

# 大学数学教程

## 第一卷 上册

[法] 雅克·迪斯米埃 著

丁善瑞 译 余家荣 校

高等教育出版社

《大学数学教程》第一卷系根据法国 Gauthier-Villars 出版社 1977 年出版的 Jacques Dixmier 著 Cours de mathématiques du premier cycle, première année 第二版译出。原书供法国大学第一阶段(相当于我国大学一、二年级)第一学年数学、物理专业或需用数学较多的理工各专业学生学习之用。

第一卷中译本分上下册出版。上册是代数部分,下册是分析和几何两部分。原书配备了习题和部分答案与提示。为了便于读者,中译本将它们分别放在上下册之中。

## 大学数学教程

第一卷 上册

【法】雅克·迪斯米埃 著

丁善瑞 译 余家荣 校

高等教育出版社出版

新华书店北京发行所发行

河北省香河县印刷厂印装

开本 850×1168 1/32 印张 10 字数 238,000

1988 年 10 月第 1 版 1988 年 10 月第 1 次印刷

印数 90,001—02,655

ISBN 7-04-001945-0/O·704

定价 3.15 元

## 引 言

总的说来,本教程与理科大学第一阶段第一学年《结构与物质科学》的大纲一致。但存在一些微小分歧,下面是一些例子:

1° 如果不对曲面的切平面下定义,并且证明其存在,要谈“通常的曲面”,我感到有点为难。

2° 对定义在  $\mathbf{R}^n$  的开子集内的函数,我们引入了偏导数。故对这些子集作一简单的探讨,很有必要。

3° 大纲没有明确指出微分应当放在第一学年还是第二学年去研究。但依我之见,以不要等到第二年为好。

4° 关于连续函数的某些定理,应在第一年先讲授,而到第二年再作详细证明。这样安排,从教学的角度来看是成功的。但在编书时,把证明紧接在定理之后,却有其方便之处。再说,编书终究不同于讲课,故我在讲课时常常不按书中次序叙述。

我希望继这本《第一学年教程》之后,能接着出版《第二学年教程》。这一套书,虽然没有严格地配合数学专业班的大纲,但对这一专业的学生也是有用的。

下列几点,提请大学生们注意:

1° 有些定理、定义与解说,特别重要。我们在边栏空白处用记号——标出①。

2° 打有边框的公式,以及常用函数的图形,应当记住。

3° 特别在一开头学习代数时,同学们也许会无根据地推测:我们是从基础重新开始的。事实并非如此。实际上,我们常常不加证明地引用了中学所获得的知识。

① 中译本改用加重点标注——高等教育出版社注。

4: 初学者往往会提出(也是很合理的)如何理解、消化定理的问题。这里介绍一种学习方法:

a) 书中命题及证明,要逐字逐句细读、领会,并努力明了其先后逻辑联系,但不要过分地纠缠于其中的一般想法。要借助图表和可能是抽象的图形,以求得启发(读者时常会发现,本书中有些图形和通常的几何实体并不相应)。

b) 在纸上或到黑板上将证明再做一遍,直到可以不看书本为止。

c) 逐一陈述命题的已知条件,并考察定理的一些特殊情况;尽可能去寻找一些已知定理,作为它的特例。

d) 命题包含许多假设,应力求弄清它们的必要性。为此,可减少一个假设的条件,而去找一个使结论不再成立的例子。

e) 研究定理的推广。

f) 在证明中,有的推理方法是已经习惯了的,小部分则有新的想法。要尽力弄清后者,以便能用几句话将证明要领作一概括。

g) 在学过一个定理隔了一段时日之后,最好在课程中第一次又用到这个定理时,就对它作一番回忆。

这个方法,颇费时间,故往往不易坚持。然而,我还是建议要经常去试验这个方法(顺便说一句,可千万不要灰心失望!一个职业数学工作者,有时对一个简单的定理,往往思考到一百次还会有新的领悟,并感先前自己认识之不完全)。

这个方法未必适合于某些学生,特别,对大部分高材生来说,他们宁可 from f 开始。

5: 另外一个有用的方法是:选择一个确定而尽可能是数值化的结果,追溯推导这一结果的所有证明之来龙去脉。例如,应用这个方法将  $\sin x$  有限展开。

6: 当然,解题与练习都是必不可少的。

# 目 录

## 代 数

<b>第一章 集</b> .....	1
1.1. 隶属 .....	1
1.2. 包含 .....	2
1.3. 基本运算 .....	2
1.4. 基本运算的性质 .....	3
1.5. 集的积 .....	4
1.6. 函数 .....	5
1.7. 映射的复合 .....	7
1.8. 单射, 全射, 全单射 .....	8
1.9. 直接象, 逆象 .....	10
1.10. 族 .....	11
1.11. 等价关系 .....	12
1.12. 映射的典型分解 .....	15
1.13. 序关系 .....	16
1.14. 上界, 最大元素, 上确界 .....	18
1.15. 组合分析 .....	21
1.16. 集的等势 .....	24
1.17. 基本逻辑运算 .....	26
1.18. 量词 .....	28
<b>第二章 合成法则</b> .....	30
2.1. 定义 .....	30
2.2. 结合律 .....	31
2.3. 交换律 .....	33
2.4. 中性元素 .....	34

2.5.	逆元素	35
2.6.	同态	38
<b>第三章</b>	<b>群</b>	<b>40</b>
3.1.	定义	40
3.2.	子群	41
3.3.	子群的陪集	43
3.4.	交换群的商群	45
3.5.	群的同态	46
3.6.	同态映射的典型分解	48
3.7.	作用在集内的群	51
<b>第四章</b>	<b>环</b>	<b>52</b>
4.1.	定义	52
4.2.	子环, 理想	55
4.3.	交换环的商环	56
4.4.	环的同态	57
4.5.	体	58
4.6.	整环	61
4.7.	环 $\mathbb{Z}$ 的构造	64
<b>第五章</b>	<b>单变量多项式</b>	<b>66</b>
5.1.	定义	66
5.2.	多项式的次数	69
5.3.	多项式按降幂相除	69
5.4.	多项式的整除性	71
5.5.	互素多项式	74
5.6.	两个多项式的公倍式	75
5.7.	既约多项式	76
5.8.	多项式函数	78
5.9.	多项式的根	79
5.10.	拉格朗日内插公式	82

5.11.	体 $C$ 的情况	83
5.12.	体 $R$ 的情况	85
5.13.	多项式的导数	88
5.14.	按升幂相除	90
5.15.	复数	92

## 第六章 单变量有理分式 .....100

6.1.	定义	100
6.2.	有理分式的整部	103
6.3.	分解成简单元素	103
6.4.	体 $C$ 的情况	107
6.5.	体 $R$ 的情况	109

## 第七章 多变量多项式 .....113

7.1.	定义	113
7.2.	与单变量多项式的关系	114
7.3.	次数	115
7.4.	多项式函数	116
7.5.	齐次多项式的另一种定义	117
7.6.	导数	118

## 第八章 向量空间 .....121

8.1.	定义	121
8.2.	向量子空间	124
8.3.	向量商空间	126
8.4.	线性映射	127
8.5.	互补向量子空间	129
8.6.	向量空间的积	133
8.7.	线性无关	136
8.8.	向量空间的基	138
8.9.	基的存在性	143

8.10.	维数	144
8.11.	线性映射的秩	148
8.12.	向量空间 $\mathscr{L}(E, F)$	150
8.13.	向量空间的对偶空间	153
8.14.	双线性形式	157
8.15.	非退化双线性形式	159
8.16.	对偶基	163
8.17.	正交性	165
8.18.	转置	170
8.19.	多重线性形式	174
<b>第九章 矩阵</b> 176		
9.1.	定义	176
9.2.	线性映射的矩阵	177
9.3.	矩阵的运算	180
9.4.	方阵	182
9.5.	行矩阵、列矩阵	184
9.6.	矩阵的转置	185
9.7.	可逆矩阵	187
9.8.	基的变化	188
9.9.	等价矩阵	189
9.10.	相似矩阵	191
9.11.	双线性形式的矩阵	192
<b>第十章 行列式</b> 193		
10.1.	置换的符号差	193
10.2.	交错多重线性形式	196
10.3.	$n$ 维向量空间上的交错 $n$ 重线性形式	198
10.4.	向量组关于某个基的行列式	200
10.5.	$E$ 到 $E$ 内的线性映射的行列式	202
10.6.	方阵的行列式	204



10.7.	行列式的分块计算 .....	207
10.8.	行列式按行或按列展开 .....	210
10.9.	向量组线性无关的准则 .....	213
10.10.	矩阵秩的计算 .....	214
10.11.	实向量空间的定向 .....	215
10.12.	通常定向空间内的混合积 .....	216
10.13.	通常定向空间内的向量积 .....	218
<b>第十一章</b>	<b>线性方程组</b> .....	<b>221</b>
11.1.	定义 .....	221
11.2.	克莱姆组 .....	222
11.3.	任意线性方程组 .....	224
<b>第十二章</b>	<b>仿射概念</b> .....	<b>226</b>
12.1.	仿射子空间 .....	226
12.2.	仿射子空间的方程 .....	227
12.3.	仿射子空间的参数表示 .....	229
12.4.	仿射映射 .....	230
12.5.	重心 .....	233
12.6.	凸集 .....	237
12.7.	仿射空间 .....	239
练习	.....	244
部分答案与提示	.....	282
符号索引	.....	294
术语索引	.....	297

# 代 数

## 第一章 集

本章中所有的概念，都是读者所熟悉的（1.16中的一些概念可能除外），所以本章只起到一种复习的作用。本章还对某些术语作出约定，以便全书使用。

### 1.1. 隶属

1.1.1. 一堆事物的汇集叫做集（或集合）；而这些事物，叫做集的元素，或集的点。

1.1.2. 例：

1. 整数  $0, 1, 2, 3, \dots$ ，叫做自然数，它们构成一个集，记做  $N$ 。

2. 整数  $\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots$ ，叫做有理整数，它们构成一集，记做  $Z$ 。

3. 有理数全体构成一集，记做  $Q$ 。

4. 实数全体构成一集，记做  $R$ 。

5. 复数全体构成一集，记做  $C$ 。

6. 平面的所有点构成一集。

7. 空间所有直线构成一集。

1.1.3. 设  $E$  是集。我们也把“事物  $\alpha$  是  $E$  的元素”这句话，

说成是“ $x$ 属于 $E$ ”。并且记作 $x \in E$ 。这个性质的否定则记作 $x \notin E$ 。

1.1.4. 一个集, 如果它不含任何元素, 便说它是空的, 并且用记号 $\emptyset$ 表示它。

只含一个元素 $x$ 的集, 记作 $\{x\}$ ; 只含两个元素 $x$ 和 $y$ 的集, 记作 $\{x, y\}$ ; 如此等等。

## 1.2. 包含

1.2.1. 设 $E, F$ 是两个集。如果 $E$ 的每一个元素也是 $F$ 的元素, 则说 $E$ 包含在 $F$ 内, (也可以说, $F$ 包含 $E$ , 或 $E$ 是 $F$ 的子集, 或 $E$ 是 $F$ 的部分。)并记做 $E \subset F$ , 或 $F \supset E$ 。

1.2.2. 例:  $B \subset C$ 。

1.2.3. 若 $E \subset F$ 并且 $F \subset G$ , 则 $E \subset G$ 。

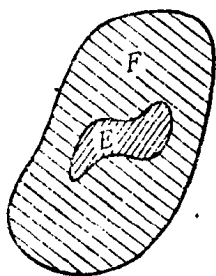


图 1

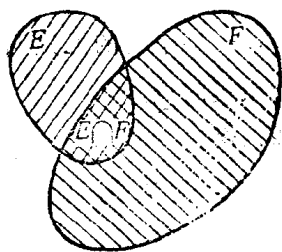


图 2

## 1.3. 基本运算

1.3.1. 交 设 $E, F$ 是两个集。由所有既属于 $E$ 又属于 $F$ 的元素 $x$ 所成的集, 叫做集 $E$ 与集 $F$ 的交。记作 $E \cap F$ 。我们同样可以定义 $E \cap F \cap G$ , 等等。若 $E \cap F = \emptyset$ , 就说 $E$ 和 $F$ 不相交。

1.3.2. 并 设 $E, F$ 是两个集。由所有或者属于 $E$ , 或者属

于  $F$  的元素  $\alpha$  所成的集，称为集  $E$  与集  $F$  的并，记作  $E \cup F$ 。我们同样可以定义  $E \cup F \cup G$ ，等等。

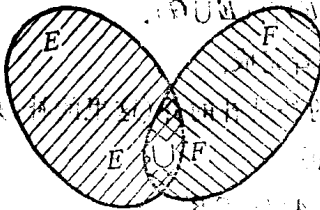


图 3

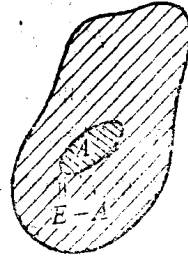


图 4

1.3.3. 补 设  $E$  是集， $A$  是  $E$  的部分。由所有属于  $E$  但不属于  $A$  的元素  $\alpha$  所成的集，称为  $A$  关于  $E$  的补(或余)，或  $E$  与  $A$  的差，并用  $E - A$  或  $C_A A$  表示它。如果我们不会怀疑所取补是“关于  $E$ ”的话，也可把它记作  $C A$ 。

## 1.4. 基本运算的性质

1.4.1. 交与并是可交换的。即  $E \cap F = F \cap E$

$$E \cup F = F \cup E, \quad E \cap F = F \cap E.$$

1.4.2. 交与并是可结合的。即  $E \cap (F \cap G) = (E \cap F) \cap G$

$$E \cup (F \cup G) = (E \cup F) \cup G,$$

$$E \cap (F \cap G) = (E \cap F) \cap G.$$

1.4.3. 交关于并是可分配的。即  $E \cap (F \cup G) = (E \cap F) \cup (E \cap G)$

$$E \cap (F \cup G) = (E \cap F) \cup (E \cap G).$$

证明 设  $\alpha$  为  $E \cap (F \cup G)$  的一个元素。首先， $\alpha \in E$ 。其次， $\alpha \in F \cup G$ ，故  $\alpha \in F$  或  $\alpha \in G$ 。若  $\alpha \in F$ ，则  $\alpha \in E \cap F$ ；若  $\alpha \in G$ ，则  $\alpha \in E \cap G$ 。故不论何种情况， $\alpha \in (E \cap F) \cup (E \cap G)$ 。

反过来，设  $\alpha$  是  $(E \cap F) \cup (E \cap G)$  的一个元素。若  $\alpha \in E \cap F$ ，

则  $x \in E$  且  $x \in F$ , 故  $x \in F \cup G$ , 从而  $x \in E \cap (F \cup G)$ ; 若  $x \notin E \cap F$ , 则  $x \in E$  而且  $x \notin F$ , 故  $x \in F \cup G$ ; 因此也有  $x \in E \cap (F \cup G)$ .

1.4.4. 并关于交是可分配的. 即

$$E \cup (F \cap G) = (E \cup F) \cap (E \cup G).$$

证明方法与前面相似, 留给读者完成.

1.4.5. 并的补是补的交; 交的补是补的并(这里的补, 是关于一个固定的集  $E$  而言的). 换句话说,

$$C(A \cup B) = (CA) \cap (CB),$$

$$C(A \cap B) = (CA) \cup (CB).$$

证明 设  $x$  是  $C(A \cup B)$  的一个元素, 于是  $x \in E$  并且  $x \notin A \cup B$ . 故  $x \notin A$  并且  $x \notin B$ ;  $x \in CA$  并且  $x \in CB$ . 所以  $x \in CA \cap CB$ .

反过来, 设  $x$  是  $CA \cap CB$  的一个元素; 即  $x \in CA$  并且  $x \in CB$ . 于是有  $x \in E$ ,  $x \notin A$ ,  $x \notin B$ , 故  $x \in E$  并且  $x \notin A \cup B$ , 从而  $x \in C(A \cup B)$ .

第一个公式由此得证. 在这个公式中, 用  $CA$  代替  $A$ , 用  $CB$  代替  $B$ , 可得

$$C(CA \cup CB) = A \cap B,$$

换句话说,

$$CA \cup CB = C(A \cap B).$$

这就是第二个公式.

## 1.5. 集的积

1.5.1. 设  $x, y$  是两个事物. 称这两个事物的序列  $(x, y)$  为偶, 其中  $x$  是第一个元素,  $y$  是第二个元素. 有  $(x, y) \neq (y, x)$ . 我们不要把这个概念与两个元素的集  $\{x, y\}$  的概念相混淆(比较 1.1.4), 对于后者,  $\{x, y\} = \{y, x\}$ .

1.5.2. 设  $X, Y$  是两个集. 由满足  $x \in X, y \in Y$  的一切偶

$(x, y)$  组成的集, 称为  $X$  和  $Y$  的积, 记作  $X \times Y$ .

1.5.3. 例 我们可以构造集  $R \times R$ . 这个集的元素是两个实数的偶  $(x, y)$ . 为了使这个概念显得更直观, 我们把  $R \times R$  中的每一个偶  $(x, y)$  与平面  $P$  内关于某个坐标系有坐标  $x$  和  $y$  的点相对应; 于是  $R \times R$  与  $P$  等同.

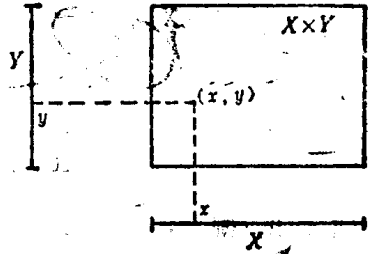


图 5

即使遇到抽象集的积, 想想这个例子, 不无益处.

1.5.4. 推广 用  $n$  个事物  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , 可以定义有序序列  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ . 设  $X_1, X_2, \dots, X_n$  是集. 使  $x_1 \in X_1, x_2 \in X_2, \dots, x_n \in X_n$  的一切有序序列  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  构成的集, 叫做  $X_1, X_2, \dots, X_n$  的乘积集, 并记作  $X_1 \times X_2 \times \dots \times X_n$ .

1.5.5. 若  $X_1 = X_2 = \dots = X_n$ , 积  $X_1 \times X_2 \times \dots \times X_n$  便记做  $X^n$ . 例如, 记  $R \times R = R^2$ .

1.5.6. 若  $x, y, z$  是任意三个事物, 我们可以把  $((x, y), z)$  与  $(x, y, z)$  看作等同. 故若  $X, Y, Z$  是三个集, 则  $(X \times Y) \times Z$  与  $X \times Y \times Z$  等同,  $((X \times Y) \times Z) \times T$  与  $X \times Y \times Z \times T$  等同, 等等.

例如,  $R^2 \times R$  与  $R^3$  等同

## 1.6. 函数

1.6.1. 设  $X, Y$  是两个集. 按照某个法则如果  $X$  的每个元素, 都有  $Y$  的某一个确定的元素和它对应, 便把这个法则叫做定义在  $X$  上、取值在  $Y$  内的函数.  $X$  叫做这个函数的定义集.

设  $f$  为函数. 若  $x \in X$ , 又若  $y$  是  $Y$  中与  $x$  对应的元素, 我们称  $y$  是  $x$  在  $f$  下的象, 记成  $y = f(x)$ . 或者说  $f$  是  $X$  到  $Y$  内的

一个映射。映射  $f$  也记作

$$X \ni x \mapsto f(x).$$

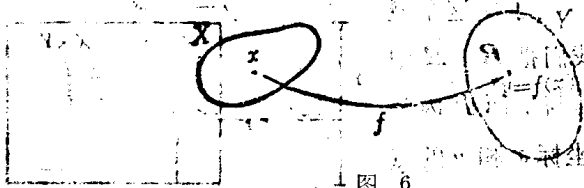


图 6

1.6.2. 例:

1. 若  $Y = \mathbf{R}$ , 便说  $f$  是一个实函数; 若  $X \subseteq \mathbf{R}$ , 或者更一般地,  $X$  是  $\mathbf{R}$  的一个部分, 便说  $f$  是一个实变量函数. 本教程主要研究的是实变量的实函数. 大家已经熟悉很多例子, 例如:

$x \mapsto x^3$  是定义在  $\mathbf{R}$  内的实函数.

$x \mapsto \frac{2x+1}{x-3}$  是定义在  $\mathbf{R} - \{3\}$  内的实函数.

$x \mapsto \sqrt{x}$  是对  $x \geq 0$  有定义的实函数.

也可用不很确切的记号  $x^3$ ,  $\frac{2x+1}{x-3}$ ,  $\sqrt{x}$  来简单地表示它们.

2. 对每个实数偶  $(x, y)$ , 令

$$f(x, y) = x \sin(x^2 + y^2).$$

这样, 我们便定义了一个函数  $f$ , 它的定义集为  $\mathbf{R}^2$ , 取值在  $\mathbf{R}$  内. 一个定义在  $\mathbf{R}^2$  的某个部分内的函数, 叫做三实变量函数. 我们同样可以定义 3, 4, ... 实变量函数.

3. 平移与位似是平面 (或空间) 到其自身内的一种映射. 在平面  $P$  内, 对于极点  $O$  的反演, 是一个  $P - \{O\}$  到  $P - \{O\}$  内的映射.

4. 设  $E$  为集.  $E$  到  $E$  内的映射  $x \mapsto x$  称为  $E$  的恒等映射, 并记作  $\text{id}_E$ . 更一般地, 若  $F$  是  $E$  的一个部分,  $x \mapsto x$  作为  $F$  到  $E$  内的一个映射, 便称为  $F$  到  $E$  内的恒等映射.

5. 设  $f$  是  $X$  到  $Y$  内的映射,  $f'$  是  $X'$  到  $Y$  内的映射, 其中  $X' \subset X$ . 如果对每个  $x \in X'$ , 总有  $f'(x) = f(x)$ , 则称  $f'$  为  $f$  在  $X'$  上的限制.

1.6.3. 记号 我们将采用简洁的记号

$$f: X \rightarrow Y \quad \text{或} \quad X \xrightarrow{f} Y$$

以代替“ $f$  是  $X$  到  $Y$  内的映射”这一冗长的说法. (此处的箭号与极限过程中的箭号毫不相干.) 我们不要把这个记号与前面引入的记号  $x \mapsto f(x)$  相混淆.

### 1.6.4. 函数的图形

设  $f$  是  $X$  到  $Y$  内的一个映射.  $f$  的图形便是  $X \times Y$  的一个部分, 即由偶  $(x, f(x))$ ,  $x \in X$  所成的集. 若  $f$  是实变量的实函数, 就得出古典函数图形的概念.

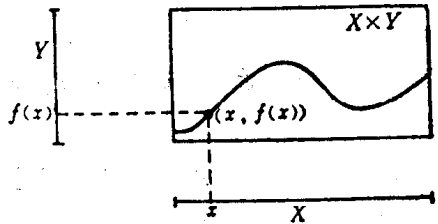


图 7

## 1.7. 映射的复合

1.7.1. 设  $X, Y, Z$  是三个集, 并设  $f: X \rightarrow Y, g: Y \rightarrow Z$  是两个映射.  $X$  到  $Z$  内的映射  $x \mapsto g(f(x))$  称为  $g$  和  $f$  的复合, 并记为  $g \circ f$  (如果不致与通常的乘积发生混淆, 可简单地记作  $gf$ ).

1.7.2. 例. 取  $X = Y = Z = \mathbb{R}, f(x) = \sin x$ , 及  $g(x) = x^2$ . 有

$$(g \circ f)(x) = (\sin x)^2 = \sin^2 x,$$

$$(f \circ g)(x) = \sin(x^2).$$

我们看到, 一般地,  $f \circ g \neq g \circ f$ .

1.7.3. 推广 设有映射.

$$f_1: X_1 \rightarrow X_2, \quad f_2: X_2 \rightarrow X_3, \quad \dots, \quad f_n: X_n \rightarrow X_{n+1}.$$

我们可以构造复合映射.

$$f_n \circ f_{n-1} \circ \dots \circ f_2 \circ f_1: X_1 \rightarrow X_{n+1}.$$



映射的复合是两结合的:  $(f_1 \circ f_2) \circ f_3 = f_1 \circ (f_2 \circ f_3)$

$$f_1 \circ (f_2 \circ f_3) = (f_1 \circ f_2) \circ f_3 = f_1 \circ f_2 \circ f_3$$

1.7.4. 若  $X$  是集,  $f$  是  $X$  到其自身内的映射, 我们可以构造  $f \circ f, f \circ f \circ f, \dots$ . 如果不致与通常的乘积混淆, 我们可以把它们写成  $f^2, f^3, \dots$ .

## 1.8. 单射, 全射, 全单射

1.8.1. 设  $f$  是  $X$  到  $Y$  内的映射.

a. 如果  $X$  的两个不同元素, 在  $Y$  内总是有不同的象, 则称  $f$  是单射. 换句话说, 这时如果  $f(x) = f(x')$ , ( $x \in X, x' \in X$ ), 必然导致  $x = x'$ .

b. 如果  $Y$  的每一个元素, 都是  $X$  内至少一个元素在  $f$  下的象, 则称  $f$  是全射, 或者说  $X$  到  $Y$  上的映射.

c. 如果  $f$  不仅是单射, 而且还是全射, 便把  $f$  叫做全单射. 一个  $X$  到  $X$  内的全单射, 叫做  $X$  的一个置换.

1.8.2. 全单射的逆映射 假设  $f: X \rightarrow Y$  是全单射,  $y$  是  $Y$  的一个元素. 由于  $f$  是全射, 所以  $X$  内至少存在一个元素  $x$  满足  $f(x) = y$ . 又因为  $f$  是单射, 所以这个元素是唯一的. 把  $X$  内与  $y$  相对应的这个元素记为  $g(y)$ . 按照这一方式, 我们便定义了一个  $Y$  到  $X$  内的映射  $g$ , 我们把它叫做  $f$  的逆映射, 并记成  $f^{-1}$ .

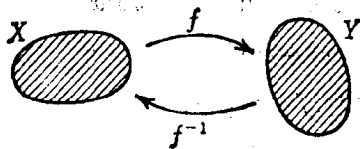


图 8

设  $x$  是  $X$  的一个元素. 试问  $X$  内哪一个唯一的元素在  $f$  下的象是  $f(x)$ ? 显然这个元素就是  $x$ . 故