之導數	96
6 - 3	單項式之導數	97
6 - 4	多項式之導數	100
6 - 5	常數乘函數之導數	101
6 - 6	函數和之導數	103
6 - 7	函數乘積之導數	104
6 - 8	分數函數之導數	107
6 - 9	指數函數之導數	109
6 - 10	函數倒數之導數	110
6 - 11	微分法則表彙	111
6 - 12	極限法則	111
6 - 13	微分	113
6 - 14	近似值	115
6 - 15	隱函數之微分	116
6 - 16	一般習題	119
6 - 17	高階導數之微分	119
6 - 18	習題	122

第七章 微分之應用

7 - 1	直線斜率	124
7 - 2	反曲點	128
7 - 3	習題	131
7 - 4	定最大與最小之技術	131
7 - 5	率	134

7 - 6 習題	135
----------------	-----

第八章 積分

8 - 1 積分之基本原則	138
8 - 2 基本法則	138
8 - 3 基本形式	141
8 - 4 習題	144
8 - 5 積分之常數	144
8 - 6 應用	147

第九章 積分之和

9 - 1 和之定義	149
9 - 2 不定積分	152
9 - 3 總和面積	153
9 - 4 定積分	156
9 - 5 指數函數之積分	157
9 - 6 代替積分法	159
9 - 7 部分積分法	160

第十章 三角函數

10- 1 三角函數公式	163
10- 2 經度量	164
10- 3 三角函數之作圖	166
10- 4 習題	167
10- 5 三角函數之微分	167
10- 6 習題	171
10- 7 三角函數之積分	171

第十一章 壓力

11- 1 靜態水壓力	175
-------------------	-----

11- 2	平坦表面上之壓力	176
11- 3	習題	179

第十二章 功

12- 1	功之定義	181
12- 2	功之計算	182
12- 3	應用	185

第十三章 函數之展開式

13- 1	麥克勞林定理	186
13- 2	展開 $y = (a + x)^6$	188
13- 3	習題	190
13- 4	二項式定理	190
13- 5	展開 $y = \sin x$	191
13- 6	展開 $y = \cos x$	191
13- 7	對數級數	192
13- 8	納皮爾或雙曲線對數	193
13- 9	指數級數	195
13-10	展開 $y = \tan^{-1}x$	196
13-11	麥克勞林定理之失效	196
13-12	戴勞定理	197
13-13	習題	204

第十四章 基礎微積分之基本法則

14- 1	微分法則	205
14- 2	最大與最小	207
14- 3	積分法則	207
14- 4	三角函數之積分	207
14- 5	一般積分法則	208
14- 6	面積法則	208

14-7	體積與面積	209
14-8	包含 $\sqrt{a+bx}$ 項之積分	209
14-9	包含 $\sqrt{a^2-x^2}$ 項之積分	210
14-10	包含 $\sqrt{x^2+a^2}$ 項之積分	210
14-11	三角式	211

附錄

表 1	1 至 100 的乘方--根--倒數 1 至 100	214
表 2	函數值與 值	215
表 3	數之對數	220
表 4	三角函數之對數	222
表 5	立體幾何圖形	227
表 6	立體解析幾何圖形	229
表 7	複代數	232
表 8	重要數學常數	234
表 9	度、分、秒換算成	235
表 10	角為 之三角函數的自然值	236

技術微積分

讀者欲獲得基本微積分的活用知識，須先具備代數、平面幾何、及三角學等堅實的知識。茲假設以前你曾研讀過這些科目，再將一般代數法則及三角學摘要錄下，以利覆習。

一般代數法則

1. 帶符號數字之加法

- 1.1 兩個同符號的數量相加，先將其絕對值相加得和，並在和之前附以共同的符號。
- 1.2 兩個反符號的數量相加，先找出其絕對值之差，然後以絕對值較大之數量的符號，附在該結果之前。

2. 帶符號數字之減法

- 2.1 兩數量相減的作法，與前面帶符號數字之加法相同，只須將符號轉變為相反的符號。

3. 帶符號數字之乘法

- 3.1 兩個同符號的數量之乘積為正數。
- 3.2 兩個反符號數量之乘積為負數。
- 3.3 三個或多個數量相乘，若有偶數個負數，則乘積為正數；若有奇數

個負數，則乘積為負數。

3.4 一個數量變號的結果，等於該數量乘以 -1 。

3.5 零乘任意數字，其乘積為零。

3.6 兩個或多個數量之乘積為零，其中至少有一個數量為零。

4. 帶符號數字之除法

4.1 一般而言，除法法則與乘法法則相似，因為除以 x 與乘以 $1/x$ 之結果相同。

5. 加法法則

5.1 一個數量不能除以零。

5.2 若分子、分母同時乘以同一數，此分數之值不變。

5.3 改變分數之分子或分母的符號，即改變分數的符號；分子及分母的符號皆改變，則分數的符號並不改變。

5.4 零除以零為無解。

6. 指數

6.1 兩個底數相同的乘幂數相乘，可將其指數相加。

6.2 欲求一數之乘幂，可將其指數相乘。

6.3 欲求底數相同兩乘幂數之商，可取其指數之差。

7. 記號與分組

7.1 括弧 $()$ 、中括弧 $[]$ 、或大括弧 $\{ \}$ ，係表示將其包圍的部分，視作一個單位。

7.2 括弧、中括弧、大括弧的主要目的，在於指出步驟的順序。

- 7.3 同類項 (*similar terms*) 係指具相同指數之相同文字項，但其係數並不一定相同。將一組同類項相加，可將其係數相加，再以此和乘以共同的因子。

8. 單項式相乘

- 8.1 單項式乘單項式時，將各數字係數之積乘以文字因子的積，應用指數定律，並決定及運用適當的符號。
- 8.2 多項式乘單項式時，將單項式乘以多項式之每一項，各別寫出積的和。

9. 多項式乘另一多項式

- 9.1 欲求多項式乘另一多項式時，首先將式中所包含的一種文字之各項，排列成降冪形式，以第一多項式乘第二多項式連續的各項，再將同類項排成一列，然後相加。

10. 單相式除另一單項式

- 10.1 一個單項式除另一單項式，將被除數係數除以除數係數，將指數法則應用到文字因子中，並加上適當的符號。
- 10.2 一個多項式除以一單項式時，將多項式之各項除以單項式，並寫下商的和。

11. 分數之性質

- 11.1 一個分數的分子與分母同時乘以或除以相同的數量（非零），此分數之值不變。
- 11.2 一個數量乘以一分數，即為此已知數量乘以分數之分子，並除以分母。
- 11.3 一個數量除以一分數，即為此已知數量除以分數之分子，並乘以分母。

- 11.4 若分數中有偶數個因子乘以-1，則分數的符號不變。若分數中有奇數個因子乘以-1，則分數前的符號，須轉變為相反的符號。
- 11.5 欲將分數化簡成最低次項，得將分子與分母表成主要因子的乘積，並消去共同因子。

12. 分數之加法與減法

化簡分數：

- 12.1 凡能用法化簡的任何分數，都須化簡至最低次項。
- 12.2 找出最小公分母，它是所有分母的 *LCD*。
- 12.3 對每一分數，用公分母 (*LCD*) 除以其分母，並用此商，同乘分子與分母。
- 12.4 寫出 12.3 所得出的新分子，分母則為單純的 *LCD*。將每一多項式之分母用括弧表出，並以原來的符號附在分數之前。
- 12.5 除去各組符號，各項相加，並將結果的分數化簡至最低次項。

13. 兩個或多個分數相乘

- 13.1 包含多項式的兩個或多個分數相乘，寫出分子之所有因子的積，再除以分母之所有因子的積，並消去其共同因子。

14. 分數除另一分數

- 14.1 一個分數除另一分數，即為乘以除數的倒數，作法與乘法相同。

15. 線性方程式之解答

- 15.1 若方程式內包含分數，首先使其成為最低次項，再以公分母來處理分數方程式。
- 15.2 除去任一括弧。
- 15.3 將包含未知數的所有項移至方程式一邊，其他項移至另一邊。
- 15.4 藉合併未知項來表達各項的合併。
- 15.5 用未知項係數除方程式之各數。
- 15.6 將未知項代入原方程式求解。

16. 作圖

- 16.1 若從代數及三角學回想，圖形可能是一種有效的表達方法。幾乎所有的情況下，第一階方程式皆可畫成直線圖形，第二階方程式通常不表示直線圖形。（圖 1）

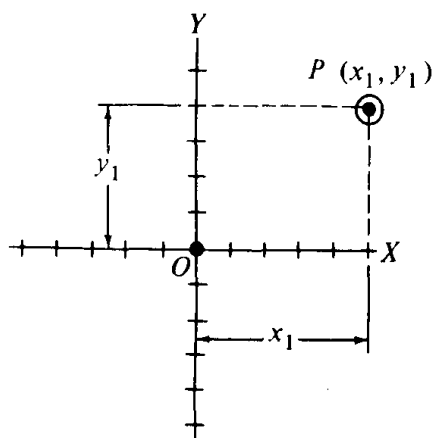


圖 1

如圖所示，我們將點座標標為 y_1 與 x_1 ，在 (x_1, y_1) 很容易認

出 P 點；若我們知道 x 與 y 之值，則我們能畫出 P 點的實際位置圖形。

- 16.2 16.1 款中，在平面上畫圖的方法，稱為笛卡兒座標系 (*Cartesian system of coordinates*)。從三角學中回想，此系統係由四個象限組成，在此系中安置座標或點時，軸的符號極為重要。

例題 用笛卡兒座標系畫已知點，描述找點的方法，並表出所有的點座標 (見圖 2)。

$$P_1 = (3, 4) \quad P_3 = (-3, -5)$$

$$P_2 = (-4, 5) \quad P_4 = (4, -2)$$

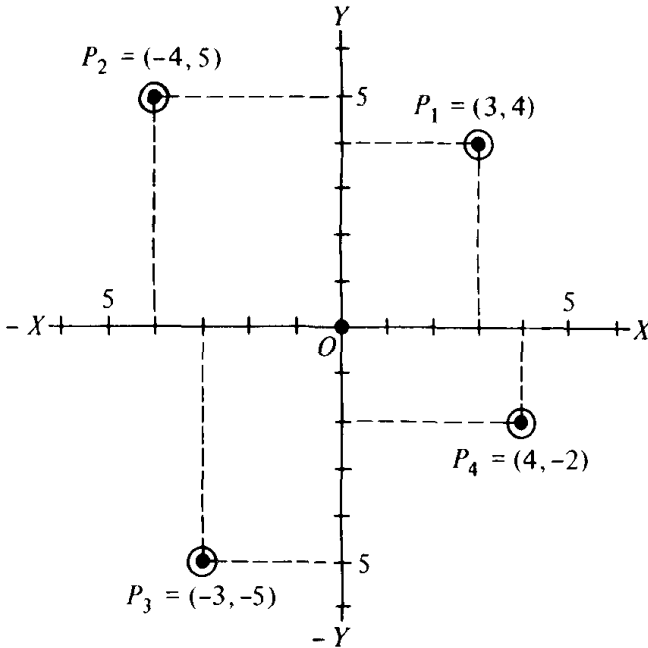


圖 2

習題

在笛卡兒座標系上畫出下列各點，描述畫點的方式，並在座標系內標出點。

- | | |
|------------|---------------|
| 1. (5,3) | 6. (4.5,5.5) |
| 2. (-4,5) | 7. (0,-3) |
| 3. (6,-4) | 8. (5,0) |
| 4. (-5,-5) | 9. (-2,0) |
| 5. (0,4) | 10. (1.3,2.6) |

18. 直角座標系

- 18.1 用 x 與 y 的直角座標系畫圖，如 16.1 款所示。所選平面上的各點及各象限都有兩個基礎座標，一個在 X 軸上，另一個在 Y 軸上。
- 18.2 欲在平面上確實定出點位置，只需將一平坦表面，如一張紙的表面一樣，然後畫兩條互相垂直的線，即可建立我們的座標系。兩線的交點稱為原點，垂直線稱為 Y 軸，水平線稱為 X 軸。
- 18.3 為表達如何畫座標，我們在座標系右上角的象限中，任置一點 P ，如圖 3 所示。

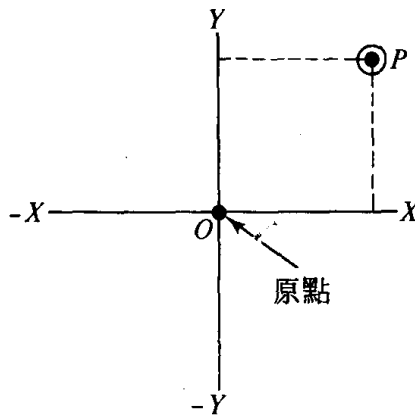


圖 3

然後從 P 畫一線垂直於 Y 軸，另從 P 畫一線垂直於 X 軸，如圖 4 所示。