綫性泛函分析

W. 奥尔利契

科学出版社

綫性泛函分析

W. 奥尔利契著

科学出版社

內 容 簡 介

本书是波兰科学院通訊院士奥尔利契在 1958 年秋季来我国講学时的講义，为第一次发表．本书用精练的文笔介紹了泛函分析的一些基本知識及其在数学分析的一些部門中的应用，特别介紹了波兰学派近年来的研究成果．书后附有别烏欽斯基所选的习題． 这本篇幅不大的书对于在实变数函数論与泛函分析方面具有初步訓練的讀者是很合适的讀物，可以引导讀者走向泛函分析最新发展的某些方面．

此书由中国科学院数学研究所泛函分析研究室以及厦門大学李文清先生整理翻譯而成．

讀者对象：数学研究工作者，高等学校数学教师，数学专业高年級学生．

綫性泛函分析

W. 奥尔利契著

*

科学出版社出版 (北京朝阳門大街 117 号)
北京市书刊出版业营业許可証出字第 061 号

中国科学院印刷厂印刷　新华书店总經售

*

1963年 9月第一版　　书号：2813　字数：116,000
1963年 9月第一次印刷　开本：850×1168 1/32
(京) 0001—4,500　　印张：4 1/2

定价：0.75 元

目　录

引　　言

这份講义的內容乃是綫性泛函分析中选择出来的篇章. 显然,这里所能談到的只是泛函分析的論題中极其有限的选择. 我們熟知,在最近二十五年来,泛函分析有了巨大的进展,并且現在分成了很多內容丰富的領域. 但是有一些基本的知識,乃是每位打算在泛函分析中的任何領域里工作的数学工作者所必須知道的. 本講义的目的乃是給出关于这种最重要而基本的概念的构成与方法上的輔助工具的簡短的概观. 这里将对波兰学派的一些結果作較精确深入的叙述. 在最后,选自求和法理論,直交級数理論的一些例,将作为初等泛函分析应用可能性的例释. 在这些应用領域里波兰学派曾作出有意义的貢献. 附加的文献目录是紧密地与講义中所触及的問題相关联的,并且特別考虑到波兰的著作. 只假定需要非常有限的預备知識,即要求讀者必需知道关于实函数論以及泛函分析的基本概念. 方括号內是文献目录的編号.

作　者

§1. 泛函分析的某些基本概念及某些記法

我們首先汇集泛函分析的一些基本概念并引进一些符号. 我們考虑任意非空的含有抽象元素的集合 X，把这集合 X 作成某种代数結构，在 X 中导入两种基本运算：一为元的加法 $x+y=z$；另一为数量与元的乘法 $tx=w$，这个数量取为实数或复数. 我們要求运算滿足下列公理:

A. 1) $x+y=y+x$,

2) $x+(y+z)=(x+y)+z$,

3) 由等式 $x+y=x+z$ 导致 $y=z$.

B. 4) $(s+t)x=sx+tx$, ⎫
5) $t(x+y)=tx+ty$, ⎭ 分配律

6) $s(tx)=(st)x$,

7) $1\cdot x=x$.

若上述公理全部滿足，則 X 叫做綫性空間，更确切地說，視所取数量为实数或为复数而称 X 为实綫性或复綫性空間.

对此作下列附注:

集合 X 的元一般用字母 $x, y, z, w, \cdots$，数量用拉丁字母 $s, t, u, \cdots$ 或希腊字母 $\lambda, \mu, \nu, \cdots$ 表示，有时集合 X 的元也称为点或矢量. 上述的公理系可以用其他等价的公理系代替，也就是可能把它化簡成含有較少公理的系統等等，这对我們进一步的討論是不关重要的，重要的是能使我們按照簡单的代数运算規則在 X 的元之間进行运算，正如我們熟練地对待 n 維矢量空間那样. 一般說，我們可以把 n 維(实或复)矢量空間当作滿足上述公理的集合 X 的模型. 当然，还有其他非常簡单的綫性空間，例如，在任意定义域中定义的一切函数的集合；在 (a, b) 中的一切連續函数等等，其中两个基本运算按照平常方式定义. 由上述公理系首先导

出下列的簡单命題: X 是关于加法的阿貝尔羣. 其零元我們用 0 表示,即 $x+0=x$,对 X 的任一 x 成立, 且 $0=0\cdot x$, $t\cdot 0=0$, 如果 $x\in X$.

我們导入符号:

$$-x\overset{df}{=}(-1)x,\ x-y\overset{df}{=}x+(-y)=x+[(-1)y].$$

任一有穷和 $x_1\pm x_2\pm\cdots\pm x_n$ 都有意义. 更一般地,任一綫性組合 $t_1x_1+t_2x_2+\cdots+t_nx_n$ 亦有意义,其中 x_i 为 X 的元; t_i 为数量. 对于此种和,我們能够按代数規則进行演算,同时还可以自由地应用交換律及結合律. 于此我們再提出一些基本的代数概念.

由属于 X 的元組成的集合 R 叫做綫性独立,是指 R 非空,也不是只含有零元, 并且沒有一个 R 的元能用 R 的有穷个元的綫性組合来表示; 換言之, 由 $t_1x_1+t_2x_2+\cdots+t_nx_n=0$ 永远导致 $t_1=t_2=\cdots=t_n=0$,此处 $x_i\in R$,且 $x_i\neq x_j$.

我們考查一个綫性空間 X,其中存在 m 个綫性独立元 $x_1, x_2, \cdots, x_m$,它們具有下列属性:每个元 $x\in X$ 可以表示成下列形式,

$$x=t_1x_1+t_2x_2+\cdots+t_mx_m,\quad t_i \text{ 任意}. \tag{1}$$

这样的空間叫做 m 維空間. 这一定义与以下所述等价:在空間 X 中存在着 m 个綫性独立元, 如果 X 中每 $m+1$ 个元已經必是綫性相关,那么 X 中綫性独立元的最大数目恰是 m. 元 $x_1, x_2, \cdots, x_m$ 叫做空間 X 的一个基.例如,在 m 維矢量空間中, m 个单位矢量 $(0, 0, \cdots, 1, 0, \cdots, 0)$ 組成一个基. 借助于一个基, X 中每个元可以恰好按一个方式表示成(1)的形式, 这里諸数 t_i 可以叫做元 x 按照基 $x_1, x_2, \cdots, x_m$ 的坐标. 在代数中証明, 一个基的"长度"是空間的不变量, 即維数 m; 这就是說, 如果 $y_1, y_2, \cdots, y_k$ 是空間 X 的任意基,那末 $k=m$. 显然,只考查有穷維空間絕不是泛函分析的目的,我們的主要兴趣在于无穷維空間. 这是指那些空間,其中存在着无穷多个綫性无关元的組.

如果 $Y\subset X$ (設 Y 不是空的)表示集 X 的一个子集,并具有下列属性:当 x, y 属于 Y 时, 每一个綫性組合 $sx+ty$ 也属于 Y, 那

末，Y 叫做空間 X 的綫性子空間．由无穷維空間的定义显然看出，可以把任意高維的有穷維空間嵌入这样的空間里． 例如，在一切无穷数列 $x=(t_1, t_2, \cdots)$ 的空間中形如

$$(t_1, t_2, \cdots, t_k, 0, 0, \cdots)$$

的一切数列形成一个恰好是 k 維的子空間．

現在我們轉述最簡单的拓扑学概念，因为我們想把一抽象集同时看作代数的和拓扑的結构．

在一个綫性空間里，我們利用一个范数或一个拟范数引入拓扑的概念，特别是距离的概念． 所謂綫性空間 X 中的 B-范数（表示成 $\|\ \|$）是指在 X 中定义的具有下列属性的一个实数値函数：

1) $\|x\| \geqslant 0$,

2) 由 $\|x\|=0$ 知 $x=0$,

3) $\|x+y\| \leqslant \|x\|+\|y\|$（次加法性，三角不等式），

4) $\|tx\|=|t| \cdot \|x\|$.

B-范数也叫做齐性范数．如果用下列三个条件代替条件 4)，就得到它的一种減弱形式：

4′) $\|0\|=0$;

4″) $\|x\|=\|-x\|$;

4‴) 由 $t_n \to t_0$, $\|x_n-x_0\| \to 0$ 得 $\|t_n x_n - t_0 x_0\| \to 0$

（积 tx 按两个变量 t 与 x 来說是連續的）．

在 X 中定义的一个实値函数叫做 F-范数，是指它显示出属性 1)—3) 及 4′)—4‴)．每个 B-范数显然是一 F-范数，但反之不眞．如果在 B-范数与 F-范数的上述定义中放弃条件 2)，那末，就得到 B-拟范数与 F-拟范数的定义（按照相应范数的类型）．往往除上述諸公設外，我們使用的范数或拟范数还要满足所謂完备性公理：

5) 如果 $p, q \to \infty$, $x_p, x_q \in X$ 时 $\|x_p - x_q\| \to 0$，那末必存在一元 $x \in X$，使 $\|x_n - x\| \to 0$.

賦有一个满足公理 5) 的范数（拟范数）的空間 X 叫做完备的．我們注意，极限元 x 是唯一确定的，只当 $\|\ \|$ 是范数时才成立．我們还要注意，满足条件 $\|x_p - x_q\| \to 0$ 的元列 $\{x_n\}$ 叫做哥西

(Cauchy)列或集中列（konzentrierte Folge）. 一个定义了范数(拟范数）的綫性空間 X,将表示成 $[X;\|\ \|]$;如果在空間 X 中同时引入好几个范数,或者如果我們特别关切对于突出 X 的拓扑結构,那么必須使用这样确切的表示法. 但往往在一个綫性空間中只引入一个标准范数，并且是按自然的方式引入的，于是不用符号 $[X;\|\ \|]$，只簡单地用字母 X 来表示具有綫性結构同时賦有范数的集合 X. 每个綫性賦范空間 $[X;\|\ \|]$ 可以看作是距离空間,因为范数 $\|\ \|$ 按自然的方式在 $[X;\|\ \|]$ 中誘导出一个距离来. 我們假設 X 不是只包含一个元，对于 $[X;\|\ \|]$ 中任意两个元，我們利用下列公式定义距离概念:

$$d(x_1, x_2) = \|x_1 - x_2\|, \quad x_1, x_2 \in X, \tag{2}$$

如果 $\|\ \|$ 表示一个拟范数，那末借助于公式(2)定义的乃是一个拟距离，因为由 $d(x_1, x_2) = 0$ 不能推出 $x_1 = x_2$, 但距离空間的其他公設仍然满足. 于是在 $[X;\|\ \|]$ 中定义了一个拓扑結构(距离拓扑結构). 以 x_0 为中心，$\rho > 0$ 为半径的球由满足 $d(x, x_0) = \|x - x_0\| < \rho$ 或 $\leqslant \rho$ 的諸元 x 組成(开的或閉的球). 一切开球組成一切邻域族的邻域基,而作为邻域族,我們可以取一切开的非空集(这里的拓扑結构我們理解成豪斯道夫 (Hausdorff) 的邻域拓扑結构). 把綫性賦范空間看成距离空間的看法,使得有可能利用距离空間理論中的平常概念. 例如下列命題:“空間 $[X;\|\ \|]$ 中的元列 x_n 收斂于 $x_0 \in X$”,用符号表示:

$$x_n \to x_0\ [X;\|\ \|] \quad (\text{范数收斂}),$$

是指按照相应地誘导出来的距离收斂,就是說，

$$d(x_n, x_0) = \|x_n - x_0\| \to 0;$$

同样理解 $[X;\|\ \|]$ 中的下列一些概念: 聚点(Häufungspunkt), 第一綱集, 第二綱集, 剩余集(Residualmenge)(乃是指第一綱集的补集),可分性,集的列紧性,等等.

如果 $[X;\|\ \|]$ 按照上述方式賦距离后是完备空間，那末范数 $\|\ \|$ 必然满足完备性公理 (公理 5)；反之亦眞. 現在引入下列几个基本命名: 完备賦 B-范数空間叫做巴拿赫(Banach)空間或簡称

B-空間;完备賦 F-范数空間叫做弗雷协(Fréchet)空間或簡称 F-空間. 所謂 B^*-空間或 F^*-空間,各是指不假定完备性公理满足时的賦 B-范数或賦 F-范数的空間.

§ 2. B 空間和 F 空間举例

这一节主要是观察 B-空間与 F-空間的各种不同的例子. 自然,所举的例从我們感兴趣的应用的观点看来是富有启发性的;并不是系統的汇集. 我們只对一类特殊的空間稍稍深入,因为它是与波兰的工作关联着的,同时,这些工作可能形成进一步研究的对象.

設 R 是一距离空間, 考察在 R 中定义的实的(或复的)函数 $x = x(r)$, $r \in R$; 設 U 表示一切这种函数的全体, 在 U 中按照自然的方式引入基本运算.

$$x + y = x(r) + y(r), \quad r \in R; \quad tx = tx(r); \quad r \in R.$$

按照这些基本运算, 再視乘数 t 是实的或复的来决定 U 所形成的是实的或复的綫性空間. 一般說来,在 U 中想引入比較合理的范数是沒有希望的,因此在应用中只考察空間 U 的某些子空間,以便在其中引入合理的范数成为可能.

取 R 为一例如在实数軸上的区間 Δ(有穷的或无穷的,开的或閉的);并限于考察在 Δ 上連續有界的函数. 一切这种函数的全体(表示成 $C(\Delta)$; $C\langle a, b\rangle$ 或 $C(a, b)$, 如果 $\Delta = \langle a, b\rangle$ 或 (a, b)) 形成在 Δ 上定义的一切函数的空間的一个綫性子空間. 引入 B-范数

$$\| x \| = \sup_{t \in \Delta} | x(t) |, \quad x \in C(\Delta).$$

驗証公理 1)—4) 及 5) 确实滿足, 因此 $[C(\Delta); \| \, \|]$ 是一个巴拿赫空間, 而范数收斂 $\| x_n - x_0 \| \to 0$ 与函数列 $x_n(t) \to x(t)$ 在 Δ 上的一致收斂等价. 如果 Δ 是有界且閉的,則 $[C(\Delta); \| \, \|]$ 是可分的;但如 Δ 是开区間,它不是可分的.

作为第二个例, 我們考察定义在一区間 $\langle a, b\rangle$ 且滿足具指数 $0 < \alpha \leqslant 1$ 的荷尔德(Hölder)条件的一切函数:

$$|x(t_1)-x(t_2)| \leqslant K|t_1-t_2|^{\alpha}, \quad t_1, t_2 \in \langle a, b\rangle \ (K \text{ 依賴于 } x),$$

这些函数也形成一个綫性空間（其中运算如同上述对任意 U 引入的），表示成 $H_\alpha\langle a, b\rangle$. 定义范数如下：

$$\|x\| = \sup_{\langle a, b\rangle}|x(t)| + \inf_{\substack{\langle a, b\rangle \\ t'\neq t''}} \frac{|x(t')-x(t'')|}{|t'-t''|^{\alpha}}$$

或

$$\|x\| = \sup_{\substack{\langle a, b\rangle \\ t'\neq t''}} \frac{|x(t')-x(t'')|}{|t'-t''|^{\alpha}} + |x(a)|.$$

空間 $[H_\alpha\langle a, b\rangle; \|\ \|]$ 是完备的，但不是可分的. 我們也可以不用上述的范数而在 $H_\alpha\langle a, b\rangle$ 中引入范数：

$$\|x\| = \sup_{\langle a, b\rangle}|x(t)|.$$

于是 $H_\alpha\langle a, b\rangle$ 仍然是一个賦 B-范数的空間，但这时它是非完备的. 完备性乃是距离空間的一个特别重要的属性，如果对于一个空間完备性不成立，那么从应用的观点看来，可以把相应的范数称作不太合适的.

作为第三个例，我們考察在一区間 $\langle a, b\rangle$ 上具有界变差的函数（表示成 $V\langle a, b\rangle$）. 我們按平常方式定义基本运算，并借公式

$$\|x\| = |x(a)| + \operatorname*{var}_{\langle a, b\rangle} x(t)$$

定义 B-范数，这里 var 表示函数 x 在 $\langle a, b\rangle$ 上的全变差. 容易証明，$[V\langle a, b\rangle; \|\ \|]$ 是一不可分的巴拿赫空間.

为了举出几个另一类的重要例子，我們考察 $\langle a, b\rangle$ 上可測的函数. 把只在一个测度为零的集上不相同的两个可測函数等同起来，換句話說，把一切相互等价的可測函数看作是一个元，于是我們定义两种基本运算，象在勒貝格（Lebesgue）积分理論中平常所做的那样（在除一測度为零的集之外作平常加法等等）. 因而得到一个綫性空間（表示成 S）. 还可以把它作成一个弗雷协空間. 事实上，我們定义一个 F-范数如下：

$$\|x\| = \int_a^b \frac{|x(t)|}{1+|x(t)|}\,dt.$$

可以証明，为了一个元列 $x_n \in S$"按照这个范数收斂于 x_0"（即 $x_n \to x_0$），必需且只需这个元列"按照測度"（"漸近地"）收斂于 x_0.

这就説明所引进的范数对于空間的属性(对于它的結构)是很合适的,因为我們可以把漸近收斂看作自然的收斂概念. 这个范数的缺点在于它的非齐性. 但如果要在整个空間 S 中引入一个有用的范数,那末这种情况是无法摆脱的. 对于 S 的某些子空間,却有定义一个合理的 B-范数的可能性.

首先考虑在区間 $\langle a, b\rangle$ 上属于 S 的有界函数(在定义属于 S 的元的意义上,我們能略去一个零测度集,因而上面的話意味着,除去一个零測度集外是有界的). 这样函数組成的集合 $M\langle a,b\rangle$ 形成一个綫性空間(空間 S 的子空間),引入范数 $\|x\| = \sup\limits_{\langle a, b\rangle}{}^*|x(t)|$,这里 $\sup\limits_{\langle a, b\rangle}{}^*|x(t)|$ 指在 $\langle a, b\rangle$ 中函数 $|x(t)|$ 的眞上确界,就是

$$\sup{}^*|x(t)| = \inf\{k: |\{t: |x(t)| > k\}| = 0\}.$$

$\sup^*$ 及 $\inf^*$ 永远表可测函数的眞上确界和眞下确界, F-空間 $[M; \|\ \|]$ 是不可分的巴拿赫空間.

現在限于考察滿足条件

$$\int_a^b |x(t)|^\alpha dt < \infty, \quad 这里\ \alpha > 0$$

的在 $\langle a, b\rangle$ 上可測的函数. 我們用 L^α 表示这样函数的全体或更确切些 $L^\alpha_{\langle a, b\rangle}$. 如果象 S 中那样定义两元的加法与数和元相乘的乘法,那么 L^α 就形成一个綫性空間,在 L^α 中定义范数如下:

$$\|x\| = \left(\int_a^b |x(t)|^\alpha dt\right)^{\frac{1}{\alpha}}, \quad 如果\ \alpha \geqslant 1;$$

$$\|x\| = \int_a^b |x(t)|^\alpha dt, \quad 如果\ 0 < \alpha < 1,$$

对于 $\alpha \geqslant 1$,范数是齐性的;而对于 $0 < \alpha < 1$,只是 F-范数.这就指出了两种情形的深刻差异. 无論是哪一种情形,空間 $[L^\alpha; \|\ \|]$ 都是完备的. 所以有下列命題:

当 $\alpha \geqslant 1$ 时 $[L^\alpha; \|\ \|]$ 是巴拿赫空間; 而当 $0 < \alpha < 1$ 时 $[L^\alpha; \|\ \|]$ 是弗雷协空間. 在这两种情形下, $[L^\alpha; \|\ \|]$ 都是可分的,这可由勒貝格理論的經典性定理立刻推出. 正象上述的空間 S 和空間 L^α 一样,在分析学的各种問题中,也經常出現其元为数列的一些空間.

我們用 T（与平常的記法 s 不同）表示一切数列的綫性空間，用 T_b, T_c, T_0 各表示一切有界的、收斂的和收斂于零的数列所組成的子空間．这时取基本运算的自然定义，显然有下列包含关系：$T_0 \subset T_c \subset T_b \subset T$．在 T 中定义范数为

$$\| x \| = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{2^{\nu}} |t_\nu| \Big/ 1 + |t_\nu|,$$

于是 T 成为弗雷协空間；在 T_b 中以及在 T_c, T_0 中，如所周知，我們定义 B-范数为

$$\| x \| = \sup |t_\nu|,$$

那末 $[T_b; \| \|]$ 是巴拿赫空間．$[T_c; \| \|]$ 是可分的，但 $[T_b; \| \|]$ 不是．我們所講的都是由数列組成的空間中最簡单的．本书的后面，当論及在一般求和法理論方面的应用时，将看到一些由数列組成的空間的更有趣的例．

§3. 有用的各种 B 空間, F 空間的統一处理

我們指出，象 L^a, T, 满足 $\sum|t_\nu|^a < \infty$ 的一切数列的空間以及很多其他空間如何推广以及怎样作出建立一套理論的一个样本,使得我們能用簡单的方法作出种种有用的 B-空間及 F-空間. 这里要联系到我自己的著作[41],我与穆协拉克(Musielak)先生合作的尚未刊出的著作[41] 以及日本数学家中野秀五郎的学派(北海道大学)的思想[8]. 現在引入模空間的概念. 考察任意一个实綫性空間 X. 假設在 X 中定义一个可以取 ∞ 值的实值函数 $\rho(x)$, 它具有下列諸属性:

A.1. 为了 $\rho(x)=0$ 必須且只須 $x=0$;

A.2. $\rho(x)=\rho(-x)$;

A.3. $\rho(\alpha x+\beta y)\leqslant\rho(x)+\rho(y)$, 这里 $\alpha\geqslant 0$, $\beta\geqslant 0$, $\alpha+\beta=1$.

如果将 A.1 換成 $\rho(0)=0$ 則 ρ 叫做拟模. 由这一原始的公理系統,首先不足道地得出 $\rho(x)\geqslant 0$, $\rho(\alpha x)$对于每个 $x\in X$ 是参数 α 的不減函数(对于 $\alpha\geqslant 0$). 用 X_ρ 表示满足 $\rho(x)<\infty$ 的一切元 x 的全体而用 X_ρ^* 表示如下的 x 全体: 存在常数 k, 使 $kx\in X_\rho$. 我們立刻可以証出, X_ρ 是凸的, 并且关于 0 是对称的. 而 X_ρ^* 是空間 X 的一个綫性子空間. 我們現在介紹模收斂的概念 (模收斂也称 ρ-收斂). 假如元 x_n 在 X 中,称叙列 $\{x_n\}$ 模收斂或 ρ-收斂于 $x\in X$ (記为 $x_n\xrightarrow{\rho}x$), 是指对于一个确定的(与 $\{x_n\}$ 有关的)常数$k>0$,关系 $\rho(k(x_n-x))\to 0$ 成立. 集合 $X_1\subset X_\rho^*$ 称为 ρ-完备的或模-完备的, 是指从 $\rho(x_n-x_m)\to 0$ ($x_n\in X_1$) 总可推出关系式 $\rho(k(x_n-x))\to 0$, 这里的常数 $k>0$ 且它一般随叙列 $\{x_n\}$ 而变. 假如它与叙列 $\{x_n\}$ 无关, 則称 X_1 为強模完备. 我們容易証明, 模极限 x 的唯一性及关系 $\alpha x_n+\beta y_n\xrightarrow{\rho}\alpha x+\beta y$, 此处

$x_n \xrightarrow{\rho} x$, $y_n \xrightarrow{\rho} y$ 而 α, β 是任意实数．我們的下一目标乃是：在什么条件下可以在 X_ρ^* 中这样引进 F-范数或 B-范数，使得由范数收斂引起 ρ-收斂．因此我們面对以下情况：借模数 $\rho(x)$，自然地定义一綫性空間 X_ρ^* 并引进以模数概念为基础的收斂方式，显然只要我們把已引进的公理系用旁的公理加以扩充，我們就能够給予 X_ρ^* 适合以上情况的距离結构．我們还要使用以下的公理：

B.1. 从 $\alpha_n \to 0$ 推知 $\rho(\alpha_n x) \to 0$;

B.2. 从 $\rho(x_n) \to 0$ 推知 $\rho(\alpha x_n) \to 0$，对于每一个实数 α.

以 $\overline{X}_\rho^*$ 表示空間 X_ρ^* 的子集，它由一切使 B.1 成立的 x 組成．$\overline{X}_\rho^*$ 是綫性而且是 ρ 閉的．由此推知，假如 X_ρ^* 是 ρ-完备或強 ρ-完备的，則子空間 $\overline{X}_\rho^*$ 也有此性質．

現在我們考虑某一模数 $\rho(x)$，且借助于以下公式，定义一个泛函数：

$$(*) \qquad \|x\| = \inf\left\{\varepsilon > 0 : \rho\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \leqslant \varepsilon\right\}.$$

我們断言：泛函数 $\|\ \|$ 是 $\overline{X}_\rho^*$ 中一个 F-范数且具有以下性質：

(a) $\|\alpha x\|$ 对于 $\alpha \geqslant 0$ 和 $x \in \overline{X}_\rho^*$ 是 α 的非减的函数，

(b) $\rho(x) \leqslant \|x\|$，当 $\|x\| < 1$.

由 (b) 推知：从范数收斂将引起 ρ-收斂（并且趋于同样的极限）．此外我們能够証明：从強 ρ-完备性推出空間 $[X_\rho^*; \|\ \|]$ 的完备性．

証．第 4 頁的 1)，2)，4′) 及 4″) 显然眞确，同样容易从 $\rho(\alpha x)$ 的单調性推出性質(a)．現在我們来証明三角形条件3)．設

$$\alpha = \|x\| + \frac{\varepsilon}{2}, \quad \beta = \|y\| + \frac{\varepsilon}{2},$$

于是

$$\rho(x/\alpha) \leqslant \alpha; \quad \rho(x/\beta) \leqslant \beta,$$

且

$$\rho\left(\frac{x+y}{\alpha+\beta}\right) = \rho\left(\frac{\alpha}{\alpha+\beta}\frac{x}{\alpha} + \frac{\beta}{\alpha+\beta}\frac{y}{\beta}\right) \leqslant$$

$$\leqslant \rho\left(\frac{x}{\alpha}\right) + \rho\left(\frac{y}{\beta}\right) \leqslant \alpha + \beta,$$

$$\|x+y\| \leqslant \alpha+\beta=\|x\|+\|y\|+\varepsilon.$$

为了証明积 tx 的連續性 4‴),首先我們証明:

(c) 从 $\alpha_n \to 0$ 推知 $\|\alpha_n x\| \to 0$,

(d) 从 $\|x_n\| \to 0$ 推知 $\|\alpha x_n\| \to 0$, 其中 α 是一实数.

为了便于証明(b),(c) 和 (d),我們指出:如果 $x \neq 0$,则

$$\rho\left(\frac{x}{\lambda\|x\|}\right) > \lambda\|x\| \quad 对于\ \lambda < 1,$$

$$\rho\left(\frac{x}{\lambda\|x\|}\right) \leqslant \lambda\|x\| \quad 对于\ \lambda > 1.$$

如果 $\|x\| < 1$,则对于充分接近 1 之 $\lambda>1$ 必有 $\lambda\|x\| \leqslant 1$, 故 $\rho(x) \leqslant \rho\left(\frac{x}{\lambda\|x\|}\right) \leqslant \lambda\|x\|$, 从而 $\rho(x) \leqslant \|x\|$ 即(b)为眞.

对任何 $\alpha>0$, 取一整数 $k>\alpha$, 由 (a) 及三角形不等式 3) 得 $\|\alpha x_n\| \leqslant \|k x_n\| \leqslant k\|x_n\|$, 故再合 4″) 知 (d) 成立.

如果 $\alpha_n \to 0$,但 $\|\alpha_n x\| \geqslant \varepsilon > 0$,则对于 $\lambda < 1$ 有

$$\rho\left(\frac{\alpha_n x}{\varepsilon\lambda}\right) \geqslant \rho\left(\frac{\alpha_n x}{\lambda\|\alpha_n x\|}\right) \geqslant \lambda\|\alpha_n x\|,$$

但是依 B.1, $\rho\left(\frac{\alpha_n}{\lambda\varepsilon} x\right) \to 0$, 从而得到矛盾,即(c)亦为眞.

最后由 3) 知

$$\|\alpha_n x_n - \alpha x\| \leqslant \|\alpha_n(x_n - x)\| + \|(\alpha_n - \alpha)x\|,$$

再由 $\|\alpha x\|$ 的单調性及(d)得到 $\|\alpha_n(x_n - x)\| \to 0$, 故合 (c) 知 4‴) 成立.

完备性公理(在強 ρ-完备性假設下)从以下的注記也一样容易得出:关系 $\|x_n - x_m\| \to 0$,以关系

$$\rho\left(\frac{x_n - x_m}{\varepsilon}\right) \to 0 \quad (对于每一个正\ \varepsilon)$$

为其后果.

注 1. 設 $\rho(x)$ 为一个拟模数,则相类似的考慮表明公式(*)定义一拟模数.

2. 設对于每一个 $x \in X_\rho^*$ 公理 B.1 成立(即 $\bar{X}_\rho^* = X_\rho^*$), 则可