大学数学教程

第一卷 上册

[法] 雅克·迪斯米埃 著

丁善瑞 译 余家荣 校

高等教育出版社

《大学数学教程》第一卷系根据法国 Gauthier-Villars 出版社 1977 年出版的 Jacques Dixmier 著 Cours de mathématiques du premier cycle, premiere année 第二版译出. 原书供法国大学第一阶段(相当于我国大学一、二年级)第一学年数学、物理专业或需用数学较多的理工各专业学生学习之用.

第一卷中译本分上下册出版. 上册是代数部分, 下册是分析和几何两部分. 原书配备了习题和部分答案与提示. 为了便于读者, 中译本将它们分别放在上下册之中.

大学数学教程

第一卷　上册

[法] 雅克·迪斯米埃 著

丁善瑞　译　余家荣　校

高等教育出版社 出版
新华书店北京发行所发行
河北省香河县印刷厂印装

开本 850×1168 1/32　印张 10　字数 238,000
1988 年 10 月第 1 版　1988 年 10 月第 1 次印刷
印数 00,001—02,655

ISBN 7-04-001945-0/O·704
定价 3.15 元

引　言

总的说来，本教程与理科大学第一阶段第一学年《结构与物质科学》的大纲一致．但存在一些微小分歧，下面是一些例子：

1° 如果不对曲面的切平面下定义，并且证明其存在，要谈"通常的曲面"，我感到有点为难．

2° 对定义在 $\mathbf{R}^n$ 的开子集内的函数，我们引入了偏导数．故对这些子集作一简单的探讨，很有必要．

3° 大纲没有明确指出微分应当放在第一学年还是第二学年去研究．但依我之见，以不要等到第二年为好．

4° 关于连续函数的某些定理，应在第一年先讲授，而到第二年再作详细证明．这样安排，从教学的角度来看是成功的．但在编书时，把证明紧接在定理之后，却有其方便之处．再说，编书终究不同于讲课，故我在讲课时常常不按书中次序叙述．

我希望继这本《第一学年教程》之后，能接着出版《第二学年教程》．这一套书，虽然没有严格地配合数学专业班的大纲，但对这一专业的学生也是有用的．

下列几点，提请大学生们注意：

1° 有些定理、定义与解说，特别重要．我们在边栏空白处用记号——→标出①．

2° 打有边框的公式，以及常用函数的图形，应当记住．

3° 特别在一开头学习代数时，同学们也许会无根据地推测：我们是从基础重新开始的．事实并非如此．实际上，我们常常不加证明地引用了中学所获得的知识。

① 中译本改用加重点标注——高等教育出版社注。

4° 初学者往往会提出(也是很合理的)如何理解、消化定理的问题。这里介绍一种学习方法：

a) 书中命题及证明，要逐字逐句细读、领会，并努力明了其先后的逻辑联系，但不要过分地纠缠于其中的一般想法. 要借助图表和可能是抽象的图形，以求得启发(读者时常会发现，本书中有些图形和通常的几何实体并不相应).

b) 在纸上或到黑板上将证明再做一遍，直到可以不看书本为止.

c) 逐一陈述命题的已知条件，并考察定理的一些特殊情况；尽可能去寻找一些已知定理，作为它的特例.

d) 命题包含许多假设，应力求弄清它们的必要性. 为此，可减少一个假设的条件，而去找一个使结论不再成立的例子.

e) 研究定理的推广.

f) 在证明中，有的推理方法是已经习惯了的，小部分则有新的想法。要尽力弄清后者，以便能用几句话将证明要领作一概括。

g) 在学过一个定理隔了一段时日之后，最好在课程中第一次又用到这个定理时，就对它作一番回忆.

这个方法，颇费时间，故往往不易坚持. 然而，我还是建议要经常去试验这个方法(顺便说一句，可千万不要灰心失望！一个职业数学工作者，有时对一个简单的定理，往往思考到一百次还会有新的领悟，并感先前自己认识之不完全).

这个方法未必适合于某些学生，特别，对大部分高材生来说，他们宁可从 f 开始.

5° 另外一个有用的方法是：选择一个确定而尽可能是数值上的结果，追溯推导这一结果的所有证明之来龙去脉. 例如，应用这个方法将 sh$x$ 有限展开.

6° 当然，解题与练习都是必不可少的.

目　　录

代　　数

代　　数

第一章　集

本章中所有的概念，都是读者所熟悉的（1.16 中的一些概念可能除外），所以本章只起到一种复习的作用．本章还对某些术语作出约定，以便全书使用．

1.1．隶属

1.1.1．一堆事物的汇集叫做集（或集合）；而这些事物，叫做集的元素，或集的点．

1.1.2．例：

1．整数 0，1，2，3，…，叫做自然数，它们构成一个集，记做 $\boldsymbol{N}$．

2．整数…，-3，-2，-1，0，1，2，3，…，叫做有理整数，它们构成一集，记做 $\boldsymbol{Z}$．

3．有理数全体构成一集，记做 $\boldsymbol{Q}$．

4．实数全体构成一集，记做 $\boldsymbol{R}$．

5．复数全体构成一集，记做 $\boldsymbol{C}$．

6．平面的所有点构成一集．

7．空间所有直线构成一集．

1.1.3．设 E 是集．我们也把“事物 a 是 E 的元素”这句话，

说成是“x 属于 E”. 并且记作 $x\in E$. 这个性质的否定则记作 $x\notin E$.

1.1.4. 一个集，如果它不含任何元素，便说它是空的，并且用记号$\varnothing$表示它.

只含一个元素 x 的集，记作$\{x\}$；只含两个元素 x 和 y 的集，记作$\{x, y\}$；如此等等.

1.2. 包含

1.2.1. 设 E、F 是两个集. 如果 E 的每一个元素也是 F 的元素，则说 E 包含在 F 内，(也可以说，F 包含 E，或 E 是 F 的子集，或 E 是 F 的部分.) 并记做 $E\subset F$，或 $F\supset E$.

1.2.2. 例：$\boldsymbol{R}\subset\boldsymbol{C}$.

1.2.3. 若 $E\subset F$ 并且 $F\subset G$，则 $E\subset G$.

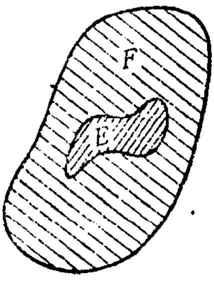

图 1

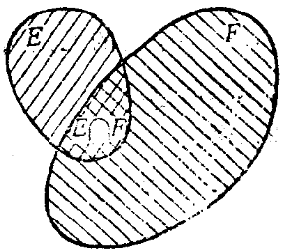

图 2

1.3. 基本运算

1.3.1. 交 设 E, F 是两个集. 由所有既属于 E 又属于 F 的元素 x 所成的集，叫做集 E 与集 F 的交. 记作 $E\cap F$. 我们同样可以定义 $E\cap F\cap G$，等等. 若 $E\cap F=\varnothing$，就说 E 和 F 不相交.

1.3.2. 并 设 E、F 是两个集. 由所有或者属于 E，或者属

于 F 的元素 x 所成的集，称为集 E 与集 F 的并，记作 $E\cup F$. 我们同样可以定义 $E\cup F\cup G$，等等.

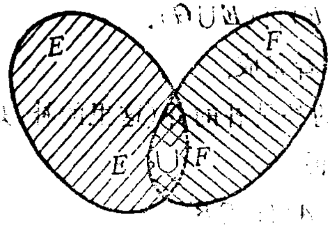

图 3

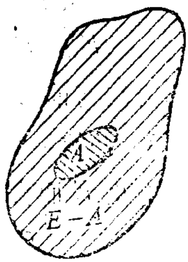

图 4

1.3.3. 补 设 E 是集，A 是 E 的部分. 由所有属于 E 但不属于 A 的元素 x 所成的集，称为 A 关于 E 的补(或余)，或 E 与 A 的差. 并用 $E-A$ 或 $\complement_E A$ 表示它. 如果我们不会怀疑所取补是"关于 E"的话，也可把它记作 $\complement A$.

1.4. 基本运算的性质

1.4.1. 交与并是可交换的. 即

$$E\cup F=F\cup E,\quad E\cap F=F\cap E.$$

1.4.2. 交与并是可结合的. 即

$$E\cup(F\cup G)=(E\cup F)\cup G,$$

$$E\cap(F\cap G)=(E\cap F)\cap G.$$

1.4.3. 交关于并是可分配的. 即

$$E\cap(F\cup G)=(E\cap F)\cup(E\cap G).$$

证明 设 x 为 $E\cap(F\cup G)$ 的一个元素. 首先，$x\in E$. 其次，$x\in F\cup G$. 故 $x\in F$ 或 $x\in G$. 若 $x\in F$，则 $x\in E\cap F$；若 $x\in G$，则 $x\in E\cap G$. 故不论何种情况，$x\in(E\cap F)\cup(E\cap G)$.

反过来，设 x 是 $(E\cap F)\cup(E\cap G)$ 的一个元素. 若 $x\in E\cap F$，

则 $x\in E$ 且 $x\in F$，故 $x\in F\cup G$，从而 $x\in E\cap(F\cup G)$；若 $x\in E\cap G$，则 $x\in E$ 而且 $x\in G$，故 $x\in F\cup G$，因此也有 $x\in E\cap(F\cup G)$.

1.4.4. 并关于交是可分配的. 即

$$E\cup(F\cap G)=(E\cup E)\cap(E\cup G).$$

证明方法与前面相似，留给读者完成.

1.4.5. 并的补是补的交；交的补是补的并（这里的补，是关于一个固定的集 E 而言的）. 换句话说，

$$\complement(A\cup B)=(\complement A)\cap(\complement B),$$

$$\complement(A\cap B)=(\complement A)\cup(\complement B).$$

证明　设 x 是 $\complement(A\cup B)$ 的一个元素，于是 $x\in E$ 并且 $x\notin A\cup B$. 故 $x\notin A$ 并且 $x\notin B$；$x\in\complement A$ 并且 $x\in\complement B$. 所以 $x\in\complement A\cap\complement B$.

反过来，设 x 是 $\complement A\cap\complement B$ 的一个元素；即 $x\in\complement A$ 并且 $x\in\complement B$. 于是有 $x\in E$, $x\notin A$, $x\notin B$, 故 $x\in E$ 并且 $x\notin A\cup B$, 从而 $x\in\complement(A\cup B)$.

第一个公式由此得证. 在这个公式中，用 $\complement A$ 代替 A，用 $\complement B$ 代替 B，可得

$$\complement(\complement A\cup\complement B)=A\cap B,$$

换句话说，

$$\complement A\cup\complement B=\complement(A\cap B).$$

这就是第二个公式.

1.5. 集的积

1.5.1. 设 x, y 是两个事物. 称这两个事物的序列 (x, y) 为偶，其中 x 是第一个元素，y 是第二个元素. 有 $(x, y)\neq(y, x)$. 我们不要把这个概念与两个元素的集 $\{x, y\}$ 的概念相混淆（比较 1.1.4），对于后者，$\{x, y\}=\{y, x\}$.

1.5.2. 设 X, Y 是两个集. 由满足 $x\in X$, $y\in Y$ 的一切偶

(x, y)组成的集，称为 X 和 Y 的积，记作 $X\times Y$.

1.5.3．例　我们可以构造集 $\boldsymbol{R}\times\boldsymbol{R}$. 这个集的元素是两个实数的偶$(x, y)$. 为了使这个概念显得更直观，我们把 $\boldsymbol{R}\times\boldsymbol{R}$ 中的每一个偶(x, y)与平面 P 内关于某个坐标系有坐标 x 和 y 的点相对应；于是 $\boldsymbol{R}\times\boldsymbol{R}$ 与 P 等同.

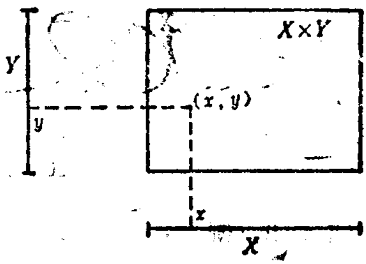

图　5

即使遇到抽象集的积，想想这个例子，不无益处.

1.5.4．推广　用 n 个事物 $x_1, x_2, \cdots, x_n$, 可以定义有序序列 $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$. 设 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是集. 使 $x_1\in X_1, x_2\in X_2, \cdots, x_n\in X_n$ 的一切有序序列$(x_1, x_2, \cdots, x_n)$构成的集，叫做 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 的乘积集，并记作 $X_1\times X_2\times\cdots\times X_n$.

1.5.5．若 $X_1=X_2=\cdots=X_n$, 积 $X_1\times X_2\times\cdots\times X_n$ 便记做 X^n. 例如，记 $\boldsymbol{R}\times\boldsymbol{R}=\boldsymbol{R}^2$.

1.5.6．若 x, y, z 是任意三个事物，我们可以把$((x, y), z)$与(x, y, z)看作等同. 故若 X, Y, Z 是三个集，则$(X\times Y)\times Z$ 与 $X\times Y\times Z$ 等同，$((X\times Y)\times Z)\times T$ 与 $X\times Y\times Z\times T$ 等同，等等.

例如，$\boldsymbol{R}^2\times\boldsymbol{R}$ 与 $\boldsymbol{R}^3$ 等同

1.6．函数

1.6.1．设 X, Y 是两个集. 按照某个法则如果 X 的每个元素，都有 Y 的某一个确定的元素和它对应，便把这个法则叫做定义在 X 上、取值在 Y 内的函数. X 叫做这个函数的定义集.

设 f 为函数. 若 $x\in X$, 又若 y 是 Y 中与 x 对应的元素，我们称 y 是 x 在 f 下的象，记成 $y=f(x)$. 或者说 f 是 X 到 Y 内的

一个映射. 映射 f 也记作

$$x \mapsto f(x).$$

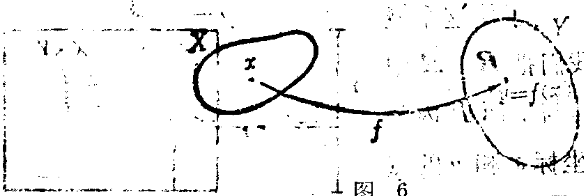

图 6

1.6.2. 例:

1. 若 $Y=\boldsymbol{R}$, 便说 f 是一个实函数; 若 $X=\boldsymbol{R}$, 或者更一般地, X 是 $\boldsymbol{R}$ 的一个部分, 便说 f 是一个实变量函数. 本教程主要研究的是实变量的实函数. 大家已经熟悉很多例子, 例如:

$x \mapsto x^3$ 是定义在 $\boldsymbol{R}$ 内的实函数.

$x \mapsto \dfrac{2x+1}{x-3}$ 是定义在 $\boldsymbol{R}-\{3\}$ 内的实函数.

$x \mapsto \sqrt{x}$ 是对 $x \geqslant 0$ 有定义的实函数.

也可用不很确切的记号 x^3, $\dfrac{2x+1}{x-3}$, $\sqrt{x}$ 来简单地表示它们.

2. 对每个实数偶 (x, y), 令

$$f(x, y) = x \sin(x^2+y^2).$$

这样, 我们便定义了一个函数 f, 它的定义集为 $\boldsymbol{R}^2$, 取值在 $\boldsymbol{R}$ 内. 一个定义在 $\boldsymbol{R}^2$ 的某个部分内的函数, 叫做二实变量函数. 我们同样可以定义 3, 4, …实变量函数.

3. 平移与位似是平面 (或空间) 到其自身内的一种映射. 在平面 P 内, 对于极点 O 的反演, 是一个 $P-\{O\}$ 到 $P-\{O\}$ 内的映射.

4. 设 E 为集. E 到 E 内的映射 $x \mapsto x$ 称为 E 的恒等映射, 并记作 id_E. 更一般地, 若 F 是 E 的一个部分, $x \mapsto x$, 作为 F 到 E 内的一个映射, 便称为 F 到 E 内的恒等映射.

5. 设 f 是 X 到 Y 内的映射，f' 是 X' 到 Y 内的映射，其中 $X' \subset X$. 如果对每个 $x \in X'$，总有 $f'(x)=f(x)$，则称 f' 为 f 在 X' 上的限制.

1.6.3. 记号　我们将采用简洁的记号

$$f:\ X \to Y \quad \text{或} \quad X \xrightarrow{f} Y$$

以代替"f是 X 到 Y 内的映射"这一冗长的说法.（此处的箭号与极限过程中的箭号毫不相干.）我们不要把这个记号与前面引入的记号 $x \mapsto f(x)$ 相混淆.

1.6.4. 函数的图形　设 f 是 X 到 Y 内的一个映射. f 的图形便是 $X \times Y$ 的一个部分，即由偶 $(x, f(x))$，$x \in X$ 所成的集. 若 f 是实变量的实函数，就得出古典函数图形的概念.

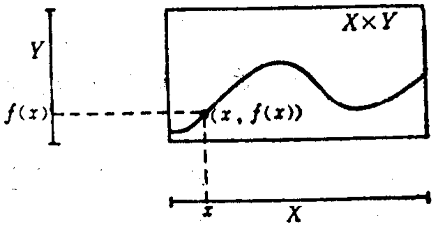

图 7

1.7. 映射的复合

1.7.1. 设 X、Y、Z 是三个集，并设 $f: X \to Y$，$g: Y \to Z$ 是两个映射. X 到 Z 内的映射 $x \mapsto g(f(x))$ 称为 g 和 f 的复合，并记为 $g \circ f$（如果不致与通常的乘积发生混淆，可简单地记作 gf）.

1.7.2. 例：取 $X=Y=Z=\mathbf{R}$，$f(x)=\sin x$，及 $g(x)=x^2$，有

$$(g \circ f)(x)=(\sin x)^2=\sin^2 x,$$
$$(f \circ g)(x)=\sin(x^2).$$

我们看到，一般地，$f \circ g \neq g \circ f$.

1.7.3. 推广　设有映射.

$$f_1:\ X_1 \to X_2, \quad f_2:\ X_2 \to X_3, \ \cdots, \quad f_n:\ X_n \to X_{n+1}.$$

我们可以构造复合映射.

$$f_n \circ f_{n-1} \circ \cdots \circ f_2 \circ f_1:\quad X_1 \to X_{n+1}.$$

映射的复合是可结合的.

$$f_1\circ(f_2\circ f_3)=(f_1\circ f_2)\circ f_3=f_1\circ f_2\circ f_3.$$

1.7.4. 若 X 是集，f 是 X 到其自身内的映射，我们可以构造 $f\circ f$, $f\circ f\circ f$, $\cdots$. 如果不致与通常的乘积混淆，我们可以把它们写成 f^2, f^3, $\cdots$.

1.8. 单射，全射，全单射

1.8.1. 设 f 是 X 到 Y 内的映射.

a. 如果 X 的两个不同元素，在 Y 内总是有不同的象，则称 f 是单射. 换句话说，这时如果 $f(x)=f(x')$, $(x\in X,\ x'\in X)$, 必然导致 $x=x'$.

b. 如果 Y 的每一个元素，都是 X 内至少一个元素在 f 下的象，则称 f 是全射，或者说 X 到 Y 上的映射.

c. 如果 f 不仅是单射，而且还是全射，便把 f 叫做全单射. 一个 X 到 X 内的全单射，叫做 X 的一个置换.

1.8.2. **全单射的逆映射** 假设 f: $X\to Y$ 是全单射，y 是 Y 的一个元素. 由于 f 是全射，所以 X 内至少存在一个元素 x 满足 $f(x)=y$. 又因为 f 是单射，所以这个元素是唯一的. 把 X 内与 y 相对应的这个元素记为 $g(y)$. 按照这一方式. 我们便定义了一个 Y 到 X 内的映射 g, 我们把它叫做 f 的逆映射，并记成 f^{-1}.

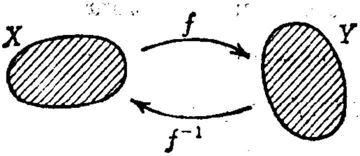

图 8

设 x 是 X 的一个元素. 试问 X 内哪一个唯一的元素在 f 下的象是 $f(x)$? 显然这个元素就是 x. 故