

工程实用优化技术

敖维驹 编著



兵器工业出版社

工程实用优化技术

敖维驹 编著

兵器工业出版社

内 容 简 介

本书系统地介绍了优化设计的理论的方法。着重从工程实用的角度出发,用实际从事工程设计的工程师们较为熟悉的语言和方法,较详细地阐述了优化数学模型及其建立的有关事例。在保持概念和理论完整无误的同时,本书采用了较易理解的推导方法,分析了各种优化方法的特点和实用价值,也侧重分析了各种程序的构成、实用性及其主要技巧。

相信本书对于从事现场设计工作的工程师们进行自学,以及理解和掌握“优化”这一先进的科学方法将会起到很好的推动作用。本书可作为高等工科院校高年级学生和研究生选修课教材,亦可供设计研究部门科技人员参考之用。

工程实用优化技术

敖维驷 编著



兵器工业出版社 出版发行

(北京市海淀区车道沟10号)

新华书店总店北京科技发行所经销

北方工业大学印刷厂印装



开本: 787×1092毫米 1/16 印张: 15 字数: 336千字

1989年6月第1版 1989年6月第1次印刷

印数: 1—10000册 定价: 6.00元

ISBN 7-80038-123-4/TE·3



序

优化这一概念，应该说是一个易为人们所理解和接受的概念。因为当人们按理性行为从事一项工作时，总希望把它尽量做好，精益求精，这就是朴素的优化。然而从另一个方面说，优化并非易事，这也可能是优化成为一个科学研究领域、历史甚短的原因之一。

本世纪三十年代后期出现了运筹学，当时的一个主要课题是武器系统的有效使用。1947年线性规则与求解它的单形算法并蒂而生，优化理论渐趋完整。虽然二十年代博奕论的创建，以及三十年代康脱罗维奇的“生产计划中的数学方法”一书的出版，都孕育着优化理论的发展。然而单形算法的出现是一个突破，它提出了一个切实可行的方法。六十年代成功地编制这一算法的软件，在计算机上的实施，成绩优异，出人意料。在单目标优化问题中，何谓解的优劣，有着自然的定义。然而实际问题的目标远非单一，何谓优劣，本身就是一个值得深入的问题。现实问题的复杂性的一种表现，即为非线性。应该说，非线性现象是大量存在的，因而非线性优化随之即得到很好的发展。不仅如此，动态优化，也相继出现，这样优化的范畴便臻完善。

从优化的对象说，“有效使用”可视为“优化运行”或“优化操作”的同义语。线性规划的出现，把优化的应用推进到管理领域，规划本身即属于管理范畴。动态规划渊源于优化控制。同时，在这一段时期，力学学家开展了极限设计的研究。不久，人们便发现数学规划所提供的方法大有利于优化设计的探讨。这样，优化理论的应用范围便渐趋丰富。

敖维驷同志所著《工程实用优化技术》取材适当，对于以上所述理论和应用的几个方面均有所涉及。轻重繁简，颇多斟酌。其中如轧机的优化即为一个颇值得研究的案例。章节排编，亦颇平衡，特别是包含了一些计算程序，颇足为初学者借鉴。

据我所知，此书亦系几年来讲授这方面课程的产物。详加编汇，辑成一书。堪为读者喜，亦为著者贺。

中国系统工程学会理事长

原中国科学院系统科学研究所副所长 许国志

中国科学院研究员

跋

建立在数学规划论基础上的优化设计，是用最优化的原理和方法解决各种工程设计中最优参数选择问题的一种好方法。这种设计方法不仅是建立在可靠的理论基础之上，而且由于现代计算技术和设备的完善，已经能够比较准确地很快地得到具体的数值结果。在近二、三十年中发展起来的这种设计方法，不仅是应用数学的一个新的重要的分支，而更重要的，它乃是一门有极大效益的新兴技术科学。它在经济计划，企业管理，自动控制，石油，水力，化工，发电，通讯，运输及机械设计等方面的应用和研究工作均进展很快，取得了显著的经济效益。它在提高设计水平，改进设计质量和效果，使难以解决的问题在某种程度上取得显著进展方面表现得尤为突出。采用优化设计以后，可以使得工程设计的方案及其基本参数按预定的目标达到尽可能的完善程度。微型机的普及使用，为在基层企业及其设计部门中普及优化设计这一先进方法提供了有效的装备条件。可以肯定地说，我国各个层次广大的工程设计部门将可能较快地从优化设计中取得效益。优化设计的方法和原理不仅仅是对某一具体领域有效。凡是可以构成一个系统，一种过程或有各种参数综合运行的种种可供选择的方案存在时，均可用优化的原理和方法找出其最好的参数组合。可以在总结成功经验的基础上，把系统、过程和方案的改进从不自觉的状态，以优化设计思想为引导，提高到自觉的水平上来，借以达到最佳的工作状态。因此应该在最广阔的领域中，包括生产，施工，设计以及各种试验过程中，尽快尽多地应用优化设计的原理和办法去探索去研究最合理的方案。

本书作者基于对上述问题的认识，抱着一种强烈的愿望，力图用最恰当合适的方式向正在实际工程岗位上工作的科技工作同行们表达和提供相应的内容和实际的例证。

本书作者的写作意图和中心目的，就是想用较少的时间，主要通过自学阅读等方式，为现在正在实际岗位上从事各种工程设计的有一定经验的工程技术工作者们提供一种合适的、切合实用的优化设计方面的读物和必要的内容。在各种实际的设计岗位上工作着的工程师们，他们所急需的，是用较少的时间，并不过深的数学基础，较快地掌握关于优化设计这一方法的原理方面的基本知识。该书的重要特点之一就是着重于用工程方法，特别是使用工程设计中常用而又易于接受的概念和语言来阐述，而同时又不失其在数学概念和数学逻辑上的严密性、准确性和完整性。在论述各种优化设计方法的理论时，并不追求全部完整的数学过程的推导，而是着重注意阐述清楚理论系统上的来龙去脉，引用简单明确而又易于理解的数学推证，而不迷恋于复杂、繁琐和所谓的正规、但却十分费时的理论推演。比如对多维问题的极值理论，该书采用了从最简单的二元问题入手分析的方法，然后在分析的基础上将结论推广和扩展到多元问题，最后很自然地引出

适用于多元问题的结论。

该书在介绍及论述优化方法理论的同时，把计算技术和程序设计的分析紧密结合在一起。书中对于程序及其框图的介绍和分析给予相当的注意。特别是对于多数文献中经常引用，但并无解释和说明的内容，该书在作者可能及篇幅允许的条件下给出了尽可能详细的阐述，这是十分必要的。对几种重要算法的程序，作者侧重分析了其构成、产生的条件和过程，而不是单纯的引用和介绍，这对初学者或不太熟悉计算技术的读者尤其必要而有利。在几个重要的优化方法之后均附以实例及其实用的程序，并附以对程序本身的理解性说明。这对于结合工程现场的实际，对照应用相应的优化方法解决类似的问题是十分有利的。

书中对于一些优化方法产生的历史条件及理论基础做了较为深入的分析，而在分析的方法和论述的角度方面与其他书籍和文献均不相同，有其本身的特点。作者根据有关工程界人士和自己本人在实际工程设计中的体会和理解，比较确切地表达了较为合理的认识。本书并未限于某种具体的行业和领域，因为优化设计做为普遍适用的一种新兴技术科学，应该在所有它适用的领域、行业和方面尽其所能发挥作用。由于篇幅所限，书中引用的例证还是偏重于几个方面，但这并不表示优化设计做为一种大有前途和广阔发展前景的设计方法的全面情况。这些例证，特别是在建立优化数学模型方面的多数例证，都还只能是其作用和意义的初步说明，其真正的效益和重大意义远非如此。

由于该书作者受到本身阅历及水平的局限，特别是由于客观上优化技术本身的迅速发展，书中疏漏和不妥乃致错误之处均难于避免，切望读者给予指正。

中国机械设计学会常务理事
原国家机械委机床局副局长工程师

周延佑

目 录

序 跋

第一章 优化设计及其数学模型	(1)
第一节 优化数学模型的建立.....	(1)
第二节 优化数学模型的构成要素.....	(9)
1.设计变量.....	(9)
2.目标函数.....	(11)
3.约束条件.....	(14)
第三节 优化问题的数学描述.....	(16)
1.向量表示法.....	(16)
2.容许集的几何表示.....	(17)
3.优化问题的几何图象.....	(18)
第四节 优化设计和运筹学.....	(21)
第二章 实际工程中的各种优化模型	(24)
第一节 桥式起重机箱形主梁优化数学模型.....	(24)
第二节 高炉装料机构参数的优化模型.....	(27)
第三节 铲装机举升机构优化数学模型.....	(29)
第四节 工字钢产品断面的优化设计模型.....	(33)
第五节 围堰优化设计模型.....	(36)
第六节 蜂房结构问题.....	(38)
第七节 工业小区发展规划的优化模型.....	(43)
第八节 线材精轧机组速比分配的优化模型.....	(46)
第九节 带钢冷连轧规程的优化模型.....	(48)
第十节 求解海水波浪上船舶平衡位置的优化模型.....	(49)
第十一节 船体外形的优化设计模型.....	(52)
第十二节 液-液错流萃取问题的优化模型.....	(54)
第十三节 换热系统的优化设计模型.....	(56)

第三章 极值问题的经典理论	(59)
第一节 多元函数极值存在的充要条件	(59)
第二节 向量函数的方向导数及梯度矩阵	(64)
第三节 正定二次函数的特点	(68)
1. 二次函数的矩阵表达	(68)
2. 正定二次函数的特性	(70)
第四节 降维迭代算法的基本思路	(71)
1. 什么是迭代和迭代算法	(71)
2. 降维迭代算法的必要性	(73)
3. 迭代算法的基本要素	(73)
4. 收敛速度与计算终止准则	(75)
第四章 一维搜索	(78)
第一节 确定寻查区间的方法	(79)
1. 基本方法——跨步法	(79)
2. 等步长搜索	(80)
3. 倍增步长搜索	(81)
4. 初始步长的选取	(85)
第二节 一维——直线搜索的基本策略	(86)
第三节 黄金分割法	(89)
1. 对分法和牛顿法的弱点	(89)
2. 黄金分割法的基本原理	(91)
3. 算法及框图	(94)
第四节 黄金分割法的FORTRAN程序运算实例	(96)
第五节 二次插值法	(98)
1. 插值法的基本思想	(98)
2. 抛物线插值方法的基本原理	(99)
3. 区间的舍弃和收缩	(100)
4. 算法及框图	(102)
第六节 二次插值法FORTRAN程序运算实例	(107)
第五章 无约束优化设计	(111)
第一节 最速下降法——梯度法	(112)
1. 基本方法	(112)
2. 梯度法搜索方向的性质	(116)
第二节 共轭方向法	(118)
1. 同心椭圆曲线族的特性	(118)
2. 共轭方向的概念	(119)
3. 共轭方向法的基本思路	(122)

4. 共轭方向法的计算步骤·····	(123)
第三节 POWELL方法·····	(126)
1. 问题的提出·····	(127)
2. 方向“好坏”的标准·····	(127)
3. 淘汰原来方向中的哪一个方向·····	(128)
4. POWELL算法及程序框图·····	(129)
第四节 共轭梯度法·····	(146)
第五节 牛顿法及DFP法·····	(151)
1. NEWTON法·····	(151)
2. 变尺度的基本概念·····	(154)
3. 变尺度矩阵的构造条件·····	(157)
4. DFP法·····	(159)
5. DFP法的算法及框图·····	(160)
6. 变尺度法的发展及DFGS算法·····	(164)
第六章 约束优化方法·····	(165)
第一节 等式约束下的消元法·····	(166)
1. 一般方法·····	(166)
2. 条件极值概念·····	(167)
第二节 LAGRANGE乘子法·····	(168)
1. 等式约束下极值存在的条件·····	(168)
2. LAGRANGE函数的重大意义·····	(173)
第三节 外部惩罚函数法(外点法)·····	(174)
1. 惩罚函数法的提出和构成·····	(174)
2. 外部惩罚函数法算法的构成·····	(176)
3. 外部惩罚函数法的求解过程及其性质·····	(178)
第四节 内部惩罚函数法(内点法)·····	(180)
1. 内点法的基本思路·····	(180)
2. 围墙——贮备的概念·····	(183)
3. 内点法函数的构造形式·····	(183)
4. 内点法和外点法迭代形象的比较·····	(186)
5. 两种内部惩罚函数法解题方法的比较·····	(190)
第七章 惩罚函数法(SUMT)程序实例分析·····	(191)
第一节 两级齿轮减速器的优化设计模型·····	(192)
1. 几种基本关系的分析·····	(192)
2. 确定设计的原始条件·····	(195)
3. 建立本课题的优化数学模型·····	(195)
第二节 通用惩罚函数法FORTRAN程序的标识符选择及其说明·····	(198)

第三节 程序构成及其各组成部分的功能·····	(200)
第四节 主程序PROGRAM SUMT及主要子程序—子程序①SUBROUTINE MAISUB的分析·····	(202)
第五节 计算目标函数值的子程序—子程序⑦SUBROUTINE FUNCT 及计算惩罚函数值的子程序—子程序⑧SUBROUTINE FFX·····	(205)
第六节 用POWELL 方法直接搜索极小点的子程序—子程序 ⑥SUBROUTINE POWELL·····	(208)
第七节 二次插值法—维搜索子程序—子程序⑤SUBROUTINE QUAINS·····	(211)
参考文献 ·····	(217)
后 记 ·····	(219)

第一章 优化设计及其数学模型

我们知道，研究任何一个科学和技术方面的课题，首先要解决的问题就是建立模型。科学和技术工作者的重要任务之一，就是要在大量的复杂多变的科学和生产实践中把实际存在的各种因素加以分析，经过抽象、概括、提炼和加工，保留和突出代表客观对象、生产过程和系统的本质和特点的内容，扬弃无关重要而又易于混淆的部分内容，从而建立起代表这一课题的模型。模型是真实的，又是高于实际存在的。模型表徵了所研究课题的本质，因而对研究工作的成败起着决定性的作用。模型建立起来了，各种因素和各种参数之间的关系当然也就明确清楚了。模型建立本身也正是研究工作第一阶段的成果，建立模型正是研究工作的第一个阶段。

任何一个问题，一个过程或一个系统的数学模型，都只能主要地表徵最本质的特征，而绝不代表它的一切方面或全部细节。特别是优化设计的数学模型，它主要的是代表在设计中要着重追求的，本项设计要着重解决的内容。在优化模型中没有包括的内容，并不是不重要或者没有意义，而是在优化过程中不是着重探讨的内容。

第一节 优化数学模型的建立

我们现在要研究的课题，是在众多可能满足设计要求的方案中，如何能找出符合我们所追求目标的方案。

现仅以大家所熟悉的一个最简单的一级齿轮减速器为例，来说明优化数学模型一些基本概念。减速器大家均已学过，并且做过设计。这是一个一级、圆柱直齿传动的减速器，其给定的原始条件为（图1—1）：

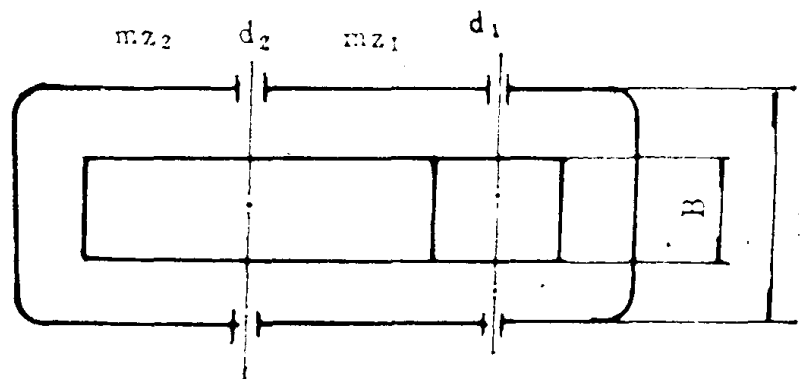


图 1—1

已知：功率： $N = 280 \text{ KW}$

转数： $n = 1000 \text{ r} \cdot \text{p} \cdot \text{m}$

速比： $i = Z_2 / Z_1 = 5$

满足上述条件的方案很多。齿轮的直径可以大些，因而齿宽便可以小些；如果齿数少一些，模数不变的话，则齿轮直径即可小些，那么在同等负荷条件下牙齿就得厚些，即齿宽大些。就是在直径保持不变的条件下，如果齿数少，模数亦应增大，反之齿数多，模数应减小。

现在，我们提出一个完全新型的设计课题：在保证承载能力的条件下，能不能找出一种设计方案，使减速器的重量最轻？也就是消耗的材料最少？

我们现在着手来求解这一课题。

我们可以认识到，一台单级减速器的重量可以由三部分构成：壳体的重量、一对齿轮的重量和两根轴及其附件的重量。在这三部分重量中最关键的是一对齿轮传动本身的重量，即这一对齿轮本身的结构。因为壳体决定于齿轮传动，轴及其附件也决定于齿轮。要想使整个减速器的重量轻，消耗材料少，就必须使这一对齿轮的体积最小，才能达到整体重量轻的目的。这对大批量地生产固定类型减速器的企业无疑是有直接经济效益的。

现在研究哪些参数影响这一对齿轮的重量。显然，很明确的是，凡是能影响齿轮主要尺寸的参数，当然直接影响它的体积和重量。

首先，我们要看一下哪些参数是能够直接影响重量而又可以独立变化的，而这些参数，必须是因其本身数值改变的结果能必然导致总重量改变的。我们来试着分析如下这样一些参数：

齿轮的齿宽	B	$\left. \begin{matrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{matrix} \right\} = \bar{X}$
主动轮的齿数	Z	
大、小齿轮模数	m	
轴的跨距	L	
主动轴的直径	d_1	
从动轴的直径	d_2	

在保证一定承载能力的条件下，齿宽 B 可大可小，齿数也可多可少，同样， m 、 L 、 d_1 及 d_2 也都可以改变，互相协调。如果 B 取得大些，则 Z 、 m 即相应的取小些；如果 d_1 或 d_2 取得大些，则 L 可相应地取大些，因为轴径愈大，刚度愈大，也可允许 L 取大些。涉及一对齿轮体积的，无非就是其有关直径和齿宽了。这六个参数的前三个是直接涉及齿轮外径和宽度的，后三个则直接涉及两根轴的直径和长度。

我们现在从另一个角度来提出问题。这是六个可独立改变取值的参数，只要这六个参数取不同的组合，哪怕只改变其中一个参数的取值，就可以构成不同的方案。当然无论哪个参数的取值改变都会影响其余的参数的取值，因为它们之间有着一系列的条件互相制约着，而这是由原始设计条件所决定的。现在我们把这几个参数用 x_1 、 x_2 、 x_3 、 x_4 、 x_5 、 x_6 来代替。它们本身可以构成为一组参数的组合，也可以把它们看成是某一个

向量的几个分量。我们看,是否可以把总重量用这些参数表达出来。总重量主要由一对齿轮、两根轴及其附件、箱体及其附件三大部分组成,但其中主要的是决定于一对齿轮和两根轴本身,而其余的重量则取决于上两者,这已如上述。就是说,其余部分取决于前两者,因而附属于前者,所以首先从解决一对齿轮和两根轴着手。

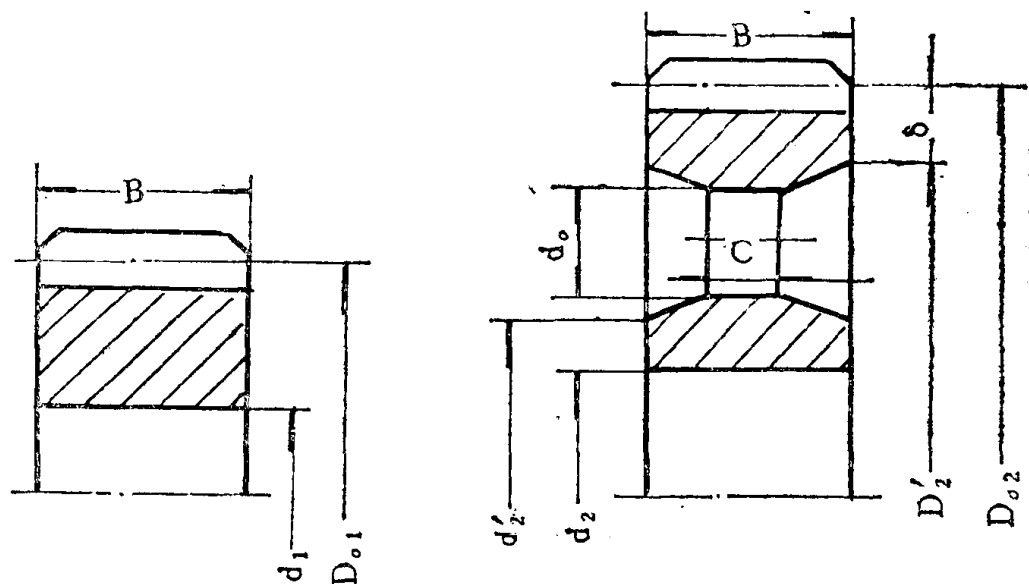


图 1—2.

我们把这一组独立取值的参数看成是某一向量的各分量,并用列向量 $\mathbf{X}$ 表示出来。现在具体地计算各部体积并以向量分量的符号表示。

如图 1—2 所示,把其中计算用的参数用基本参数表达出来:

$$\delta = 5m = 5x_3$$

$$d'_2 = 1.6d_2 = 1.6x_3$$

$$C = 0.2B = 0.2x_1$$

$$D_{o1} = mZ = x_2x_3$$

$$D_{o2} = 5mZ = 5x_2x_3$$

$$D'_2 = D_{o2} - 2\delta = 5x_2x_3 - 10x_3$$

$$d_o = 0.25(D'_2 - d'_2) = 0.25(5x_2x_3 - 10x_3 - 1.6x_3)$$

把各部分体积用这六个基本参数表示出来:

$$\text{小齿轮: } \frac{\pi}{4}B(D_{o1}^2 - d_1^2) = \frac{\pi}{4}x_1(x_2^2x_3^2 - x_3^2)$$

大齿轮: 共三部分分别计算(图 1—2)

$$(1) \text{ 外缘部分: } \frac{\pi}{4}B(D_{o2}^2 - D'^2_2) = \frac{\pi}{4}x_1[25x_2^2x_3^2 - (5x_2x_3 - 10x_3)^2]$$

$$(2) \text{ 中心部分: } \frac{\pi}{4}B(d'^2_2 - d_2^2) = \frac{\pi}{4}x_1[(1.6x_3)^2 - x_3^2]$$

$$(3) \text{ 轮幅部分: } \frac{\pi}{4} C [D'^2 - d'^2] - \frac{\pi}{4} 0.2 \cdot x_1 [(5x_2x_3 - 10x_3)^2 - (1.6x_6)^2 - 4 \cdot (0.25)^2 \cdot (5x_2x_3 - 10x_3 - 1.6x_6)^2]$$

两根轴分别为:

$$\frac{\pi}{4} l d_1^2 = \frac{\pi}{4} x_4 x_5^2$$

$$\frac{\pi}{4} l \cdot d_2^2 = \frac{\pi}{4} \cdot x_4 \cdot x_6^2$$

把以上共四个主要零件六个部分总合起来, 按独立参数的次序排列整齐后, 得到

$$F(\mathbf{X}) = \sum \Delta V = 0.78539816 (6x_1x_2^2x_3^2 + 80x_1x_2x_3^2 - 6.25x_2^2x_3^2 - 80x_1x_3^2 + x_1x_5^2 - x_1x_6^2 + 25x_2x_3^2 + 4x_2x_3x_6 + x_4x_5^2 + x_4x_6^2 - 75x_3^2 - 8x_3x_6 - 0.64x_6^2)$$

这六个独立参数是不能互相代换的, 但它们被一个总重量表达式连锁、协调和制约着。可以看到, 有4个参数的连乘项, 最高次为5次。显然这是 $\mathbf{X} = [x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6]^T$ 的函数。我们在这一新的设计课题中所追求的目标, 正是要使 $F(\mathbf{X})$ 具有极小值。我们把 $F(\mathbf{X})$ 称为目标函数。可见, 目标函数在一般情况下是一个多元函数, 也可以说是一个向量的函数, 现在就是一个6维向量, 即6维欧氏空间中一个向量的函数。

我们把在设计过程中可以独立改变其数值而又互相制约着的参量, 如 $x_1, \dots, x_6$ 等, 称为设计变量, 把由各设计变量组成的列向量 $\mathbf{X}$, 称为设计向量, 把这一向量的定义空间称为设计空间。

我们已经用设计变量 $x_1, x_2, \dots, x_n$ 表达了目标函数 $F(\mathbf{X}) = F(x_1, x_2, \dots, x_n)$, 但是这些设计变量又是不能任意设定和随意改变的, 有一系列的条件在限制、在束缚着它们, 因而它们只能在一定的允许范围内变化。我们试着列举一下, 从普通的大家都知道的工程常识出发, 这些对设计的约束条件将可能有:

(1) 小齿轮不允许根切:

$$Z \geq 17, \text{ 即 } Z - 17 \geq 0$$

我们写成: $g_1(\mathbf{X}) = x_2 - 17 \geq 0$

(2) 齿宽必须选在合适的范围内, 齿宽系数 B/m 应在允许范围内, 过宽过窄都不能正确啮合; 取:

$$16 \leq B/m \leq 35, \text{ 此式可写成两个不等式。}$$

我们把它写成:

$$g_2(\mathbf{X}) = x_1/x_3 - 16 \geq 0$$

$$g_3(\mathbf{X}) = 35 - x_1/x_3 \geq 0$$

(3) 模数 m 只能取正值 (而且最后还必须符合国家标准):

$$m > 0$$

$$g_4(\bar{X}) = x_3 > 0$$

(4) 要求把大齿轮的极限尺寸限制在一定范围内(1500毫米以内):

即 $5mZ \leq 1500\text{mm}$, 简化并统一将长度单位取为厘米, 上式可改写为:

$$g_5(\bar{X}) = 30 - x_2 x_3 \geq 0$$

(5) 主动轴从动轴的最大最小尺寸亦有适当限制:

主动轴: $150 \geq d_1 \geq 100$ (毫米)

$$g_6(\bar{X}) = x_5 - 10 \geq 0$$

$$g_7(\bar{X}) = 15 - x_7 \geq 0$$

从动轴: $200 \geq d_2 \geq 130$

$$g_8(\bar{X}) = x_8 - 13 \geq 0$$

$$g_9(\bar{X}) = 20 - x_6 \geq 0$$

(6) 轴的长度应能保证齿轮的正确啮合, 因而其长度应尽可能短:

$l \geq B + 0.5d_2 + 2\Delta_{\min}$, $\Delta_{\min}$ 为齿轮与壳体箱壁之间的最小间隙, 取 $\Delta_{\min} = 10\text{mm}$, 将后边的移项到前, 则得:

$$g_{10}(\bar{X}) = x_4 - x_1 - 0.5x_6 - 4 \geq 0$$

以上 $g_1(\bar{X}) \cdots g_{10}(\bar{X})$ 共10条限制和要求主要是对几何尺寸方面的限制, 即 $(\bar{X})$ 各分量 $x_1, x_2, \dots, x_n$ 的边界限制, 统称为边界约束, 即 x_i 只能在所允许的范围内变动。大家知道, 除此之外, 对机械设计说来, 更重要的乃是设计变量的选择还必须满足强度和刚度的要求, 否则便不可能满足设计的基本要求。这些条件可能有:

(7) 齿面接触强度:

基本公式为:

$$\sigma_j = \frac{1070}{A} \sqrt{\frac{(i+1)^3 \cdot K \cdot Mn_1}{B \cdot i}} \leq [\sigma_j]$$

当 $K = 1.3Mn_1 = 2673\text{Nm}$,

$[\sigma_j] = 839\text{MPa}$,

将 $A = 1/2m(Z + Z \cdot i)$

$$= 1/2x_3(x_2 + 5x_2)$$

代入, 并将其统一计算单位取为 kg 及 cm , 则得:

$$g_{11}(\bar{X}) = 8550 - 441628 / (x_2 x_3 \sqrt{x_1}) \geq 0$$

(8) 齿根弯曲强度: (主、从动齿轮)

$$\text{主动轮: } \sigma_{w1} = \frac{2KMn_2}{BD_{O1}mY_1} \leq [\sigma_{w1}]$$

式中 $[\sigma_{w1}] = 255\text{MPa}$

$Y_1 = 0.169 + 0.66Z \cdot 10^{-2} - 0.88Z^2 \cdot 10^{-3}$, 代入后, 得

$$g_{12}(\bar{X}) = 2600 - 70980 / [x_1 x_2 x_3^2 (0.169 + 0.66x_2 \cdot 10^{-2} - 0.88x_2^2 \cdot 10^{-3})] \geq 0$$

$$\text{从动轮: } \sigma_{w2} = \frac{2KMn_1}{BD \cdot 0.1mY_2} \leq [\sigma_{w2}]$$

式中: $[\sigma_{w2}] = 210 \text{ MPa}$

$$Y_2 = 0.2824 + 0.35Z \cdot 10^{-3} - 0.16Z^2 \cdot 10^{-4}$$

同理相应得: $g_{13}(\bar{X}) = 213 - 70980 / [\dots] \geq 0$

9) 轴的刚度: (要求轴的最大变形限制在其长度的千分之三以内)

$$\frac{Pl^3}{48EJ} \leq 0.003l \quad (\text{现只计算} d_1 \text{轴中间处挠度})$$

$$g_{14}(\bar{X}) = 0.003x_4 - 2.88x_4^3 / (x_2x_3x_5^4) \geq 0$$

(式中 $P = 2Mn / (Zm \cos \alpha)$, $J = \pi d^4 / 32$)

(10) 轴的弯曲强度: (只计算两根轴中间处的最大弯曲应力)

$$\text{主动轴: } \sigma_u = \sqrt{\frac{M^2 + (\alpha Mn_1)^2}{W_1}} \leq [\sigma_u]$$

式中, 弯矩 $M = 142 \cdot l / Zm \text{ Nm}$, 取 $\alpha = \frac{[\sigma_u]_{\text{III}}}{[\sigma_u]_{\text{II}}} = 0.58$,

$$[\sigma_u] = 54 \text{ MPa},$$

$$g_{15}(\bar{X}) = 55 - (2.14 \cdot 10^8 \frac{x_4^2}{x_2^2 x_3^2} + 2.55 \cdot 10^8) \frac{1/2}{x_5^3} \geq 0$$

$$\text{从动轴: } g_{16}(\bar{X}) = 55 - (\frac{2.44 \cdot 10^8 x_4^2}{x_2^2 x_3^2} - 12.75 \cdot 10^8) \frac{1/2}{x_5^3} \geq 0$$

由 $g_{11}(\bar{X}) \dots g_{16}(\bar{X})$ 共 7 个条件, 主要是受零件的强度和刚度条件, 即性能条件的限制和约束。综上所述, 我们看到, 设计变量 $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6$ 是一个列向量 $\bar{X} = [x_1, x_2, \dots, x_6]^T$ 的六个分量, 这是在设计中可以独立改变其数值的向量各分量, 它可构成 R^n 空间的一个向量。在设计空间中的每一个向量都是各分量的一个组合, 都代表一个设计方案。各设计变量所配成的组合, 都必须满足各种限制和约束条件的要求。在这种条件下使目标函数具有极小值。

使 $F(\bar{X}) \rightarrow \min F(\bar{X}) = F(\bar{X}^*)$,

满足: $g_u(\bar{X}) \geq 0, u = 1, 2, \dots, 16$ 各约束条件

于是问题变为: 在 $g_1(\bar{X}) \geq 0, \dots, g_{16}(\bar{X}) \geq 0$ 条件约束下, 设法寻求一个最优解 $\bar{X}^*$, 即一组 $x_1, x_2, \dots, x_6$ 参数的组合, 使得总重 (体积 $\sum \Delta V$) $F(\bar{X}) \rightarrow \min F(\bar{X})$ 最小。我们把这样一种问题称为优化设计, 把 $\bar{X}^*$ 称为优化问题的最优解, 把 $F(\bar{X}^*)$ 的数值称为目标函数的最优值。

现在再来研究一个建筑工程中悬臂式挡土墙的优化设计问题, 以便进一步了解优化

数学模型建立的过程。

挡土墙的结构如图 1—3 所示。墙的设计为三根钢筋混凝土悬臂梁：墙身、墙趾和墙跟(图中之a)。可能的破坏形式来自如下两个方面：

一是土的破坏：

- (1)墙周围土的剪切破坏(图中之a)；
- (2)墙在墙床上滑动；
- (3)整个墙绕墙趾倾翻；
- (4)墙趾下土壤承压破坏。

二是悬臂梁(共三根)的破坏：

- (5)梁的抗剪厚度不足；
- (6)梁的抗挠曲厚度不足；
- (7)钢筋与混凝土间的结合强度不足；
- (8)钢筋拉断；
- (9)钢筋的锚固破坏。

如图中(c)所示，尺寸 t 、 h 、 d_s 和 d_b ，墙身、墙趾、墙跟每延英尺的钢筋面积 A_s 、 A_t 和 A_b ，都是需要确定的参数。由以上初步分析可见，要设计一个造价最低的悬臂式挡土墙，有以上 7 个设计变量和 9 种破坏形式的约束。

首先分析是否可以简化上述参数和条件。

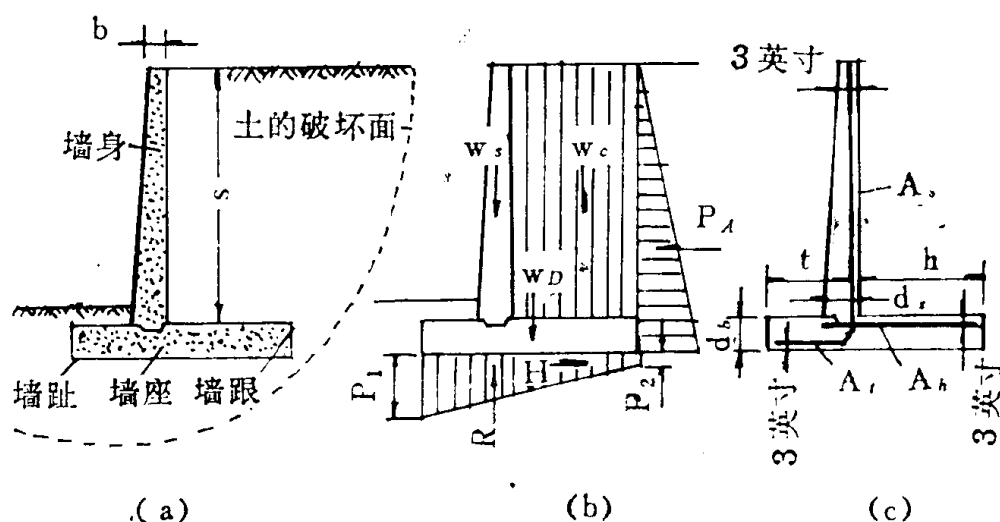


图 1—3 悬臂式挡土墙

首先应注意到，墙身的费用与其在墙座上的位置无关，因为墙身混凝土和钢筋与位置无关，因此与墙身有关的设计参数 d_s 及 A_s 可以单独分离出来。对于墙座，明显地破坏形式(7)和(9)可不必考虑，破坏形式(7)决定于钢筋直径而不决定于总重。形式(9)所决定的锚固长度对总费用影响不大，形式(1)这种破坏形式并不受墙座长度和墙身位置的影响，因而(1)类破坏问题可以单独分离出来。此外，根据经验可以判定，假如主要的破