高等医学院校教材

医用物理学实验

贺国珠　刘东华　主编

航空工业出版社

内容提要

本书是根据卫生部医用物理学教学大纲的的要求，吸收兄弟院校的经验，结合参编单位近几年来所开设的医用物理学实验的实际情况，编写而成的医用物理学实验教材。

本书介绍了误差理论的有关概念及数据处理的方法，实验内容注重加强学生基本技能的培养和基本方法的训练，力求与医学结合。

本书可供高等医学院校的医学、儿科、口腔、预防医学、高护、影像等专业的学生用作教材，同时可供广大医务工作者参考。

图书在版编目(CIP)数据

医用物理学实验／贺国珠，刘东华主编.—北京：航空工业出版社，1995.8
ISBN 7-80046-950-6

Ⅰ.医… Ⅱ.①贺…②刘… Ⅲ.医用物理学-实验 Ⅳ.R312-33

中国版本图书馆 CIP 数据核字（95）第 13011 号

航空工业出版社出版发行
(北京市安定门外小关东里 14 号　100029)
河南师范大学印刷厂印刷　　全国各地新华书店经售
1995 年 8 月第 1 版　　1995 年 8 月第 1 次印刷
开本：787×1092　1／16　印张：6.5　字数：154 千字
印数：1-4000 册　　定价：8.50 元

前　言

本书是根据卫生部颁发的高等医学院校《医用物理学教学大纲》的要求，编写而成的一本医用物理学实验教材。

本书除绪论外，共选编了十七个实验题目。可供医学院校的医疗、药学、儿科、口腔、卫生、检验等专业使用，也可供教师参考。

本书对基本概念、实验原理的阐述力求做到清楚、严谨。对实验步骤的设计力求做到科学、完善。在培养学生实验技能的同时，提高其科学的思考问题、解决问题的能力。本书备有思考题，以启发同学进一步加深对实验的理解。本书在排版印刷方面力求靠近新的国家标准。

在本书编写过程中得到了新乡医学院和开封医学高等专科学校各级领导与教研室同志们的大力支持，在此表示衷心感谢。

由于编者水平所限，书中缺点、错误在所难免，诚恳希望读者提出宝贵意见。

编　者

95.7

目　　录

绪　论

一、实验目的和要求

物理学是一门以实验为基础的科学。物理定律有许多是用观察和实验的方法建立起来的。观察就是在自然条件下研究现象，因而在很大程度上受到自然条件的限制。物理实验是人们按照自己的意志，将自然界中物质的各种基本运动形态（如力、热、声、光、电等）在一定条件下再现，从而对其进行观察和分析研究的过程。由此可见，实验是物理理论的主要来源。例如，1831 年，法拉第在实验室中发现电磁感应现象，之后通过大量的实验确立了电磁感应定律。不但如此，物理理论的正确性也要通过实验来加以验证。例如，爱因斯坦在他的狭义相对论中，预言了物质运动的质能关系 $E=mc^2$，而这一关系的正确性，还是通过几十年后的原子物理实验确定的。这样的例子不胜枚举。物理学发展的历史充分证明，物理实验在整个物理学的发展中起决定性作用。

医用物理学实验课的目的要求是：

1. 使学生掌握一些基本物理量的测量方法，学会正确使用物理仪器，熟悉一些物理实验方法 。

2. 培养学生独立自主的科学工作作风、实事求是的科学工作方法及科研工作能力。

3. 巩固和加深学生对物理现象及规律的认识。

医用物理学实验课的具体要求是：

1. 熟悉常用仪器设备的一般原理及使用方法，其中包括游标尺、千分尺、停表、温度计、万用电表、示波器、心电图机、常用电源等。

2. 能按照简单线路图正确连接电路。

3. 了解实验误差的基本概念，能分析误差发生的原因，能正确按照处理有效数字的规则进行数据记录和运算。

4. 能正确按数据画出图线，并能利用图线分析实验结果。

5. 能写出正规的实验报告。

6. 培养学生科学工作的作风。

（1）实验必须在理论指导下有目的地进行，实验前要预习，不允许在没有充分准备的情况下盲目操作。

（2）一切操作必须按正规方法进行，对待实验数据要严肃认真，原始记录要清楚真实。

（3）在实验过程中，应保持室内安静，养成整齐清洁，有条不紊的习惯，爱护仪器，注意节约。

（4）平时教学中要进行严格考查，未完成全部实验或操作未达到要求的学生必须补做或重做。

二、误差理论基础

1. 测　量

测量是实验的重要手段。所谓测量即是将被测量与同类标准量（即标准单位）相比

较。由此确定被测量是标准量的若干倍数，就是读数，再附上单位，则为测量结果。根据读数按照一定公式推算出来的数量称为得数，读数和得数都称为数据。任何一个物理量都包含数值和单位两部分。因此，在记录时必须同时写出数值和单位，否则，这些数值将是毫无意义的。

2. 测量的准确度和精密度

测量的目的，是要力图得到真值。真值是被测量的客观存在的实际值。但由于测量会存在误差，故真值是不能得到的。所以，实验中常对被测量进行多次测量，求出其算术平均值，作为近似真值（或称近真值）。

对某一被测量测 n 次，测量结果分别为 N_1，$N_2 \cdots N_n$，则算术平均值

$$\overline{N}=\frac{N_1+N_2+\cdots+N_n}{n}=\frac{\sum_{i=1}^{n}N_i}{n}$$

之所以要用到算术平均值来表示被测量，是因为每次测量值与真值都有一定的偏差。我们把测量值与真值符合的程度称为测量的准确度。测量的精密度是指测量中所遇到的一组数据的重复性，也就是一组测量值离散的程度。如果一组测量值重复性好，则这组测量值精密度高。但测量的准确度不一定很高，如图 0−1 所示。

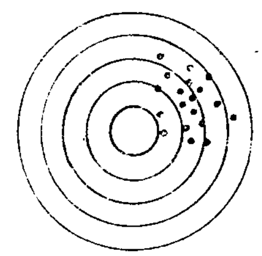


图 0−1

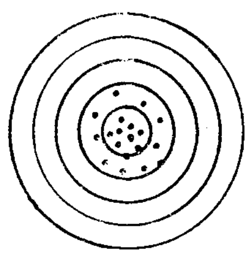


图 0−2

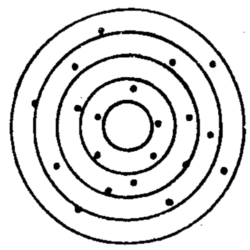


图 0−3

测量的精确度（简称精度），是一组测量值的精密度和测量值的准确度的总称。只有当一组测量值都很准确（即准确度很高），并且彼此的离散程度又不大（即精密度高）时，才是好的测量，如图 0−2 所示。否则为差的测量，如图 0−3 所示。

3. 测量误差

在任何的测量过程中，无论多么精密的仪器，怎么完善的实验方法，多么细心的操作，由于客观条件的限制，如人的视觉的偏差，仪器受加工条件限制，一些实验理论的限制，使得测量值与真值之间总会有一定的差值，这个差值叫做测量误差。在实际测量中误差总会产生，也就是说误差是不可避免的，但我们可以想办法去减小它。误差的产生有多方面的原因，总括起来大致可分为两大类，即系统误差和偶然误差。

（1）系统误差　该误差是由于仪器本身不准确（例如：天平两端不等长，温度计的零点刻度不准确等）和测量方法以及实验理论不够完善等而引起的。其特点是在多次测量中测量值总是偏向一个方向（偏大或偏小）。

（2）偶然误差　该误差是由一些无法控制的，纯属偶然的因素（如测量者的视觉、听觉等）引起的误差。它造成的结果时大时小，误差有时小于真值，有时大于真值。

每一次测量结果偶然误差的大小虽然没有任何规律性，但在多次测量中偶然误差的出

现就其总体来说服从于一定的统计规律。偶然误差的特点是：在同一条件下，对同一量进行多次测量时，绝对值相等的正误差与负误差出现的机会相等。当测量次数无限增加时，偶然误差的算术平均值趋向于零。

根据偶然误差的这些特性可知，多次测量值的算术平均值将趋近于真值，即增加测量次数可以减小偶然误差，这就是我们采用多次测量的依据。

系统误差可以借助于提高测量技术、改进校准仪器、完善实验理论来减小其影响。

4. 测量误差的估计及表示法

(1)　直接测量误差

a. 一次测量结果误差的估计　对某一待测量进行单次测量，其误差主要是根据所用测量仪器的精度（即仪器的最小分度值），观察环境及实验者感官的分辩能力来估计可能发生的最大误差。在一般情况下，单次测量的误差估计为仪器最小分度的$\frac{1}{10}$；当有些刻度线比较密集时，指针宽度大于刻度之间的$\frac{1}{10}$，这时读到$\frac{1}{10}$有困难，则可读到最小分度的$\frac{2}{10}$或$\frac{5}{10}$。如果测量受到某些条件的限制，其误差可取仪器的最小分度值，甚至也可以高于仪器的最小分度值，因此，单次测量的误差要结合实际问题，作出适当的估计。物理实验中一般要求单次测量最大误差不超过最小分度的一半。

b. 多次测量结果误差的估计　对某一待测量进行多次测量比一次测量的结果更为可靠。多次测量结果的平均值更接近于待测量的真值。下面介绍对多次测量结果误差的估计方法。

(a) 绝对误差　设 N_1, N_2, $N_3 \cdots N_n$ 是在同样条件下对某一待测量进行 n 次测量的值，每次测量值与真值之差叫做各次测量的绝对误差。真值实际上是不能测得的，常用 n 次测量的算术平均值 $\overline{N}$来代替真值并称之为近真值，即

$$\overline{N}=\frac{N_1+N_2+\cdots+N_n}{n}=\frac{\sum_{i=1}^{n}N_i}{n}$$

以 $N_i-\overline{N}=\Delta N_i$ 来表示第 i 次测量的绝对误差，各次测量的绝对误差的绝对值的算术平均值 $\Delta\overline{N}$ 称为平均绝对误差，即

$$\Delta\overline{N}=\frac{|\Delta N_1|+|\Delta N_2|+\cdots+|\Delta N_n|}{n}$$

$$=\frac{\sum_{i=1}^{n}|\Delta N_i|}{n}$$

平均绝对误差的大小，可以用来估计测量误差的范围。测量结果的标准表达式为

$$N=\overline{N}\pm\Delta\overline{N}$$

上式表明，待测量的近真值$\overline{N}$在 $\Delta\overline{N}$ 范围内涨落，真值在$\overline{N}-\Delta\overline{N}$与$\overline{N}+\Delta\overline{N}$之间的可能性很大。平均绝对误差反映了可疑数的可疑程度，它应当与可疑数字相对应，所以绝对误差一般只保留一位有效数字。

(b) 相对误差（又称百分误差）　平均绝对误差 $\Delta\overline{N}$ 与算术平均值 $\overline{N}$ 之比称为平均相对误差。平均相对常以百分数表示：

$$E = \frac{\Delta\overline{N}}{\overline{N}} \times 100\%$$

相对误差反映测量值的准确度，相对误差愈小，表示测量愈准确，结果愈接近真值。相对误差没有单位，一般取两位数字。

对于测量结果而言，绝对误差大的，其相对误差不一定大；相对误差大的其绝对误差不一定大。例如：我们测量物体的长度，一个物体测出其长度为 1000m，误差为 1m，而另一个物体的长度为 10mm，误差为 1mm。就其绝对误差来说，1m 的误差远远大于 1mm 的误差，但哪个测量的更准确呢？显然用绝对误差就不能说明问题，因此我们就要用相对误差来表示。

(c) 多次测量结果误差的估计的其它方法 ——标准误差法　标准误差也称为均方根误差，其定义为

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i}^{n}(N_i - N)^2}{n}}$$

式中　N 表示真值，N_i 表示第 i 个观测值，n 表示观测次数，且 $n \to \infty$，在有限观测次数中，标准误差公式为

$$\sigma_m = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(N_i - \overline{N})^2}{n-1}}$$

式中　$\overline{N}$表示算术平均值。

综上所述，直接测量结果误差计算的步骤可归纳如下：① 列表并把测量值填入表内；② 求出算术平均值；③ 求出各次绝对误差；④ 求出平均绝对误差；⑤ 将测量结果写成标准表达式　$N = \overline{N} \pm \Delta\overline{N}$；⑥ 求出相对误差。

当重复前人的实验时，也可以把测量的算术平均值和公认值直接进行比较，我们称差值 $\Delta N = |\overline{N} - N_{公认}|$ 为绝对偏差，比值

$$B = \frac{|\overline{N} - N_{公认}|}{N_{公认}} \times 100\%$$

叫做相对偏差。

(2) 间接测量误差

实验中对于一些物理量只能通过直接测量其它的物理量，然后运用计算公式将其计算出来，这种求待测量的测量我们叫间接测量。

间接测量的数据处理就是要求待测量的近真值 $\overline{N}$ 和绝对误差 $\Delta\overline{N}$。当直接测量的结果含有误差时，必然影响到间接测量的结果，间接测量误差也就是计算结果的误差，可按相应的计算公式计算出来，在简单情况下，它们的误差公式可用代数的方法推导出来。

a. 两个直接测量的量的和（或差）所得结果的绝对误差和相对误差

已知直接测量的物理量 $A = \overline{A} \pm \Delta\overline{A}$，$B = \overline{B} \pm \Delta\overline{B}$。$\overline{A}$，$\overline{B}$为算术平均值，$\Delta\overline{A}$、$\Delta\overline{B}$为

平均绝对误差，且待测量写成标准形式

$$N=\overline{N}\pm\Delta\overline{N}$$

$\overline{N}$为计算结果的近真值，$\Delta\overline{N}$是运算结果的误差。因$N=A+B$，且$N=\overline{N}\pm\Delta\overline{N}$，则

$$N=A+B=\overline{A}\pm\Delta\overline{A}+\overline{B}\pm\Delta\overline{B}$$

$$=(\overline{A}+\overline{B})\pm\Delta\overline{A}\pm\Delta\overline{B}$$

考虑最坏的情况即可能产生最大误差的情况，因而应取作

$$\overline{N}=\overline{A}+\overline{B}\qquad\qquad \Delta\overline{N}=\Delta\overline{A}+\Delta\overline{B}$$

最大相对误差为 $$E=\frac{\Delta\overline{N}}{\overline{N}}=\frac{\Delta\overline{A}+\Delta\overline{B}}{\overline{A}+\overline{B}}$$

b. 两量的积（商）$N=A\cdot B$（$N=A/B$）所得结果的绝对误差和相对误差

$$N=\overline{N}\pm\Delta\overline{N}=A\cdot B$$

$$=(\overline{A}\pm\Delta\overline{A})\cdot(\overline{B}\pm\Delta\overline{B})$$

$$=\overline{A}\cdot\overline{B}\pm\overline{A}\cdot\Delta\overline{B}\pm\overline{B}\cdot\Delta\overline{A}\pm\Delta\overline{A}\cdot\Delta\overline{B}$$

略去二阶小量$\Delta\overline{A}\cdot\Delta\overline{B}$得

$$\overline{N}=\overline{A}\cdot\overline{B}\qquad\qquad \Delta\overline{N}=\overline{A}\cdot\Delta\overline{B}+\Delta\overline{A}\cdot\overline{B}$$

相对误差

$$E=\frac{\Delta\overline{N}}{\overline{N}}=\frac{\overline{A}\cdot\Delta\overline{B}+\Delta\overline{A}\cdot\overline{B}}{\overline{A}\cdot\overline{B}}=\frac{\Delta\overline{A}}{\overline{A}}+\frac{\Delta\overline{B}}{\overline{B}}$$

从 a、b 可以看出：和、差的绝对误差，等于各量的绝对误差之和；积、商的相对误差，等于各量的相对误差之和。这叫做误差的传播规律，它概括了因直接测量产生的误差

间接测量误差运算表

计算关系式	绝对误差$\Delta\overline{N}$	相对误差$E=\frac{\Delta\overline{N}}{\overline{N}}$
$N=A+B$	$\Delta\overline{A}+\Delta\overline{B}$	$\frac{\Delta\overline{A}+\Delta\overline{B}}{\overline{A}+\overline{B}}$
$N=A-B$	$\Delta\overline{A}+\Delta\overline{B}$	$\frac{\Delta\overline{A}+\Delta\overline{B}}{\overline{A}-\overline{B}}$
$N=A\cdot B$	$\overline{A}\cdot\Delta\overline{B}+\overline{B}\cdot\Delta\overline{A}$	$\frac{\Delta\overline{A}}{\overline{A}}+\frac{\Delta\overline{B}}{\overline{B}}$
$N=A^n$	$n\overline{A}^{n-1}\Delta\overline{A}$	$n\frac{\Delta\overline{A}}{\overline{A}}$
$N=\frac{A}{B}$	$\frac{\overline{B}\Delta\overline{A}+\overline{A}\Delta\overline{B}}{\overline{B}^2}$	$\frac{\Delta\overline{A}}{\overline{A}}+\frac{\Delta\overline{B}}{\overline{B}}$
$N=\cos A$	$\sin\overline{A}\cdot\Delta\overline{A}$	$\mathrm{tg}\overline{A}\cdot\Delta\overline{A}$
$N=\sin A$	$\cos\overline{A}\cdot\Delta\overline{A}$	$\mathrm{ctg}\overline{A}\cdot\Delta\overline{A}$
$N=aA$	$a\Delta\overline{A}$	$\frac{\Delta\overline{A}}{\overline{A}}$

注：表中 a 为常数（在加减运算时，先算绝对误差，后算相对误差比较方便，在乘除、乘方运算时，先算相对误差，后算绝对误差比较方便）。

而影响到间接测量结果的误差。由于在推导过程中都是考虑到最大不利（即误差最大）的

情形，因此，又叫做最大误差的传播规律。这样得到的绝对误差和相对误差分别叫做最大绝对误差和最大相对误差。

c. 间接测量的一般公式

假定测量结果是 N，且 $N=\overline{N}\pm\Delta\overline{N}$，$A$，$B$ 是直接测量的结果，且 $A=\overline{A}\pm\Delta\overline{A}$，$B=\overline{B}\pm\Delta\overline{B}$，它们之间有函数关系　　　　$N=f(A,B)$

为求N的绝对误差$\Delta\overline{N}$，应先求函数的全微分，即

$$\mathrm{d}N=\frac{\partial f}{\partial A}dA+\frac{\partial f}{\partial B}\mathrm{d}B$$

因为 $\Delta\overline{A}$、$\Delta\overline{B}$ 很小，可用全增量代替函数的全微分，考虑到可能出现的最不利情况，应取各系数的绝对值，则

$$\Delta\overline{N}=\left|\frac{\partial f}{\partial A}\right|\Delta\overline{A}+\left|\frac{\partial f}{\partial B}\right|\Delta\overline{B} \tag{1}$$

把$N=f(A、B)$两边取对数后再求全微分，则有

$$\ln N=\ln f(A、B)$$

及

$$\frac{\mathrm{d}N}{N}=\frac{\partial\ln f}{\partial A}\mathrm{d}A+\frac{\partial ln f}{\partial B}\mathrm{d}B$$

则

$$\frac{\Delta\overline{N}}{\overline{N}}=\left|\frac{\ln f}{\partial A}\right|\Delta\overline{A}+\left|\frac{\partial\ln f}{\partial B}\right|\Delta\overline{B} \tag{2}$$

式(1)、(2)是间接测量误差传递的基本公式，式中$\overline{N}=f(\overline{A},\overline{B})$。

三、有效数字

1. 有效数字的基本概念

在使用仪器进行测量时,仪器的最小刻度称为精密度。测量的精密度取决于所用仪器的精密度。例如一个米尺，精密度是 1cm，用它进行测量，则可准确到厘米，并能估计到 0.1cm。另一米尺，精密度是 1mm，那么它准确到毫米，估计到 0.1mm。如用这两把尺子测量同一物体的长度如图 0-4，图 0-5 所示，其结果分别是 $L_1=10.2$cm 和 $L_2=10.23$cm。

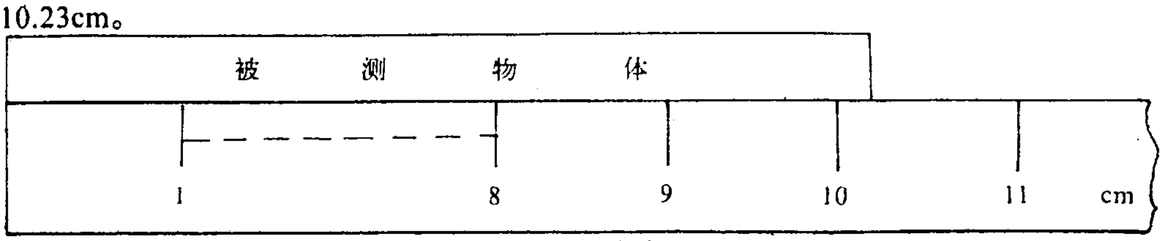


图 0-4　被测物体长度为 10.2cm

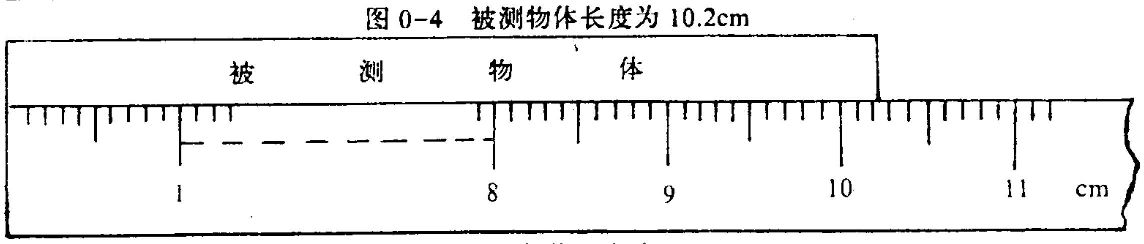


图 0-5　被测物体长度为 10.23cm

对于第一个结果 L_1，数字“10”是准确读出的，“2”是估计出来的。对于第二个测量结果数字的“10”和“2”是准确读出的，“3”是估计的。因此我们把带有一位估计值(可疑数字)

的近似数字叫做有效数字。

在相同条件下，用不同精密度的仪器测量同一对象时，仪器的精密度愈高，测量值的有效数字位数就愈多。因此用有效数字记录测量值，不仅反映了它的量值的大小，还反映了它的精密度，这就是有效数字的双重性 。

根据有效数字的性质，在记录和处理实验数据时，应注意以下问题：

(1) 有效数字和“0”的关系：“0”在中间或后面都是有效数字，决不能因为零在最后面而舍去。例如：用米尺测量一物体长度，它的末端正好落在 10.2cm 的刻度线上如图 0-6 所示，此时估计值应为“0.00cm”，最末一个 “0”是有效数字，不能舍去，测量结果应为 10.20cm。

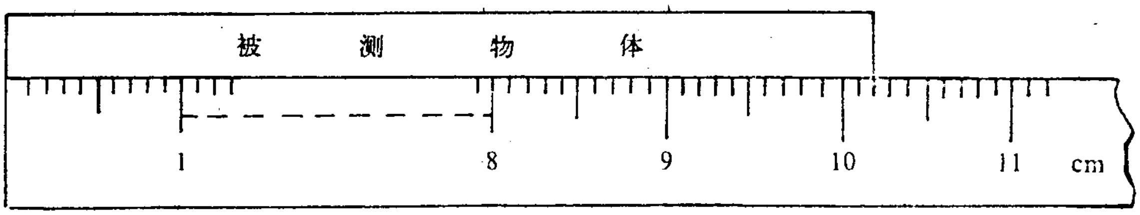


图 0-6 被测物体长度为 10.20cm

(2) 有效数字的位数与小数点位置无关。例如 1.504m＝0.001504km 是同一测量结果，都是四位有效数字。

(3) 常数的有效数字可以为无穷多，在计算时需要几位数字就写几位。对于非整数值常数如 π、e、$\sqrt{2}$ 等一般应比测量数据多取一位。

2. 有效数字运算规则

有效数字具有双重性质，其最后一位为可疑数字，因为它是有误差的，所以可疑数字与准确数字的和、差、积、商也是可疑数字，如下例（数字下有“-”者为可疑数字）：

(1) 加减法　几个数相加减时，运算结果的有效数字，应保留到位数最高的一位可疑数字，其后的一位可疑数字可按“舍入法则”处理。

例1

$$\begin{array}{rr} & 198.\underline{8} \\ & 58\underline{4} \\ + & 24.7\underline{0} \\ \hline & 80\underline{7}.\underline{5}\underline{0} \end{array}$$

结果取　80$\underline{8}$

例2

$$\begin{array}{rr} & 87.5\underline{4} \\ - & 0.11\underline{2} \\ \hline & 87.4\underline{2}\underline{8} \end{array}$$

结果取　87.$\underline{4}\underline{3}$

(2) 乘除法　几个数相乘除时运算结果的有效数字一般应以各量中包含有效数字的位数最少者为准（特殊情况可多取或少取一位），其后面一位可疑数字按“舍入法则”处理。运算过程中，各测量值可多保留一位有效数字。

例3

$$\begin{array}{rr} & 3.21\underline{0} \\ \times & 2.5\underline{0} \\ \hline & \underline{0}\,\underline{0}\,\underline{0}\,\underline{0} \\ & 1605\underline{0} \\ & 642\underline{0} \\ \hline & 8.0\underline{2}\underline{5}\underline{0}\underline{0} \end{array}$$

结果取　8.0$\underline{2}$

例 4

$$
\begin{array}{r}
7.7\underline{9}\underline{2} \\
1\underline{2}\,\overline{)\,93.50\underline{4}} \\
8\underline{4} \\
\hline
\underline{9}\,5 \\
\underline{8}\,\underline{4} \\
\hline
\underline{1}\,\underline{1}0 \\
\underline{1}\,0\underline{8} \\
\hline
\underline{2}\underline{4} \\
\underline{2}\underline{4} \\
\hline
0
\end{array}
\qquad \text{结果取} \quad 7.\underline{8}
$$

(3) 乘方、开方的有效数字位数与底数有效数字位数相同。对数的有效数字与真数的有效数字位数相同。三角函数的有效数字位数与角度的有效数字的位数相同。

*舍入法则：从第二位可疑数字起要舍入的数如小于“5”则舍去，如大于“5”则进 1。如等于“5”则看前面的一位数，前面的一位为奇数，则进 1，使其为偶数；若前面一位为偶数，则舍去后面的可疑数字。

四 .实验数据的记录与处理

实验的结果，不但与测量方法的选择、所用仪器的精度、操作的熟练程度和实验时的细心程度有关，而且还与实验数据的记录有关。原始数据必须填写在预先绘制的表格中，不得随意涂改原始数据。

1. 用列表法处理数据

(1) 数据列表可以简单而明确地表示各量之间的关系，便于检查和及时发现问题，有助于找出有关量之间的规律，求出经验公式。

(2) 列表时要简明。要交待清楚表中各符号的意义，并写明单位。表中的数据要正确反映测量结果的有效数字，如为间接测量，还应简要列出公式。

2. 用图示法处理数据

在处理测量结果时，还常用图示法。图示法是将测量的数据标在坐标纸上,形成一组数据点，再把这些点连成光滑的曲线。其优点是能把测量量之间的关系简明地表示出来，并可从曲线中直接求出待测量。它在医学研究中常被使用。作曲线时，应注意：

(1) 作图时要用坐标纸。

(2) 坐标纸的大小及坐标轴的比例，应根据所测得数据的有效数字和结果的需要来确定。坐标轴末端要标明所示量的名称和单位。

(3) 每个实验点要用符号在坐标纸上明确表示出来。常用符号为×、+、·等，其中心与实验点相对应。

(4) 曲线不必通过所有点，但要求曲线两侧点的个数近似相等，点到曲线的距离也近似相等。

例 用伏安法测电阻数据如下：

U(V)	0.00	1.00	2.00	3.00	4.00	5.00	6.00	7.00	8.00	9.00	10.00
I(mA)	0.00	2.00	4.01	6.05	7.85	9.70	11.83	13.75	16.02	17.86	19.94

用直角坐标纸作图示于图 0-7。

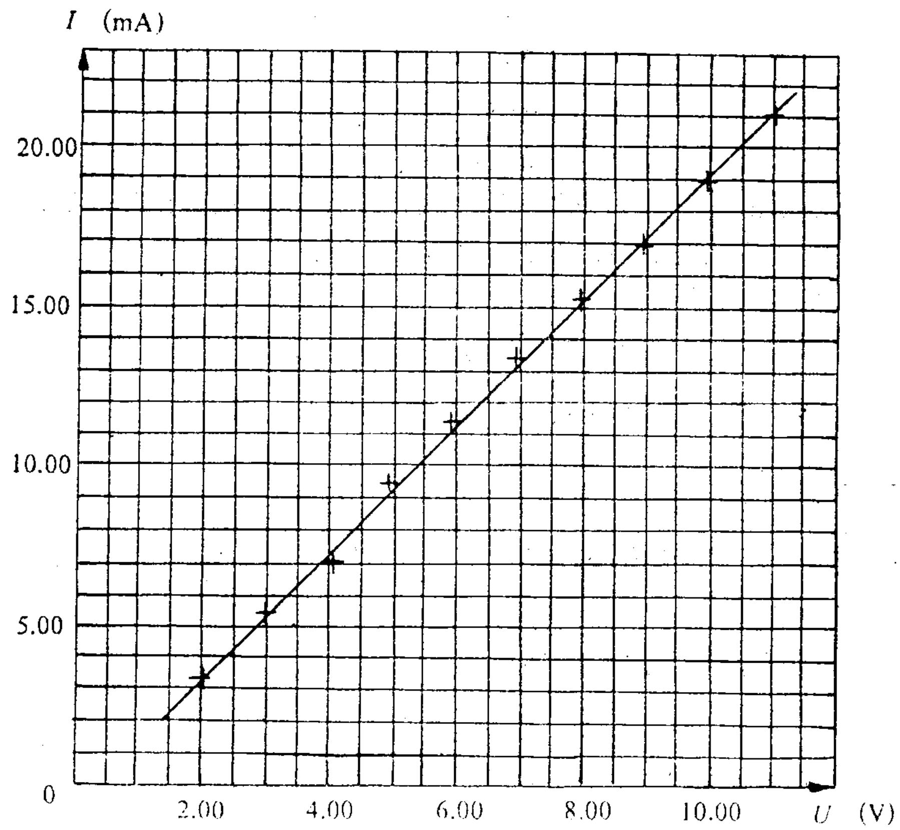


图 0-7　U-I 曲线

3. 用最小二乘法求经验方程

在自然科学中，常用到依据观察与实验所得到的经验公式。求这种公式的最好方法之一，就是最小二乘法。下面我们来介绍最小二乘法。

假定我们要建立两个变量 x 与 y（例如欧姆定律中的电流强度与电压）之间的关系。先作适当次（例如 n 次）测量，将结果列成表。

x	x_1	x_2	x_3	……	x_n
y	y_1	y_2	y_3	……	y_n

将 x 与 y 看作平面上的直角坐标,若在 y 与 x 之间存在线性关系,即 y 是由公式

$$y = ax+b \qquad (1)$$

所表示的 x 的线性函数，其中 a 与 b 是待定系数。上式还可化为

$$ax+b-y = 0 \qquad (2)$$

但实际上点（x，y）仅近似在直线上，如图 0-8 所示，故上述公式亦近似成立。如果将上列表中取的 x_1、y_1、x_2、y_2…x_n、y_n 代入（2）式中可得方程组：

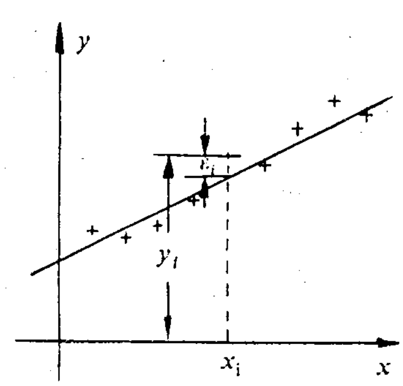


图 0-8　推导经验公式示意图

$$\begin{cases} ax_1 + b - y_1 = \varepsilon_1 \\ ax_2 + b - y_2 = \varepsilon_2 \\ \cdots\cdots \\ ax_n + b - y_n = \varepsilon_n \end{cases} \tag{3}$$

其中 ε_1、$\varepsilon_2 \cdots \varepsilon_n$ 通过适当的方法选择 a 与 b，使这些误差的绝对值尽可能地小，且使其平方和也为最小，该方法就是最小二乘法，现介绍如下：

将方程组（3）各式平方后相加得

$$(ax_1 + b - y_1)^2 + (ax_2 + b - y_2)^2 + \cdots\cdots + (ax_n + b - y_n)^2$$

$$= \varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + \cdots\cdots + \varepsilon_n^2 = S$$

令 $\quad \dfrac{\partial S}{\partial a} = 0 \qquad \dfrac{\partial S}{\partial b} = 0$

$$\begin{cases} x_1(ax_1 + b - y_1) + x_2(ax_2 + b - y_2) + \cdots + x_n(ax_n + b - y_n) = 0 \\ (ax_1 + b - y_1) + (ax_2 + b - y_2) + \cdots + (ax_n + b - y_n) = 0 \end{cases}$$

整理后可得含a与b两个未知量的方程组

$$a(x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2) + b(x_1 + x_2 + \cdots + x_n) = x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_ny_n$$

$$a(x_1 + x_2 + \cdots + x_n) + nb = y_1 + y_2 + \cdots + y_n$$

或

$$\begin{cases} a\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 + b\sum\limits_{i=1}^{n} x_i = \sum\limits_{i=1}^{n} x_iy_i \\ a\sum\limits_{i=1}^{n} x_i + nb = \sum\limits_{i=1}^{n} y_i \end{cases}$$

解之得

$$a = \frac{n\sum\limits_{i=1}^{n} x_iy_i - \sum\limits_{i=1}^{n} x_i \cdot \sum\limits_{i=1}^{n} y_i}{n\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\sum\limits_{i=1}^{n} x_i\right)^2} \qquad b = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 \cdot \sum\limits_{i=1}^{n} y_i - \sum\limits_{i=1}^{n} x_i \cdot \sum\limits_{i=1}^{n} x_iy_i}{n\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\sum\limits_{i=1}^{n} x_i\right)^2}$$

这就是所谓最小二乘法标准方程组的最后形式，由此求出 a 与 b，然后再把它们代入经验公式 $y = ax+b$。这时就能使误差的平方和为最小。

例 用光电比色计测定 $CuSO_4$ 溶液浓度时，量 x（浓度）与 y（消光度）的测量值与运算结果列成下表：

次数	x_i	y_i	x_i^2	x_iy_i
1	0.200	0.048	0.0400	0.0096
2	0.400	0.090	0.1600	0.0360
3	0.600	0.140	0.3600	0.0840
4	0.800	0.174	0.6400	0.1392
$\sum$	2.000	0.452	1.2000	0.2688

将表中$\sum x_i$、$\sum y_i$、$\sum x_i^2$、$\sum x_i y_i$的值代人方程组得

$$\begin{cases} 1.200a + 2.000b = 0.2688 \\ 2.000a + 4b = 0.452 \end{cases}$$

解之得

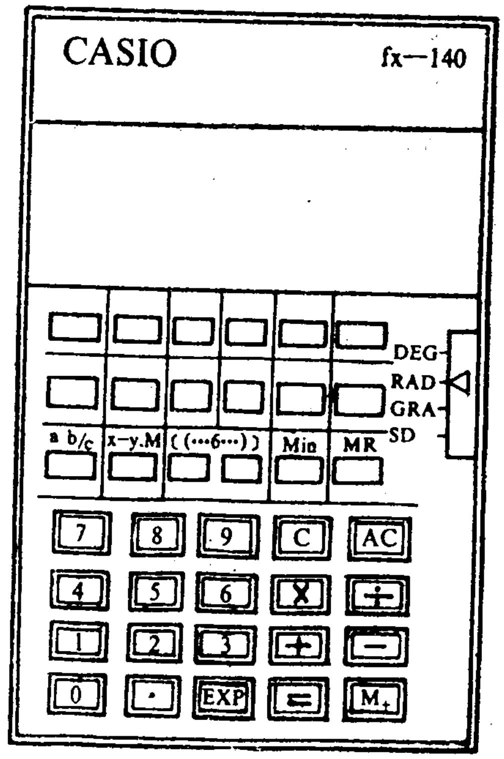
$$a = 0.214 \qquad b = 0.006$$

将 a、b 值代人经验公式 $y = ax+b$，得

$$y = 0.214x+0.006$$

附录：　袖珍计算器的使用

袖珍计算器是一种简易方便的计算工具，型号很多，但基本使用方法类似，现以 CASIOfx—140 为例介绍常用的功能键和使用方法。



0-9　计算器面板图

1. 开关键：计算器左侧有一开关，向上为开，向下为关，开机后数码管显示“0”字。

2. 清“0”键[AC]：按[AC]键后数码管上的数字全部清为零。

3. 错误信息“E”：当使用功能键错误或计算错误时，显示屏上呈现错误信息，溢出符号“E”。

4. 第一功能键：开机后直接按键盘上“+”、“–”、“×”、“+”等符号或数字键时，即能作一般的运算。该机按先乘除后加减的法则运算，有些机器则不同，按一般代数式先后次序运算。

(1) 四则运算

$7 \times 8 - 4 \times 5 = 7[\times]8[-]4[\times]5[=]$　　　显示 36

(2) 平方和立方运算

$1.7^2 = 1.7[\times][\times][=]$　　　显示 2.89

$1.7^3 = 1.7[x^y]3[=]$　　　显示 4.913

(3) 分数运算

$$4\frac{5}{6} \times (3\frac{1}{4} + 1\frac{2}{3}) \div 7\frac{8}{9}$$

$$= 4[a\frac{b}{c}]5[a\frac{b}{c}]6[((\cdots]3[a\frac{b}{c}]1[a\frac{b}{c}]4[+]1[a\frac{b}{c}]2[a\frac{b}{c}]3[\cdots))][\div]7[a\frac{b}{c}]8[a\frac{b}{c}]9[=]$$

显示　3　L　7　L　5　68　按键$[a\frac{b}{c}]$　显示　3.01232943

(4) 对数运算

$\log 1.23 = 1.23$　[log]　　显示　0.08990511

$\ln 90 = 90[\ln]$　　　显示　4.4998097

(5) 三角函数的计算

计算三角函数时，所用角度单位有弧度、度数、梯度三种。

用弧度单位时三角函数的计算　计算器右侧有一方式选择开关，当滑键上的标志对准

RAD 时，可作有关弧度方面的三角函数的运算。如求 sin（π／6）的值：

先对准 RAD 后按[π][÷]6[=]　　显示 0.523598775

按[sin]　　显示 0.5

用度数单位时三角函数的计算同上，将方式开关对准 DEG。

如求 cos63°52′41″　按　63[° ′ ″]52[° ′ ″]41[° ′ ″]　显示 63.87805554

按[cos]　显示 0.44028309

用梯度单位时三角函数的计算同上，将方式选择开关对准 GRA（一圆周为 400 梯度）。

5. 第二功能键[INV]：可用红色的各种功能键，如 10^x，$\cos^{-1}$ 等。

如求 $\sin^{-1}\frac{1}{2}$，将方式开关对准 DEG。

按 1／2，按[INV] [$\sin^{-1}$]　显示 30

6. 第三功能键[SD]：先将方式选择开关对准 SD，即可用蓝色标记的各种功能键，如 $\sum x$、$\bar{x}$等。

思考题

1. 指出下列各量是几位有效数字：

9.8，1.0070，0.0310，0.9400×10^4

2. 改正：

（1）$L=$（5.600±0.2）cm

（2）2.8g＝2800mg

（3）$D=$（10.625±0.257）cm

3. 按有效数字运算法则计算下列各式：

（1）98.35+1.065＝

（2）$4.862\times6.3\times0.002=$

（3）$\frac{0.003}{1000}=$

（4）$\frac{12.65-8.75}{13.50-8.75}=$

4. 今测某棒的长度五次，试计算其平均绝对误差、（平均）相对误差，写出测量结果的标准表达式。已知 $N_1=2.32$m，$N_2=2.34$m，$N_3=2.36$m，$N_4=2.33$m，$N_5=2.35$m。

5. 称出水的质量 $m=$（10.00±0.03）g，体积 $V=$（10.0±0.2）cm^3，试计算水的密度的绝对误差、相对误差，写出水的密度的表达式。

实验一　长度测量

目的

1. 了解游标卡尺、螺旋测微器的结构及原理。

2. 学会并熟练掌握它们的使用方法。

3. 进一步熟悉和巩固误差和有效数字概念。

器材

游标卡尺、螺旋测微器（千分尺）、金属圆筒、金属球。

原理与仪器描述

长度是一个基本物理量，许多其它的物理量也常常化为长度量进行测量,许多测量仪器的长度或角度等读数部分也常常用米尺刻度或根据游标、螺旋测微等原理制成。在实验室中常用的长度测量仪器有米尺、游标卡尺和螺旋测微器等。通常用量程和分度值表示这些仪器的的规格。量程是测量范围,分度值是仪器的精密程度。一般来说，分度值越小，仪器越精密，仪器本身的"允许误差"（尺寸偏差）相应也越小。

一、游标卡尺的构造和游标原理

游标卡尺的外形如图 1-1 所示。它是由主尺 D 和副尺即游标 E 组成的。量爪（亦称测脚）A、A′固定在主尺上，B、B′与游标连在一起。尾尺（深度尺）C 也与游标连在一起，游标可沿主尺滑动。螺丝 F 用来固定游标。量爪 A、B（称外量爪、外卡或钳口）用来测量物体的外部尺寸；量爪 A′、B′（称内量爪、内卡或刀口）用来测量物体的内部长度；尾尺 C 用来测量深度。它们的读数值，都是由游标的 0 线与主尺的 0 线之间的距离表示出来的。

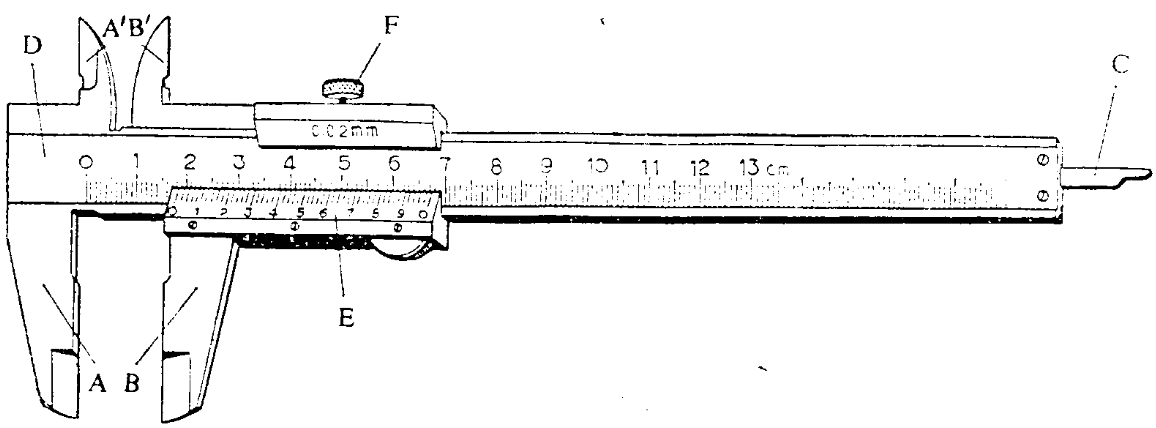


图 1-1　游标卡尺

根据游标分度数的不同，常用的游标卡尺有 50 分度、20 分度和 10 分度等规格。

游标原理：普通米尺最小的刻度是毫米，即它的分度值是 1mm。假如用它度量某一物体的长度，我们只能准确读到毫米，毫米以下的数字就要估计。为了能够更准确地读出毫米的十分之几，在米尺旁再附加一个能够滑动的有刻度的副尺，这个副尺叫做游标，而原来的米尺就叫主尺。