全国高等职业学校·高等专科学校教材

应用数学基础

（上册）

曾文斗　主编

高等教育出版社

应用数学基础

（上册）

全国高等职业技术学校教材

应用数学基础

上册

主编 曾文斗

高等教育出版社

图书在版编目(CIP)数据

应用数学基础 上册/曾文斗主编.—北京:高等教育出版社,1999.8

ISBN 7-04-008063-X

I. 应… II. 曾… III. 应用数学-高等学校:专业学校-教材 IV. O29

中国版本图书馆 CIP 数据核字(1999)第 37680 号

责任编辑 杨歆颖 **特约编辑** 李凌云
封面设计 乐嘉敏 **责任印制** 蔡敏燕

书　名	应用数学基础(上册)		
作　者	曾文斗		
出版发行	高等教育出版社		
社　址	北京市东城区沙滩后街 55 号	**邮政编码**	100009
电　话	010-64054588 021-62587650	**传　真**	010-64014048 021-62551530
网　址	http://www.hep.edu.cn		
经　销	新华书店上海发行所		
排　版	南京理工排版校对公司		
印　刷	商务印书馆上海印刷股份有限公司		
开　本	850×1168 1/32	**版　次**	1999 年 8 月第 1 版
印　张	10	**印　次**	2000 年 7 月第 2 次
字　数	250 000	**定　价**	11.00 元

前　言

高等职业教育作为我国高等教育的一个重要组成部分，与普通高等教育相比较有着它自身的特点，其目标是培养生产和管理第一线的技术应用型人才。高等职业教育的发展急需建设体现其培养目标的教材体系。为满足高等职业技术院校、高等专科学校和成人高等学校的教学需要，以及在职从业人员学习高等数学的要求，在有关领导的支持下，我们在十几年教学实践的基础上，编写成这本教材。

《全国普通高等专科教育座谈会纪要》指出，高等专科学校的教学“要突出理论知识的应用和实践动手能力的培养”，原国家教委《关于推动职业大学改革与建设的几点意见》中又指明，职业大学的理论教学要以应用为目的，以“必需、够用”为原则。按照这些原则，本书的编写力求体现以下特点：

1. 贯彻理论联系实际的原则，着重经济管理和工程技术等方面的实际应用。本书的基本概念都从实际问题引入，并注意联系各方面的应用，以提高学生解决实际问题的能力。

2. 减少系统的理论推导，加强重要法则和公式的运用。许多定理、结论都用“法则”、“公式”形式出现，每节均配备作为基本知识、法则和公式应用训练的例题和“实训题”，以加强这些法则和公式的熟练运用。

3. 增强教材的适用性。本书汇集了若干层次的基本知识及应用内容，供不同专业和不同教学对象选用，并在附录Ⅰ增加“初等数学部分内容和公式概述”，供起点是中等职业技术学校的毕业生和成人高校学员参考。

4. 注意基本知识和基本方法的归纳,便于自学。本书的许多结论和方法在"说明"、"注"中进行整理、归纳,方便学生复习和自学。

本书分上、下两册。上册各章及附录均由曾文斗编写,下册的第六章由曾文斗编写,第七章由周雅丽编写,第八章由黄永正编写。全书内容由曾文斗统一策划、总纂定稿。本书的出版,承蒙上海交通大学陆心杰教授审阅书稿并修改斧正,同时,得到福建省高等职业技术教育研究会及福建各职业大学领导和教师的支持,在此谨表示衷心的感谢.

高等职业教育在我国的发展尚处在初期,编写适应高等职业教育的教材现在还只是一种尝试,同时,由于编者水平限制和经验不足,因此,本书的编写意图未必都能实现,错误或不当之处在所难免,欢迎广大读者指正。

编 者

1999 年 5 月

第一章

函数、极限与连续

第一节 函 数

在自然现象、经济活动和工程技术中，往往同时遇到几个变量，这些变量通常不是孤立的，而是遵循一定规律相互依赖的，这个规律反映在数学上就是变量与变量之间的函数关系.关于函数的有关知识，已在中学数学中作了介绍，本节仅就其中的一部分作简要的叙述，并作必要的补充.

一、*函数的概念*

1. 函数的定义

定义 1 设某一变化过程中有两个变量 x 和 y，如果当变量 x 在其变化范围内任意取定一个值时，变量 y 按照一定的对应法则有确定的值与它对应，则称 y 是 x 的函数，记作 $y=f(x)$. 其中 x 叫做自变量，y 叫做因变量.

如果自变量 x 取某一数值 x_0 时，函数 y 有确定的值和它对应，就称函数在点 x_0 有定义.在一般情况下，使函数有定义的自变量取值的集合，称为函数的定义域，它一般是数轴上的一些点的集合(区间)，在实际问题中，还应结合实际意义来确定函数的定义域.自变量取定义域内某一值时，因变量的对应值，叫做函数值.函数值的集合叫函数的值域，它是由定义域和对应的法则决定的.

如果对于定义域内任一个自变量的值，函数只有一个确定的值

和它对应，这种函数叫做单值函数，否则，就叫做多值函数. 本书所讨论的函数，如果没有特别指出，均指单值函数.

例 1 求函数 $f_1(x)=\dfrac{x^2-2x}{x}$ 的定义域，并与函数 $f_2(x)=x-2$ 比较，它们是否表示同一个函数？

解 $f_1(x)$的定义域是 $x\neq 0$ 的一切实数，即 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$；而 $f_2(x)$的定义域是$(-\infty,+\infty)$.

由于 $f_1(x)$与 $f_2(x)$的定义域不同，故 $f_1(x)$与 $f_2(x)$不表示同一个函数.

说明 决定函数的两要素是定义域和对应法则，因此，两个函数只有在它们的定义域和对应法则都相同时，才认为是相同的.

2. 分段函数

表示函数的方法通常有公式法、列表法和图示法三种.

用公式表示函数时，一般用一个式子表示一个函数. 有时需要用几个式子分段表示一个函数，即对于自变量不同的取值范围，函数采用不同的表达式，这种函数叫做分段函数.

例如

$$y=|x|=\begin{cases} x\ (x\geqslant 0), \\ -x\ (x<0), \end{cases} \quad 及 \quad y=\begin{cases} 1\ (0<x\leqslant 5), \\ 0\ (x=0), \\ -1\ (-5<x<0) \end{cases}$$

都是分段函数. 其图象分别如图 1-1 及图 1-2 所示.

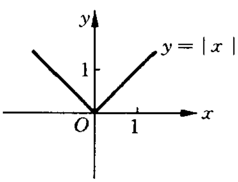

图 1-1

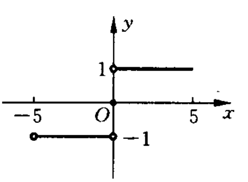

图 1-2

注意 (1) 分段函数是用几个式子表示一个函数，而不是表示几个函数.

(2) 分段函数的定义域是各段自变量取值集合的并集.

例 2 若 $f(x)=\begin{cases}x-2 & (1\leqslant x<3),\\ x^2 & (3\leqslant x<5),\end{cases}$

求 $f(x+1)$, $f\left(\dfrac{1}{x}\right)$.

解 $f(x+1)=\begin{cases}(x+1)-2 & (1\leqslant x+1<3),\\ (x+1)^2 & (3\leqslant x+1<5)\end{cases}$

$$=\begin{cases}x-1 & (0\leqslant x<2),\\ (x+1)^2 & (2\leqslant x<4).\end{cases}$$

$$f\left(\frac{1}{x}\right)=\begin{cases}\dfrac{1}{x}-2 & \left(1\leqslant \dfrac{1}{x}<3\right),\\ \left(\dfrac{1}{x}\right)^2 & \left(3\leqslant \dfrac{1}{x}<5\right)\end{cases}$$

$$=\begin{cases}\dfrac{1}{x}-2 & \left(\dfrac{1}{3}<x\leqslant 1\right),\\ \dfrac{1}{x^2} & \left(\dfrac{1}{5}<x\leqslant \dfrac{1}{3}\right).\end{cases}$$

例 3 A、B 两地间的汽车运输,旅客携带行李按下列标准支付运费:不超过 10 公斤的不收行李费;超过 10 公斤而不超过 25 公斤的,每公斤收运费 0.50 元;超过 25 公斤而不超过 100 公斤的,每公斤收运费 0.80 元.试列出运输行李的运费与行李的重量之间的函数关系式,写出其定义域,并求出所带行李分别为 16 公斤和 65 公斤的甲、乙两旅客各应支付多少运费?

分析 由于行李的重量在不超过 10 公斤、超过 10 公斤而不超过 25 公斤、超过 25 公斤而不超过 100 公斤三种情况下,其运费的计算方法是各不相同的,因此,该关系式需用分段函数来表示.

如果假设行李的重量为 x 公斤,运费为 y 元,那么,

(1) 当 $0\leqslant x\leqslant 10$ 时, $y=0$;

(2) 当 $10<x\leqslant 25$ 时,由于不超过 10 公斤的行李不收费,故单价为 0.50 元的行李重量为 $(x-10)$ 公斤,这时运费为 $y=0.50(x-10)$;

(3) 当 $25<x\leqslant 100$ 时,运费是由 y_1、y_2 两部分合成的:①前 25 公斤在扣除 10 公斤免费后,余下的 15 公斤每公斤收运费 0.50 元,则 $y_1=0.50(25-10)$;②超过 25 公斤而不超过 100 公斤部分的重量为 $(x-25)$,这时 $y_2=0.80(x-25)$.

因此,可得如下解答:

解 设行李重量为 x 公斤，则行李的运费为

$$y=f(x)=\begin{cases}0 & (0\leqslant x\leqslant 10),\\ 0.50(x-10) & (10<x\leqslant 25),\\ 0.50(25-10)+0.80(x-25) & (25<x\leqslant 100)\end{cases}$$

$$=\begin{cases}0 & (0\leqslant x\leqslant 10),\\ 0.5x-5 & (10<x\leqslant 25),\\ 0.8x-12.5 & (25<x\leqslant 100),\end{cases}$$

其定义域为$[0, 100]$.

$f(16)=0.50\times 16-5=3.00$(元)，

$f(65)=0.8\times 65-12.5=39.50$(元).

即甲、乙两旅客应分别支付运费 3.00 元和 39.50 元.

3. 显函数和隐函数

有些函数的因变量 y 可用含自变量 x 的一个明显的表达式表示，例如 $y=2x+1$、$y=\sqrt{r^2-x^2}$ 等等，这样的函数称为显函数.

用方程 $F(x, y)=0$ 的形式也可以确定 y 是 x 的函数，这种函数是隐函数. 例如，方程 $x^2+y^2=R^2(y>0)$ 确定了函数 $y=\sqrt{R^2-x^2}$；方程 $a^x-2^y-xy=0$ 也确定了一个函数 $y=f(x)$，但 y 难以明显地用含 x 的表达式表示出来. 这种隐含于方程内的函数叫做隐函数.

二、函数的几种特性

1. 函数的单调性

定义 2 设函数 $y=f(x)$ 定义在区间(a, b)内，如果对于(a, b)内的任意两点 $x_1<x_2$，都有

$$f(x_1)<f(x_2)\quad [f(x_1)>f(x_2)]$$

成立，则称函数 $y=f(x)$ 在区间(a, b)内是单调增加(单调减少)

的，而称区间(a, b)为单调增加(单调减少)区间.

例 4 判别下列函数的单调性，并写出其增减区间：

(1) $f(x) = ax + b\ (a \neq 0)$;

(2) $f(x) = 1 - x^2$.

解 (1) 设x_1、$x_2 \in (-\infty, +\infty)$，且$x_1 < x_2$，所以

$$f(x_1) - f(x_2) = (ax_1 + b) - (ax_2 + b) = a(x_1 - x_2).$$

1° 当$a > 0$时，因$x_1 - x_2 < 0$，故$f(x_1) - f(x_2) < 0$，所以$f(x)$在$(-\infty, +\infty)$内是单调增加的. 即$f(x)$的单调增加区间为$(-\infty, +\infty)$.

2° 当$a < 0$时，因$x_1 - x_2 < 0$故$f(x_1) - f(x_2) > 0$，所以$f(x)$在$(-\infty, +\infty)$内是单调减少的. 即$f(x)$的单调减少区间是$(-\infty, +\infty)$.

(2) 对于x_1、$x_2 \in (-\infty, +\infty)$，且$x_2 - x_1 > 0$，有

$$f(x_1) - f(x_2) = (1 - x_1^2) - (1 - x_2^2) = (x_2 + x_1)(x_2 - x_1).$$

1° 当x_1、$x_2 \in (-\infty, 0)$时，因$x_2 - x_1 > 0$，且$x_2 + x_1 < 0$，所以$f(x_1) - f(x_2) < 0$. 即$f(x)$在$(-\infty, 0)$内是单调增加的.

2° 当x_1、$x_2 \in (0, +\infty)$时，因$x_2 - x_1 > 0$且$x_2 + x_1 > 0$，所以$f(x_1) - f(x_2) > 0$. 即$f(x)$在$(0, +\infty)$内是单调减少的.

则$f(x)$的单调增加区间为$(-\infty, 0)$；单调减少区间为$(0, +\infty)$.

2. 函数的奇偶性

定义 3 设$f(x)$定义在区间(a, b)内，如果对于任一$x \in (a, b)$，都有

$$f(-x) = -f(x)$$

成立，则称$f(x)$在区间(a, b)内是奇函数；如果对于任一$x \in (a, b)$，都有

$$f(-x) = f(x)$$

成立，则称$f(x)$在(a, b)内是偶函数.

奇函数的图象是关于原点对称的，偶函数的图象是关于y轴对称的.

例 5 判别下列函数的奇偶性：

(1) $f(x)=x^3$;

(2) $f(x)=\frac{1}{2}(a^x+a^{-x})$;

(3) $f(x)=\frac{1}{x}+1$.

解　(1) 因为 $f(-x)=(-x)^3=-x^3=-f(x)$,
所以 $f(x)=x^3$ 是奇函数.

(2) 因为　$f(-x)=\frac{1}{2}[a^{-x}+a^{-(-x)}]=\frac{1}{2}(a^x+a^{-x})=f(x)$,
所以 $f(x)=\frac{1}{2}(a^x+a^{-x})$ 是偶函数.

(3) 因为　$$f(-x)=\frac{1}{-x}+1=-\frac{1}{x}+1,$$
它既不等于 $-f(x)$,也不等于 $f(x)$,所以 $f(x)=\frac{1}{x}+1$ 是非奇非偶函数.

3. 函数的周期性

定义 4　对于函数 $y=f(x)$,如果存在一个常数 T $(T\neq 0)$,使得对于在其定义域内的所有 x,都有

$$f(x+T)=f(x)$$

成立,则称 $y=f(x)$ 是周期函数,而称 T 为函数的周期. 通常,我们把周期函数的最小正周期简称为周期.

例如,函数 $y=\sin x$ 和 $y=\cos x$ 都是以 2π 为周期的周期函数,函数 $y=\tan x$ 和 $y=\cot x$ 都是以 π 为周期的周期函数.

4. 函数有界性

定义 5　对于定义在 (a,b) 内的函数 $y=f(x)$,如果存在一个正数 M,使得对于 (a,b) 内的所有 x,都有

$$|f(x)|\leqslant M$$

成立,则称 $y=f(x)$ 在 (a,b) 内是有界的. 如果这种 M 不存在,则称 $y=f(x)$ 在 (a,b) 内是无界的.

例如,因为对于任意 $x \in (-\infty, +\infty)$, 都有 $|\sin x| \leqslant 1$,所以,$y = \sin x$ 在$(-\infty, +\infty)$内是有界的. 而函数 $y = \frac{1}{x}$ 在区间$(0, 1)$内是无界的,因为不存在这样的正数 M,使 $\left|\frac{1}{x}\right| \leqslant M$ 对于$(0, 1)$内的所有 x 都成立;而 $y = \frac{1}{x}$ 在$(1, 2)$内是有界的,因为存在着这样的 M(例如 $M = 1$)使 $\left|\frac{1}{x}\right| \leqslant M$ 对于$(1, 2)$内的所有 x 都成立.

三、复合函数与初等函数

1. 反函数

定义 6 设函数 $y = f(x)$ 的定义域是(a, b),值域是(c, d),若对于(c, d)中的任一个 y 值,都有唯一的 $x \in (a, b)$, 使得

$$f(x) = y$$

成立,这时 x 也是 y 的函数,称它为 $y = f(x)$ 的反函数,记作 $x = f^{-1}(y)$. 这时,称 $y = f(x)$ 为直接函数.

由定义可知,反函数 $x = f^{-1}(y)$ 的定义域是直接函数的值域,而反函数的值域是直接函数的定义域.

习惯上,常用 x 表示自变量,而把 y 表示因变量. 因此,经常把反函数 $x = f^{-1}(y)$ 仍记作 $y = f^{-1}(x)$.

例 6 求下列函数的反函数:

(1) $y = \frac{x-1}{x+1}$;

(2) $y = 10^{x+2}$.

解 (1) 等式两边同乘以 $x + 1$, 得

$$xy + y = x - 1,$$

$$x(1 - y) = 1 + y,$$

则

$$x = \frac{1+y}{1-y},$$

故 $y=\dfrac{x-1}{x+1}$ 的反函数为 $x=\dfrac{1+y}{1-y}$，习惯上写成 $y=\dfrac{1+x}{1-x}$.

(2) 等式两边同取以 10 为底的对数，得

$$\lg y = x + 2,$$

$$x = \lg y - 2,\ \text{记作}\ y = \lg x - 2,$$

即 $y=10^{x+2}$ 的反函数为 $y=\lg x-2$.

反函数是相对的，例 6(2) 中 $y=\lg x-2$ 是 $y=10^{x+2}$ 的反函数，而 $y=10^{x+2}$ 也是 $y=\lg x-2$ 的反函数.

互为反函数的两个函数的图形对称于直线 $y=x$.

2. 基本初等函数

下面六类函数统称为基本初等函数：

(1) 常函数　$y=c$　(c 为常数)；

(2) 幂函数　$y=x^a$　(a 为实数)；

(3) 指数函数　$y=a^x$　($a>0$ 且 $a\neq 1$)；

(4) 对数函数　$y=\log_a x$　($a>0$，且 $a\neq 1$)；

(5) 三角函数　$y=\sin x$，$y=\cos x$，$y=\tan x$，$y=\cot x$，$y=\sec x$，$y=\csc x$；

(6) 反三角函数 $y=\arcsin x$，$y=\arccos x$，$y=\arctan x$，$y=\operatorname{arccot} x$.

上述这些函数已在中学数学中作过较详细的讨论，下面就其图象和性质作简要的复习.

(1) 常函数：$y=c$ (c 为常数)

它的图形是一条平行于 x 轴且截距为 c 的直线，见图 1-3. 其定义域是 $x\in(-\infty,+\infty)$.

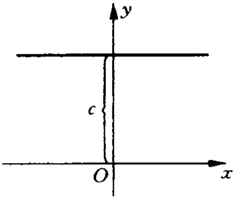

图 1-3

(2) 幂函数：$y=x^a$ ($a\in\mathbf{R}$)

它的图形和性质随 a 的不同值而不同，但不论 a 取何值，它在 $(0,+\infty)$ 内总有定

义，而且其图形都过点(1, 1).

当 $a>0$ 时，它在第一象限是增函数，其第一象限的图形如图 1-4 所示；当 $a<0$ 时，它的定义域是 $x\neq 0$，且在第一象限是减函数，其第一象限的图形如图 1-5 所示.

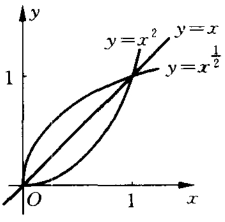

图 1-4

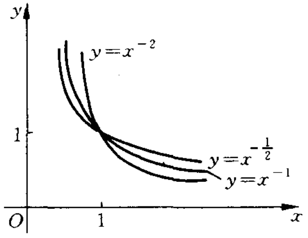

图 1-5

(3) **指数函数**：$y=a^x(a>0$ 且 $a\neq 1)$，特别当 $a=e=2.718\,28\cdots$ 时为 $y=e^x$.

它的图形如图 1-6 所示. 其定义域是 $x\in(-\infty, +\infty)$，值域是 $y\in(0, +\infty)$. 当 $a>1$ 时，函数单调增加；当 $0<a<1$ 时，函数单调减少. 无论 $a>1$ 或 $0<a<1$，函数的图形都过点(0, 1)，且以 x 轴为渐近线.

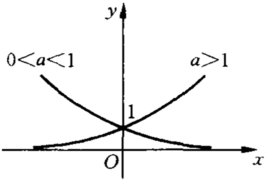

图 1-6

(4) **对数函数**：$y=\log_a x$ $(a>0$ 且 $a\neq 1)$，特别当 $a=10$ 时，$y=\lg x$ 称为常用对数，当 $a=e$ 时，$y=\ln x$ 称为自然对数.

它的图形如图 1-7 所示. 其定义域是 $x\in(0, +\infty)$，值域是 $y\in(-\infty, +\infty)$. 当 $a>1$ 时，函数单调增加；当 $0<a<1$ 时，函数单调减少. 无论 $a>1$ 或 $0<a<1$，函数的图象都是过点(1, 0)，且以 y 轴为渐近线.

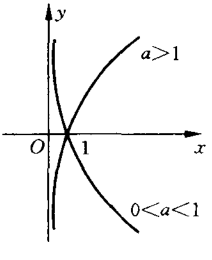

图 1-7

对数函数与指数函数互为反函数.

(5) 三角函数

三角函数有正弦函数 $y=\sin x$、余弦函数 $y=\cos x$、正切函数 $y=\tan x$、余切函数 $y=\cot x$、正割函数 $y=\sec x$ 和余割函数 $y=\csc x$.

正弦函数 $y=\sin x$ 的图形如图 1-8 所示. 其定义域是 $x\in(-\infty,+\infty)$,值域是 $y\in[-1,1]$. 它是奇函数,即 $\sin(-x)=-\sin x$; 是周期函数,周期 $T=2\pi$; 是有界函数, $|\sin x|\leqslant 1$; 当 $x\in\left(2k\pi-\frac{\pi}{2},2k\pi+\frac{\pi}{2}\right)$ 时($k\in\mathbf{Z}$,下同)是单调增加的;当 $x\in\left(2k\pi+\frac{\pi}{2},(2k+1)\pi+\frac{\pi}{2}\right)$ 时是单调减少的.

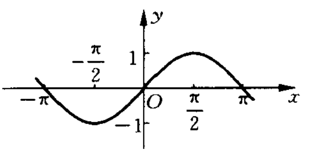

图 1-8

余弦函数 $y=\cos x$ 的图形如图1-9所示. 其定义域是 $x\in(-\infty,+\infty)$, 值域是 $y\in[-1,1]$. 它是偶函数,即 $\cos(-x)=\cos x$; 也是周期函数,周期 $T=2\pi$; 是有界函数, $|\cos x|\leqslant 1$; 当 $x\in((2k-1)\pi,2k\pi)$ 时是单调增加的,而当 $x\in(2k\pi,(2k+1)\pi)$ 时是单调减少的.

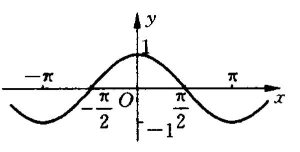

图 1-9

正切函数 $y=\tan x$ 的图形如图 1-10 所示,其定义域是 $x\neq(2k+1)\frac{\pi}{2}$ 的实数;它是奇函数,即 $\tan(-x)=-\tan x$; 也是周期函数,周期 $T=\pi$; 当 $x\in\left((2k-1)\frac{\pi}{2},(2k+1)\frac{\pi}{2}\right)$ 时是单调增加的.

余切函数 $y=\cot x$ 的图形如图 1-11 所示. 其定义域是 $x\neq k\pi$ 的实数;它是奇函数,即 $\cot(-x)=-\cot x$; 也是周期函数,周期 T

$=\pi$；当 $x\in(k\pi,(k+1)\pi)$ 时是单调减少的.

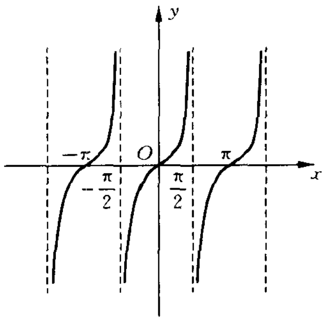

图 1-10

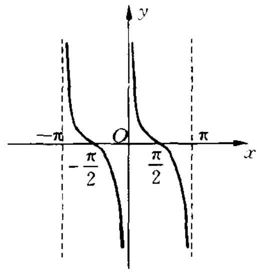

图 1-11

(6) 反三角函数

反三角函数是三角函数的反函数，有反正弦函数 $y=\arcsin x$、反余弦函数 $y=\arccos x$、反正切函数 $y=\arctan x$ 和反余切函数 $y=\mathrm{arccot}\,x$.

反正弦函数 $y=\arcsin x$ 的图形如图 1-12 所示. 其定义域是 $x\in[-1,1]$，主值区间(值域)是 $y\in\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]$，它是单调增加的，是奇函数，即 $\arcsin(-x)=-\arcsin x$.

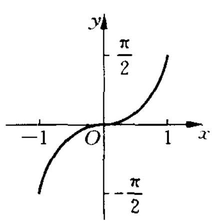

图 1-12

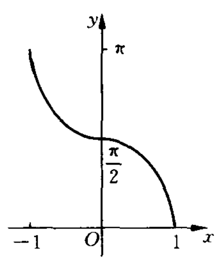

图 1-13

反余弦函数 $y=\arccos x$ 的图形如图 1-13 所示. 其定义域是 $x\in[-1,1]$，主值区间(值域)是 $y\in[0,\pi]$；它是单调减少的，且