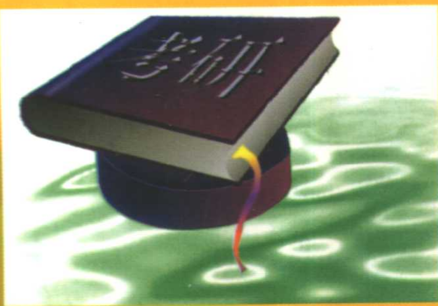
2001 考研辅导班教材



2001年考研
数学(三)应试教程
〔经济类〕

编著：北京大学数学系 田茂英

知识产权出版社

2001年考研
数学(三)应试教程

编　著　北京大学数学系
　　　　田茂英
总策划　东方飞龙

知识产权出版社

图书在版编目(CIP)数据

2001年考研数学应试教程/田茂英编著. - 北京:知识产权出版社,2000.3
ISBN 7 - 80011 - 475 - 9
Ⅰ.2… Ⅱ.田… Ⅲ.高等数学 - 研究生 - 入学考试 - 自学参考资料 Ⅳ.013

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2000)第 17946 号

总 策 划:东方飞龙
责任编辑:李 斯
封面设计:东方飞龙

知识产权出版社出版发行
(北京市海淀区蓟门桥西土城路6号 邮编100088)
北京市汤北胶印厂印刷 新华书店北京发行所发行
2000年4月第1版 2000年4月第1次印刷
开本/787×1092 1/16 印张/128
字数/2800千字
ISBN 7 - 80011 - 475 - 9/G·053
全套(共四册)定价:126.00元
本册定价:34.00元

再 版 说 明

为了帮助广大考生更好地复习应试，根据读者的要求，依据新修订的研究生入学数学考试大纲，在作者主编的《考研数学应试教程（理工类）》、《考研数学应试教程（经济类）》(2000 北大版）的基础上，把原来的理工数学分为数学一、数学二，经济数学分为数学三、数学四，共计四本书，本书是为数学三考生编写的。数学三具体适用的专业见附录。

本辅导教材系列自出版以来一直受到广大读者的普遍欢迎，因此，本书保留了原教材的优点，同时为了更适合数学三（经济类）的考生学习，在内容上完全按照大纲对数学三规定的要求编写。

本书由四部分组成：有代表性的错解题目分析、高等数学、线性代数、概率论与数理统计初步，各部分所选材料覆盖了数学考试大纲中数学三所要求的全部考试知识点。本教材对大纲中数学三所要求的概念、定理和公式，进行了简明扼要的叙述、总结。重点精选了各种类型的典型例题以及历年考研试题作重点并详细解答。对所选例题，或在解答前作了解题方法分析，或在题后有关键注解。大部分题目都一题多解，这有利于提高考生的解题应试能力。每章（或节）后都配有适当数量的习题，以便读者练习。全部习题都附有答案或提示（个别除外）。虽然如此，考生最好先自己先去作解答，不要过分依赖提示或答案。另外，书后面的附录对数学三所涵盖的专业以及有关研究生考试方面的事宜给出了简单说明。

本书有如下三个突出的优点：

第一：加强了基本概念及基本技能方面的知识。以便于读者对概念的理解，对理论的掌握和对知识的运用。

第二：在突出重点的前提下，注重了解题思路的清晰性及系统性，并对一般解题方法及解题思路作了总结和分析。这有利于提高考生的解题能力。

第三：根据考试的实际需要，大部分例题或习题是综合性的。即在一个题目中，包含了各个不同部分的知识，更有的题目既包含高等数学又涉及线性代数的内容，或者概率论等的不同部分的内容。这对提高读者分析问题、解决问题的能力是大有益处的。

本书不仅是数学三（经济类）研究生入学应试者的复习用书，也可作为正在学习高等数学、线性代数、概率论与数理统计初步的经济类院校的本科生、大专生、电大、夜大学生的教学参考书，也便于自学者阅读。

由于水平有限，书中难免有不妥或错误之处，敬请赐教。

田茂英

2000 年 4 月于北大燕北园

目　录

引导篇　典型习题错解分析

现将近几年来在辅导考研过程中及研究生入学考试试卷(三)的解答中所发现的具有代表性的习题错解写出来并加以分析，对广大考生是有益的.这一方面可引起对错误解法的重视，少犯或不犯常见的错误；另一方面可以带着错解中所发现的问题再去学习(复习)相关内容，以便加深对相关知识的理解，并提高解题能力.这也算“引导篇”这个标题的由来吧.这一部分选的题目既包含高等数学，线性代数也涉及到概率论.

例 1　设 $f(x)$在$(a,+\infty)$上可微，且 $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x)$存在.又如果 $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)+f'(x)]=b$.证明 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=b$，其中 b 为有限常数.

［**错证**］　作辅助函数

$$F(x)=e^x f(x)$$

则

$$F'(x)=e^x(f(x)+f'(x))$$

由洛必达法则

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{F(x)}{e^x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{F'(x)}{(e^x)'}=\lim_{x\to+\infty}(f(x)+f'(x))=b<+\infty$$

另一方面

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{F(x)}{e^x}=\lim_{x\to+\infty}f(x)$$

因此

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=b$$

［**分析**］　在证明过程中错误地应用了洛必达法则.因为当 $x\to+\infty$时，$e^x\to+\infty$，但

$$\lim_{x\to+\infty}F(x)\neq\infty$$

例如　设 $f(x)=e^{-x}$，它满足题设条件，但是

$$\lim_{x\to+\infty}F(x)=\lim_{x\to+\infty}e^x\cdot e^{-x}=1$$

因此，不能用洛必达法则.

本题要证明 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=b$，即只要证明 $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=0$ 即可.可用拉格朗日中值定理.

［**正确证法**］　对任意 $x\in(a,+\infty)$，在$[x,x+1]$上 $f(x)$满足拉格朗日中值定理的条件，于是存在 $\xi\in(x,x+1)$，使得

$$f(x+1)-f(x)=f'(\xi),$$

由于 $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)$存在，故

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty}f(x)&=\lim_{x\to+\infty}[f(x)+f'(x)-f'(x)]\\&=\lim_{x\to+\infty}[f(x)+f'(x)]-\lim_{x\to+\infty}f'(x)\\&=b-\lim_{x\to+\infty}f'(x)\end{aligned}$$

存在有限.因此

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty}f'(x)&=\lim_{\xi\to+\infty}f'(\xi)\\&=\lim_{x\to+\infty}f(x+1)-\lim_{x\to+\infty}f(x)=0\end{aligned}$$

所以

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=b$$

例 2 设 $f(x)$ 为可微的周期函数，且 $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x)$ 存在有限. 证明 $f(x)$ 是常数.

［**错证**］ 只要证明 $f'(x)\equiv 0$. 先证 $f'(x)$ 也是周期函数. 设 T 为 $f(x)$ 的最小正周期，对任意 $x\in(-\infty,+\infty)$，则

$$f'(x+T)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+T+\Delta x)-f(x+T)}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=f'(x)$$

即 $f'(x)$ 也是周期函数. 易知 $f(x)$ 在 $[0,T]$ 上连续，从而 $f(x)$ 是有界函数. 又因为 $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x)$ 存在，利用洛必达法则有

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}f'(x)=0$$

因为 $f'(x+T)=f'(x)$，所以

$$f'(x)=f'(x+nT)$$

其中 n 为正整数. 令 $n\to\infty$，则

$$f'(x)=\lim_{n\to+\infty}f'(x+nT)=\lim_{x\to+\infty}f'(x)=0$$

由于 x 的任意性，因此，$f(x)$ 为常数.

［**分析**］ 前半部分的证明是正确的，即 $f'(x)$ 为周期函数且有界的证明是对的. 错误发生在利用洛必达法则. 当 $x\to+\infty$ 时，用的是"$\frac{\infty}{\infty}$"型洛必达法则. 但此处不能保证 $f(x)\to\infty$.

［**正确证法**］ 设 T 为 $f(x)$ 的最小正周期. 同样可证 $f'(x)$ 也是周期函数，即对任意自然数 n，有

$$f'(x)=f'(x+nT),\quad \forall\, x\in(-\infty,+\infty)$$

令 $n\to+\infty$，则

$$f'(x)=\lim_{n\to+\infty}f'(x+nT)$$

再利用数列极限与函数极限的关系，得

$$\lim_{n\to+\infty}f'(x+nT)=\lim_{x\to+\infty}f'(x)$$

已知 $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x)$ 存在有限，于是 $f'(x)=C$，C 为常数. 下面证明 $C=0$. 由于

$$f(x+T)=f(x),\quad \forall\, x\in(-\infty,+\infty)$$

在 $[x,x+T]$ 上用罗尔定理，则存在 $\xi\in(x,x+T)$，使得

$$f'(\xi)=0$$

从而 $C=0$，因此 $f'(x)\equiv 0$，即 $f(x)$ 为常数.

例 3 设 $f(x)$ 在 $x=a$ 处有二阶导数，求 $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(a+h)+f(a-h)-2f(a)}{h^2}$.

错误解法 （依次用两次洛必达法则）

$$\text{原极限}\xlongequal{(洛)}\lim_{h\to 0}\frac{f'(a+h)-f'(a-h)}{2h}\xlongequal{(洛)}\lim_{h\to 0}\frac{f''(a+h)+f''(a-h)}{2}=f''(a).$$

因为 $f(x)$ 在 $x=a$ 处有二阶导数，不能保证在 $x=a$ 附近也有二阶导数，只能保证在 $x=a$ 附近有一阶导数（这可由 $x=a$ 处二阶导数的定义

$$f''(a)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f'(a+\Delta x)-f'(a)}{\Delta x}$$

得出）. 而洛必达法则要求在 $x=a$ 附近有相应的导数，故只能用一次洛必达法则.

正确解法（先用一次洛必达法则，再用导数的定义）

$$\text{原极限}\xlongequal{(洛)}\lim_{h\to 0}\frac{f'(a+h)-f'(a-h)}{2h}$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{h\to 0}\frac{f'(a+h)-f'(a)+f'(a)-f'(a-h)}{h}$$

$$=\frac{1}{2}\left\{\lim_{h\to 0}\frac{f'(a+h)-f'(a)}{h}+\lim_{h\to 0}\frac{f'(a-h)-f'(a)}{-h}\right\}$$

$$= f''(a).$$

例 4 设 $f(z)$ 为连续函数，且在 $z=0$ 处可微. 求

$$\lim_{t\to 0^+}\frac{1}{\pi t^3}\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant t^2} f(\sqrt{x^2+y^2})\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

［**错解**］ 为计算二重积分采用极坐标

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ z = r\sin\theta \end{cases}$$

则

$$\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant t^2} f\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^t f(r)\cdot r\mathrm{d}r$$

$$= 2\pi\int_0^t r\cdot f(r)\mathrm{d}r$$

于是

$$\lim_{t\to 0^+}\frac{1}{\pi t^3}\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant t^2} f\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= \lim_{t\to 0^+}\frac{2}{t^3}\int_0^t rf(r)\mathrm{d}r \xlongequal{(洛)} \lim_{t\to 0^+}\frac{2tf(t)}{3t^2}$$

$$= \lim_{t\to 0^+}\frac{2f(t)}{3t} \xlongequal{(洛)} \lim_{t\to 0^+}\frac{2}{3}f'(t) = \frac{2}{3}f'(0)$$

［**分析**］ 前半部分的解法是对的. 在求极限的过程中第一次用洛必达法则也是正确的，但是第二次用洛必达法则开始以后是错误的. 原因有二：其一是当 $t\to 0^+$ 时，$f(t)$ 的极限不一定是 0，即不一定是 $\dfrac{“0”}{0}$ 型，因此不能用洛必达法则；其二是既便能用洛必达法则(即如果有 $\lim\limits_{t\to 0^+}f(t)=0$)，但是 $f'(t)$ 在 $t=0$ 处也不一定连续(或 $\lim\limits_{t\to 0^+}f'(t)$ 不一定存在)，所以，求极限的最后等式也不一定成立. 当 $f(0)=0$ 时，可用 $t=0$ 处 $f'(0)$ 的定义来计算，故要分 $f(0)$ 是否等于 0 进行讨论.

［**正确解法**］ 前半部分的解法相同(略).

(1) 当 $f(0)=0$ 时，由于 $f(t)$ 在 $t=0$ 处可导，故

$$\lim_{t\to 0^+}\frac{2\pi}{\pi t^3}\int_0^t rf(r)\mathrm{d}r \xlongequal{(洛)} \frac{2}{3}\lim_{t\to 0^+}\frac{f(t)}{t}$$

$$= \lim_{t\to 0^+}\frac{f(t)-f(0)}{t} = f'(0)$$

(2) 当 $f(0)\neq 0$ 时，由于 $f(t)$ 在 $t=0$ 处可导，故 $f(0)$ 为有限值，且 $\lim\limits_{t\to 0^+}f(t)=f(0)$，因此

$$\lim_{t\to 0^+}\frac{f(t)}{t} = \infty$$

综合以上得

$$\lim_{t\to 0^+}\frac{1}{\pi t^4}\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant t^2} f\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \begin{cases} f'(0), & 当\ f(0)=0\ 时, \\ \infty, & 当\ f(0)\neq 0\ 时. \end{cases}$$

例 5 讨论如下常数项级数的敛散性

$$\sqrt{2}+\sqrt{2-\sqrt{2}}+\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}+\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2-\sqrt{2}}}}+\cdots$$

［**错解**］

$$a_1 = \sqrt{2} = 2\times\frac{1}{\sqrt{2}} = 2\sin\frac{\pi}{4} = 2\cos\frac{\pi}{4},$$

$$a_2=\sqrt{2-\sqrt{2}}=\sqrt{2-2\cos\frac{\pi}{4}}=\sqrt{2\left(1-\cos\frac{\pi}{4}\right)}$$

$$=\sqrt{2\times 2\sin^2\frac{\pi}{8}}=2\sin\frac{\pi}{2^3}$$

而

$$\sqrt{2+\sqrt{2}}=\sqrt{2+2\cos\frac{\pi}{4}}=\sqrt{2\left(1+\cos\frac{\pi}{4}\right)}=\sqrt{4\cos^2\frac{\pi}{8}}$$

$$=2\cos\frac{\pi}{2^3}$$

$$a_3=\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}=\sqrt{2-2\cos\frac{\pi}{2^3}}=\sqrt{2\left(1-\cos\frac{\pi}{2^3}\right)}$$

$$=\sqrt{4\sin^2\frac{\pi}{2^4}}=2\sin\frac{\pi}{2^4}$$

由数学归纳法得

$$a_n=2\sin\frac{\pi}{2^{n+1}},\quad n\geqslant 1$$

于是

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2\sin\frac{\pi}{2^{n+2}}}{2\sin\frac{\pi}{2^{n+1}}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\sin\frac{\pi}{2^{n+2}}}{\frac{\pi}{2^{n+2}}}\times\frac{\frac{1}{2}\times\frac{\pi}{2^{n+1}}}{\sin\frac{\pi}{2^{n+1}}}=\frac{1}{2}<1$$

由比值判别法知原级数收敛.

［**分析**］ 由于

$$\sqrt{2+\sqrt{2-\sqrt{2}}}=\sqrt{2+2\sin\frac{\pi}{2^3}}\neq 2\cos\frac{\pi}{2^4}$$

故

$$a_4=\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2-\sqrt{2}}}}=\sqrt{2-\sqrt{2+2\sin\frac{\pi}{2^3}}}\neq 2\sin\frac{\pi}{2^5}$$

同理可得

$$a_n\neq 2\sin\frac{\pi}{2^{n+1}},\quad n\geqslant 4.$$

因此,解法错误.事实上可以证明原级数的通项不趋于 0.

［**正确解法**］

$$a_1=\sqrt{2},$$

$$a_2=\sqrt{2-\sqrt{2}}=\sqrt{2-a_1}<\sqrt{2}$$

$$a_3=\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}=\sqrt{2-\sqrt{2+a_1}}<\sqrt{2}$$

$$a_4=\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2-\sqrt{2}}}}=\sqrt{2-\sqrt{2+a_2}}<\sqrt{2}$$

用数学归纳法可以证明：对任意正整数 $n\geqslant 1$,有

$$a_n \leqslant \sqrt{2}$$

而当 $n \geqslant 3$ 时，有

$$a_n \geqslant \sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}$$

因此，$a_n \not\to 0(n\to\infty)$，即原级数发散.

例 6 利用倒代换计算积分

$$I=\int \frac{x+1}{x^2\sqrt{x^2-1}}\mathrm{d}x$$

[**错解**]

$$I=\int \frac{x+1}{x^2\sqrt{x^2-1}}\mathrm{d}x \xlongequal{\text{令 } x=\frac{1}{t}} \int \frac{\frac{1}{t}+1}{\frac{1}{t^2}\sqrt{\left(\frac{1}{t}\right)^2-1}}\left(-\frac{\mathrm{d}t}{t^2}\right)$$

$$=-\int \frac{1+t}{\sqrt{1-t^2}}\mathrm{d}t=-\int \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\mathrm{d}t+\int \frac{\mathrm{d}(1-t^2)}{2\sqrt{1-t^2}}$$

$$=-\arcsin t+\sqrt{1-t^2}+C$$

$$=\frac{\sqrt{x^2-1}}{x}-\arcsin\frac{1}{x}+C$$

[**分析**] 将 x 从二次根式中开出应有绝对值，从而应分 $x>0$，$x<0$ 两种情况积分. 而此时只是没有指明地限制了 $x>0$，即限制了 x 的变化范围.

[**正确解法**]

$$I=\int \frac{x+1}{\sqrt{x^2\left(1-\frac{1}{x^2}\right)}}\cdot\frac{\mathrm{d}x}{x^2}=\int \frac{x+1}{|x|\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}}\times\frac{\mathrm{d}x}{x^2}$$

(1) 当 $x>0$ 时，令 $x=\frac{1}{t}$，则有

$$I=-\int \frac{1+t}{\sqrt{1-t^2}}\mathrm{d}t=-\arcsin t+\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}+C$$

$$=\frac{\sqrt{x^2-1}}{x}-\arcsin\frac{1}{x}+C$$

(2) 当 $x<0$ 时，则

$$I=-\int \frac{1+\frac{1}{x}}{\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}}\times\frac{\mathrm{d}x}{x^2} \xlongequal{\text{令 } x=\frac{1}{t}} \int \frac{1+t}{\sqrt{1-t^2}}\mathrm{d}t$$

$$=\arcsin t-\sqrt{1-t^2}+C$$

$$=-\sqrt{1-\left(\frac{1}{x}\right)^2}+\arcsin\frac{1}{x}+C$$

$$=\frac{\sqrt{x^2-1}}{x}+\arcsin\frac{1}{x}+C$$

将 $x>0$，$x<0$ 的结果写在一起为

$$I=\int \frac{x+1}{x^2\sqrt{x^2-1}}\mathrm{d}x=\frac{\sqrt{x^2-1}}{x}-\arcsin\frac{1}{|x|}+C$$

例 7 设 n 阶实方阵 A 满足 $|A+\sqrt{2}E|=0$，$A^TA=E$，且 $|A|<0$，其中 E 为 n 阶单位矩阵. 求 A^* 的一

个特征值.

[解一] 由于$|A+\sqrt{2}E|=|A-(-\sqrt{2})E|=(-1)^n|(-\sqrt{2})E-A|=0$,从而有

$$|(-\sqrt{2})E-A|=0$$

故$\lambda=-\sqrt{2}$是A的一个特征值.

又因为$|A^TA|=|A|^2=|E|=1$,且$|A|<0$,所以

$$|A|=-1,且 A 可逆$$

于是A^*有一个特征值为$\frac{|A|}{\lambda}=\frac{|A|}{-\sqrt{2}}=\frac{-1}{-\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$

[解二] 由于$A^TA=E$,故A是正交矩阵.从而A如果有实特征值只能是1或-1(见第二篇第五章§3).又因为$|A|<0$,且$|A^TA|=|A|^2=1$,所以$|A|=-1$.此时可以证明-1是A的一个特征值,事实上,由于

$$|A+E|=|A+A^TA|=|A||E+A^T|=-|(E+A)^T|=-|E+A|$$

由此得出

$$2|E+A|=0,\quad |A+E|=0$$

而

$$|A+E|=|A-(-E)|=(-1)^n|(-E)-A|=0$$

因此

$$|(-E)-A|=0$$

即-1是A的一个特征值.从而

$$\frac{|A|}{\lambda}=\frac{-1}{-1}=1$$

是A^*的一个特征值.

分析 从解法一知$-\sqrt{2}$是A的一个特征值.而由解法二知A是实正交矩阵,它的实特征值只能是1或-1.因此$-\sqrt{2}$不应是A的特征值.之所以出现矛盾,原因在于题目本身的两个条件$|A+\sqrt{2}E|=0$与$A^TA=E$矛盾.可利用两个条件把原题改写成如下两个题:

(1) 设n阶实方阵A满足:

$$|A+\sqrt{2}E|=0 且 |A|=-1$$

求A^*的一个特征值.

(2) 设n阶实方阵A满足:$A^TA=E$,且$|A|<0$,求A^*的一个特征值.

此时,问题(1),(2)就可分别用前面讲的解法一,解法二求解了.

例8 设某商品每周的需求量X是服从区间[10,30]上的均匀分布的随机变量.而经销商店进货量为区间[10,30]中间的某一整数.商店每销售一单位商品可获利500元;若供大于求则削价处理,每处理1单位商品亏损100元;若供不应求,则可以外部调剂供应,此时每1单位商品仅获利300元.为使商店所获利润期望值不少于9280元.试确定最少进货量.

[错解] 设进货量为N,则利润为

$$T=\begin{cases}500N+(X-N)300=300X+200N, N\leqslant X\leqslant 30,\\ 500X-(N-X)100=600X-100N, 10\leqslant X\leqslant N\end{cases}$$

期望值为

$$\begin{aligned}E(T)&=\int_{10}^{30}\frac{1}{20}\cdot T\mathrm{d}x=\frac{1}{20}\int_{10}^{N}(600x-100N)\mathrm{d}x\\&\quad+\frac{1}{20}\int_{N}^{30}(300x+200N)\mathrm{d}x\\&=\frac{1}{20}\left(600\times\frac{x^2}{2}-100Nx\right)\Bigg|_{10}^{N}+\frac{1}{20}\left(300\times\frac{x^2}{2}+200Nx\right)\Bigg|_{N}^{30}\end{aligned}$$

$$= -7.5N^2 + 350N + 5250$$

令

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}N}(ET) = -15N + 350 = 0$$

得

$$N = 23.33(\text{单位})$$

因为$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}N^2}(ET)\Big|_{N=23.33} = -15<0$,所以当 $N=23.33$ 时,所获利润达最大值.由于需求量与进货量应取正整数,故应取 $N=23$ 或 $N=24$.

[**分析**] 前半部分解法是正确的,即从开始到利润的期望值的计算是对的.但在确定 N 取何值时使 $E(T)\geqslant 9280$ 时,把解不等式

$$-7.5N^2 + 350N + 5250 \geqslant 9280$$

错误地当成求函数 $E(T)$的最大值问题.

[**正确解法**] 前半部的解法与上面的相同(略)得

$$E(T) = -7.5N^2 + 350N + 5250$$

依题意有

$$-7.5N^2 + 350N + 5250 \geqslant 9280$$

即

$$7.5N^2 - 350N + 4030 \leqslant 0$$

由此解得

$$20\frac{2}{3} \leqslant N \leqslant 26$$

因此,利润期望值不少于 9280 元的最少进货量为 21 单位.

例 9 甲、乙、丙三人独立地对同一目标射击,其命中率分别为 0.6,0.5 和 0.4.如果已知目标被命中,求它是甲命中的概率.

[**错解**] 令 A="甲射击",B="乙射击",C="丙射击",D="目标被击中"

则

$$P(A) = P(B) = P(C) = \frac{1}{3},$$

$$P(D|A) = 0.6, P(D|B) = 0.5, P(D|C) = 0.4$$

由贝叶斯公式得

$$P(A|D) = \frac{P(AD)}{P(D)} = \frac{P(A)P(D|A)}{P(A)P(D|A) + P(B)P(D|B) + P(C)P(D|C)}$$

$$= \frac{\frac{1}{3}\times 0.6}{\frac{1}{3}\times 0.6 + \frac{1}{3}\times 0.5 + \frac{1}{3}\times 0.4} = \frac{0.6}{1.5} = 0.4$$

[**正确解法**] 设 A="甲命中",B="乙命中",C="丙命中",D="目标被命中"(即甲、乙、丙至少一人命中),由概率加法公式

$$\begin{aligned} P(D) &= P(A+B+C) \\ &= P(A) + P(B) + P(C) - P(AB) - P(BC) - P(AC) + P(ABC) \end{aligned}$$

由于独立性,则

$$P(AB) = P(A)P(B) = 0.6 \times 0.5$$

$$P(BC) = P(B)P(C) = 0.5 \times 0.4$$

$$P(AC) = P(A)P(C) = 0.6 \times 0.4$$

$$P(ABC) = P(A)P(B)P(C) = 0.6 \times 0.5 \times 0.4$$

故

$$P(D)=0.88$$

由条件概率及 $AD=A$，因此

$$P(A|D)=\frac{P(AD)}{P(D)}=\frac{P(A)}{P(D)}=\frac{0.6}{0.88}\approx 0.68$$

第一篇　高等数学

第一章　一元函数微分学

§1　函　　数

根据数三考试大纲本节考试内容及考试要求见下表

考试内容	函数的概念及表示法,函数的有界性,单调性、周期性和奇偶性,反函数,复合函数隐函数,分段函数,基本初等函数的性质及其图形,初等函数.
考试要求	(1) 理解函数的概念,掌握函数的表示法. (2) 了解函数的有界性、单调性、周期性和奇偶性. (3) 理解复合函数、反函数、隐函数和分段函数的概念. (4) 掌握基本初等函数的性质及其图形,理解初等函数的概念 (5) 会建立简单应用问题中的函数关系式

一、函数的概念

1. 函数的定义(见表 1.1)

表　1.1

名称	定　　义
函数	设 x 与 y 是两个变量,分别在实数集合 X 与 Y 中取值.对每一个值 $x\in X$,按照某一法则 f,存在着唯一确定的值 $y\in Y$ 与之对应,记为 $f(x)$($x\mapsto f(x)$),则称 y 是 x 的**函数**,或称这种对应关系 f 为函数记作 $y=f(x)$ 或 $f:X\to Y$ 并称 x 为**自变量**,y 是**因变量**,X 是**定义域**.
值域	函数值 $f(x)$的全体,即集合 $\{y\in Y\mid y=f(x),x\in X\}$ 称为函数的**值域**,记作 $f(X)$.显然 $f(X)\subset Y$.
定义域	自变量的取值范围 X 称为定义域.常见定义域分为两种: (1) 由实际问题决定的.例如某一天看某火车站某条线路的列车价目表.对某次列车不同车站对应不同的票价,则票价是车站的函数,其定义域由该价目表所决定. (2) 自然定义域.当函数由公式(表达式)给出时,使公式有意义的自变量的取值范围,称为**自然定义域**.

注 (1) 这里的函数是单值的.

(2) 只有一个自变量的函数,称为一元函数.两个以上的自变量的函数,称为多元函数.这里讲的是一元函数.

(3) 函数的实质就是对应,单值对应(不要求必须双方单值).

2. 求函数的定义域

我们通常讨论的定义域是指自然定义域.

使公式有意义的常遇到的四种情况是:

(1) 分式的分母不为零;

(Ⅱ) $\sqrt[2n]{f(x)}$，n 为正整数，要求 $f(x)\geqslant 0$；

(Ⅲ) $\log_a f(x)$，要求 $a>0$ 且 $a\neq 1$，$f(x)>0$；

(Ⅳ) $\arcsin f_1(x)$，要求 $|f_1(x)|\leqslant 1$；

$\arccos f_2(x)$，要求 $|f_2(x)|\leqslant 1$.

此外，对幂指函数 $y=f(x)^{g(x)}$，要求 $f(x)>0$.

例1 求下列函数的定义域

(1) $y=\dfrac{x^2}{x-1}+\ln(9-x^2)-x^{x^x}-\arcsin\sqrt{1-x/2}$

(2) $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2^{-nx}-2^{nx}}{2^{-nx}+2^{nx}}$.

解 (1) 所求定义域为 4 个函数定义域的公共部分：

$\dfrac{x^2}{x-1}$的定义域为：$x\neq 1$；

$\ln(9-x^2)$，由 $9-x^2>0\Rightarrow |x|<3$，故其定义域为：

$$-3<x<3;$$

x^{x^x}的定义域为：$x>0$；

$\arcsin\sqrt{1-x/2}$，由 $1-\dfrac{x}{2}\geqslant 0$ 且 $1-\dfrac{x}{2}\leqslant 1$，解得

$x\leqslant 2$ 且 $x\geqslant 0$，故定义域为：$0\leqslant x\leqslant 2$.

综合以上，所求定义域为

$$0<x<1,\quad 1<x\leqslant 2$$

(2) 当 $x>0$ 时，$f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2^{nx}(2^{-2nx}-1)}{2^{nx}(2^{-2nx}+1)}=-1$；当 $x=0$ 时，$2^{nx}=2^{-nx}=1$，故 $f(0)=0$；当 $x<0$ 时，由于 $2^{nx}\to 0(n\to\infty)$，故 $f(x)=1$.

因此

$$f(x)=\begin{cases}-1, & x>0;\\ 0, & x=0;\\ 1, & x<0,\end{cases}$$

其定义域为$(-\infty,+\infty)$.

二、分段函数

对于自变量的某些不同值(或在不同区间上)，函数的表达式不同，这种函数称为**分段函数**. 常见的几种分段函数见下表(1.2)

表 1.2

名　称	定　义	定义域	值　域
绝对值函数	$y=f(x)=\|x\|=\begin{cases}x, & x\geqslant 0;\\ -x, & x<0\end{cases}$	$(-\infty,+\infty)$	$[0,+\infty)$
符号函数	$y=\operatorname{sgn} x=\begin{cases}1, & x>0,\\ 0, & x=0,\\ -1, & x<0\end{cases}$	$(-\infty,+\infty)$	集合 $\{-1,0,1\}$
x 的最大整数部分	$y=[x]$ 对任何实数 x，有 $[x]\leqslant x<[x]+1$	$(-\infty,+\infty)$	集合$\{\cdots,-2,-1,0,1,2,\cdots\}$
狄里克雷(Dirichlet)函数	$y=\begin{cases}1, & x\text{ 为有理数};\\ 0, & x\text{ 为无理数}\end{cases}$	$(-\infty,+\infty)$	集合 $\{0,1\}$
以自然数为自变量的函数	例如 $y=\dfrac{1}{n}$，$n=1,2,3,\cdots$	全体自然数	集合 $\left\{1,\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{3},\cdots\right\}$