

直流磁系统的计算与分析

(模型·算法·程序)

孙雨施 王素菊 著
曲民兴 沈世尧

国防工业出版社

内 容 简 介

本书是一本介绍在直流磁系统计算与分析中,如何应用计算技术和数字计算机的专著。作者分别从磁路计算(书的前半部分)和磁场计算(书的后半部分)两个方面,详尽地讨论了直流磁系统的数学模型和计算方法,并提供了若干个实用的典型计算程序。

本书可供从事电磁元件、电磁装置研究与设计的工程技术人员参考,亦可作为大学相应专业高年级学生和研究生的教学参考书。

直流磁系统的计算与分析

(模型·算法·程序)

孙雨施 王素菊 著

曲民兴 沈世尧

责任编辑 米德友

*

国防工业出版社出版

新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售

国防工业出版社印刷厂印装

*

787×1092 1/16 印张 31 1/4 729千字

1987年1月第一版 1987年1月第一次印刷 印数: 40,001—1,600册

统一书号: 15034·2985 定价: 6.35元

目 录

绪论	1
第一章 磁场与磁路	3
§ 1-1 磁场和磁感应强度	3
§ 1-2 磁通和磁通连续性定律	6
§ 1-3 磁场强度与安培环路定律	7
§ 1-4 物质的磁性	11
§ 1-5 标量磁位	14
§ 1-6 向量磁位和恒定磁场的泊松方程	18
§ 1-7 磁场的图景与磁场分布	23
§ 1-8 介质分界面上的边界条件和镜象法	32
§ 1-9 磁路与磁路定律	36
§ 1-10 磁链和电感	39
§ 1-11 磁场能量	41
§ 1-12 磁场力	46
第二章 气隙磁导计算	52
§ 2-1 概述	52
§ 2-2 解析法计算气隙磁导	53
§ 2-3 分割法计算气隙磁导	54
§ 2-4 夹角顶点与转动轴心不重合的平面磁极间的磁导	59
§ 2-5 圆弧柱面磁极间的磁导	63
§ 2-6 平面与圆弧柱面磁极间的气隙磁导	74
§ 2-7 磁极局部饱和时的磁导	82
§ 2-8 非工作气隙磁导的估计	83
§ 2-9 数值微分法求磁导的导数	85
§ 2-10 气隙磁导计算实例	86
参考文献	114
第三章 静态特性计算	115
§ 3-1 简单磁路计算	115
§ 3-2 复杂磁路计算	121
§ 3-3 永久磁铁磁路计算	124
§ 3-4 简单磁路的数值计算	128
§ 3-5 简单磁路计算的源程序DMSS1	140
§ 3-6 复杂磁路的数值计算	149
§ 3-7 复杂磁路计算的源程序——DMSS2程序	161
§ 3-8 电磁力的计算方法	174
§ 3-9 正交设计原理	181

§ 3-10 正交设计的通用程序 ORME	186
§ 3-11 优化设计实例	190
参考文献	196
第四章 动态特性计算	197
§ 4-1 吸合过程	197
§ 4-2 释放过程	204
§ 4-3 一般电磁机构动态特性计算实例	205
§ 4-4 动态特性计算源程序	217
§ 4-5 有永久磁铁的电磁机构动态特性计算实例	222
参考文献	245
第五章 恒定磁场的边界和模型	246
§ 5-1 恒定磁场的边值问题	246
§ 5-2 标量磁位场的典型边界	248
§ 5-3 向量磁位场的典型边界	256
§ 5-4 束缚电流	257
§ 5-5 假想磁荷	260
§ 5-6 永久磁铁的 $B-H$ 特性	263
§ 5-7 永久磁铁模型	268
§ 5-8 恒定磁场的假想磁荷模型	272
§ 5-9 磁场基本方程的一般形式	286
参考文献	288
第六章 有限差分法	289
§ 6-1 概述	289
§ 6-2 差分离散方法(一)——泰勒(Taylor)级数法	293
§ 6-3 差分离散方法(二)——积分法与变分法	302
§ 6-4 边界处理	307
§ 6-5 关于网格剖分	317
§ 6-6 有限差分法应用实例之一——棒形永久磁铁磁场计算	319
§ 6-7 网格的自动剖分	334
§ 6-8 有限差分法应用实例之二——气隙磁导与电磁吸力计算	342
参考文献	363
第七章 有限元素法	364
§ 7-1 变分原理	365
§ 7-2 磁场能量泛函的一般表达式	370
§ 7-3 二维场的剖分插值	381
§ 7-4 三维场的剖分插值	401
§ 7-5 变分离散	411
§ 7-6 边界条件处理	431
§ 7-7 线性代数方程组的特点	434
§ 7-8 计算平面磁场问题的有限元程序	436
参考文献	450
附录 A 计算方法	452

§ A-1	拉格朗日插值	452
§ A-2	最小二乘法——曲线拟合	454
§ A-3	数值微分	458
§ A-4	数值积分	459
§ A-5	常微分方程的数值解法	463
§ A-6	非线性代数方程的解法	466
附录 B	线性代数方程组的解法	472
§ B-1	高斯消去法与主元消去法	472
§ B-2	矩阵三角分解法	477
§ B-3	迭代法	483
§ B-4	稀疏矩阵技术	486
附录 C	场论计算公式	491

绪 论

在实现农业、工业、国防和科学技术现代化的宏伟目标的事业中，自动控制技术起着十分重要的作用。自动控制系统需要应用许多自动化元件，电磁元件就是其中用量极大的一种。

尽管电磁元件种类繁多，结构形式千变万化，但它们都具有一个必不可少的关键部分，那就是磁系统。所谓磁系统是由载流导体和用以加强磁场并使之集中于某一有限范围内的铁磁质磁导体组成的。电磁元件的性质和特性，主要由磁系统建立的电磁场所决定。因此，不计算磁系统，便无从设计和计算电磁元件。

目前，磁系统的计算方法有两大类，即“路”的计算方法（磁路计算）和“场”的计算方法（磁场计算）。

磁路计算是很早就被广泛应用的磁系统计算方法，在相当长的时期内它可以说是唯一实用的方法。它的依据是磁系统中的磁通绝大部分是沿着以铁磁性材料为主体的“路径”——磁路“流通”；它的理论基础是电磁场理论中的磁通连续性定理和安培环路定律；它的运算公式则是磁路的克希荷夫第一和第二定律。这种计算方法以其形式与电路的解算方法极其相似，故易于理解和掌握，并得以沿用至今。然而，众所周知，对于磁通是无“绝缘体”可言的，所以磁路实际上是一种分布参数性质的“路”，其计算十分复杂。即使把磁路当作集中参数的“路”处理，为了逼近实际磁路，若无计算机的帮助，其计算量也相当大。何况从磁场分布来看，用传统的计算方法很难准确地求得磁路的主要参数——气隙磁导。至于气隙磁导对气隙的导数，其计算准确度还要差些。这些问题在磁系统结构较复杂、气隙较大以及磁路中的铁磁材料较饱和时，尤为突出。

在磁场计算的方法中，诸如直接求解场的基本方程——拉普拉斯方程和泊松方程的方法、镜像法、复变函数法以及其它种种解析方法，其应用甚为局限，基本上不能用于求解边界情况复杂的、三维空间的实际问题。至于图解法则又失之欠准确。因此，磁场计算方法在磁系统设计计算中，实际上长期未能得到采用。

这样，在应用数字计算机于磁系统计算之前，磁系统的设计是处于一种半经验半计算的状况。有时甚至不得不通过反复试验的方式来设计磁系统。

自从出现了高速度、大容量的电子数字计算机以后，数值计算方法得到了迅速的发展，并且被广泛引入工程技术的各个领域，以求解各种形式的复杂问题。这也使电磁元件的设计计算方法大为改观。从磁路计算方面来看，由于计算速度的加快，不仅使得工程设计人员能从繁重的计算工作中解脱出来，而且由于新的计算方法的应用，使计算准确度得以提高。从磁场计算方面来看，由于很多求解偏微分方程的数值方法，诸如有限差分法、有限元素法、积分方程法等等得以运用，使磁场的工程计算问题得到解决，用“场”的方法来设计和计算磁系统已成为现实可行的事情，这使电磁元件的设计、计算焕然一新。

本书以总结作者的科研成果为基础，力图全面地介绍近年来在这个领域的最新成就。

为便于阅读和参考起见，在本书第一章中扼要地阐述了关于磁场与磁路的基本概念和定律，特别是对磁场图景和磁场分布作了比较详细的介绍。另外，以附录的形式介绍了向量分析、计算方法和线性代数方程组求解方法的要点。

磁导及其对气隙的导数乃是用磁路方法设计与计算磁系统的基础。第二章在分析讨论常用的磁导计算方法即解析法和分割法的基础上，推导出若干种典型磁极的磁导计算公式，介绍了在数字计算机上综合应用这两种方法的技巧和几种计算程序。另外，对非工作气隙磁导和磁极局部饱和时的气隙磁导亦作了初步分析。

在第三、四两章，详细介绍了几种典型的计算磁路的方法以及在磁路计算的基础上计算磁系统静、动特性的方法，并提供了两类磁系统的全套计算程序及其说明。为配合磁系统的优化设计，还介绍了一个正交设计程序，供选择参数时使用。

在第五章里着重讨论恒定磁场的数学模型。首先以丰富的实例，讨论如何确定实际磁系统的求解区域与边界条件，然后，针对简化三维磁场计算的需要，提出了永久磁铁的计算模型以及用标量磁位表达的计算恒定磁场的假想磁荷模型。

第六、七两章着重讨论磁场的计算方法，介绍了目前应用最广泛的两种方法——有限差分法与有限元素法，同时还提供了几个计算程序。

本书介绍的程序，基本上都是作者自己编写的或者是在作者指导下编写的。经过几年的反复使用和验证，业已充分证明它们是正确的和实用的。

本书虽然仅限于讨论直流磁系统的计算与分析，但导出的公式、得到的结论以及编制的程序，略加修改后对于工频交流磁系统也可应用。

第一章 磁场与磁路

内 容 提 要

本章首先介绍磁场的基本物理量及其意义,并导出磁场的基本方程——磁通连续性定理和安培环路定律的数学表达式。然后从微分形式的磁场基本方程引出标量磁位和向量磁位的概念,以及这两种磁位必须满足的微分方程。对恒定磁场的图景作了较详细的分析,并讨论了磁场的边界条件。在上述理论的基础上讨论了磁路和磁路的基本定律。最后,介绍了磁链、电感和磁场能量的概念,同时重点阐述了磁场力的计算方法。

§ 1-1 磁场和磁感应强度

一 磁场的定义

众所周知,两载流导体彼此间有电磁力作用着。这种力取决于导体的几何参数、电流的大小和方向以及导体周围介质的性质。

从本质上来说,载流导体间的相互作用乃是运动电荷(电流)之间的相互作用。它与静电力相同之处是它们都需要通过一种特殊形式的物质——场表现出来;它与静电力相异之处则是静电力只决定于相互作用的静止电荷的电量以及它们之间的距离,而运动电荷间的这种电磁力除上述因素外,还与其运动速度的大小和方向有关。

我们将存在电磁力作用的空间称为磁场,并且根据运动电荷所受电磁力的特征(其数值、方向、分布规律以及随时间变化规律等等)确定磁场的性质。这样,两载流导体之间的相互作用,可视为第一个导体中电流建立的磁场对第二个导体中电流的作用,和第二个导体中电流建立的磁场对第一个导体中电流的作用。

于是,我们可以将磁场定义如下:磁场是存在于一定空间内的特殊形态的物质,它由电流所建立,并使置于其中的载流导体受到电磁力的作用。静止导体中的恒定电流所产生的磁场,称为恒定磁场或静磁场。永久磁铁产生的磁场,可以理解为是由永久磁铁中的分子电流所建立,因而它也属于恒定磁场。

二 磁场对电流的作用

设有一个电量为 q 的带电粒子以速度 $\mathbf{v}$ 在磁场中运动,实验证明磁场对该粒子的作用力(即所谓洛伦兹力)为

$$d\mathbf{F} = q(\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \quad (1-1-1)$$

式中 $\mathbf{B}$ ——表征磁场性质的向量,称为磁感应强度。在SI单位制中, $\mathbf{B}$ 的单位是韦伯/米²(Wb/m²),并且称为特斯拉(T)。目前我国电机电器行业广泛应用一种混合单位制。在这种单位制中, q 的单位为库仑(C)、 $\mathbf{v}$ 的单位为厘米/秒(cm/s),力的单位为千克力(kgf), $\mathbf{B}$ 的单位为高斯(Gs)。特斯拉与高斯的换算关系为

$$1\text{T} = 10^4\text{Gs}$$

洛伦兹力的方向与 $\mathbf{v}$ 、 $\mathbf{B}$ 的方向之间的关系见图1.1(a)。

磁场对载有电流 I 的一小段导体 dl 、即对电流元 $I dl$ 的作用力为

$$dF = I(dl \times B) \quad (1-1-2)$$

因为

$$I dl = (dq/dt) dl = dq(dl/dt) = dqv$$

式中长度元 dl 的方向是沿电流的正方向。

说明磁场对电流的力的作用的公式 (1-1-2) 称为安培公式。

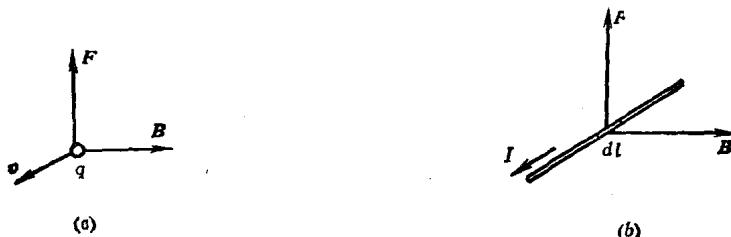


图1-1 磁场对运动电荷和电流的作用

磁场力的方向与 dl 、 B 的方向之间的关系见图1-1(b)。

由式 (1-1-1) 和式 (1-1-2) 以及图 1-1 可以清楚地看到, 磁场作用于运动电荷(电流)的力与电荷的电量、运动速度(电流的大小、方向和长度元的大小)以及表征磁场性质的磁感应强度等有关, 这个力既与电荷的运动速度(或电流元)垂直, 也与磁感应强度向量垂直。因此, 当 v (或 dl) 与 B 平行时, 电荷(或电流元)不会受到磁场力的作用; 当 v (或 dl) 与 B 垂直时, 磁场力为最大。

显然, 磁场对整根载流导体的作用力应为

$$F = \int dF = I \int dl \times B \quad (1-1-3)$$

值得注意的是: 磁场对电流的作用与磁场的产生原因无关, 不论磁场是电路中的宏观电流所产生, 还是电真空器件中的电子流所产生, 效果完全一样。

三 磁感应强度和磁感应线

表征磁场力的性质的磁感应强度向量, 是在下述条件下确定的: 将一个与磁感应 B 垂直的电流元 $I dl$ 引入磁场, 且令 $I dl$ 的数值极小, 以致使它的引入不会造成原磁场的畸变。这样, B 的量值便可由下式确定:

$$B = \lim_{I dl \rightarrow 0} \frac{F}{I dl} \quad (1-1-4)$$

故可认为: 磁感应强度的数值等于磁场作用于载有单位电流的单位长度导体上的、最大的可能的磁场力, 其方向由式 (1-1-3) 确定。

整个磁场可以用场域内各点的磁感应强度 B 来描述。一般说来, 各点的 B 具有不同的量值和方向, 也就是说 B 为空间坐标函数。在直角坐标系中,

$$\begin{aligned} B = B(x, y, z) &= B_x(x, y, z)e_x \\ &+ B_y(x, y, z)e_y + B_z(x, y, z)e_z \end{aligned} \quad (1-1-5)$$

空间内各点的向量 B 的总体称为向量场 B 。

为了形象地表示磁场, 人们引入了所谓磁感应线(磁通线)。它是描绘磁场的一族

曲线, 其上每一点的切线方向就代表该点的 B 向量的方向。当然, 还可以通过磁感应线的疏密来表示 B 的强弱。

我们还可以借助于磁感应线的形变这种概念来说明磁场对电流的作用。例如在图1-2中, 图1-2(a)是未引入载流导线时均匀外磁场的磁感应线; 图1-2(b)是载流导体单独存在时所产生的磁场的磁感应线; 图1-2(c)是均匀外磁场中引入载流导线后的合成磁场的磁感应线。由图可见, 在导线左侧两种磁场反向, 合成场的磁感应线变稀疏了, 在导线右侧, 两种磁场同向, 合成磁场的磁感应线变得更浓密了。因此, 力图伸直的磁感应线便产生使导线由右向左运动的压力, 这就是磁场对电流的作用力。

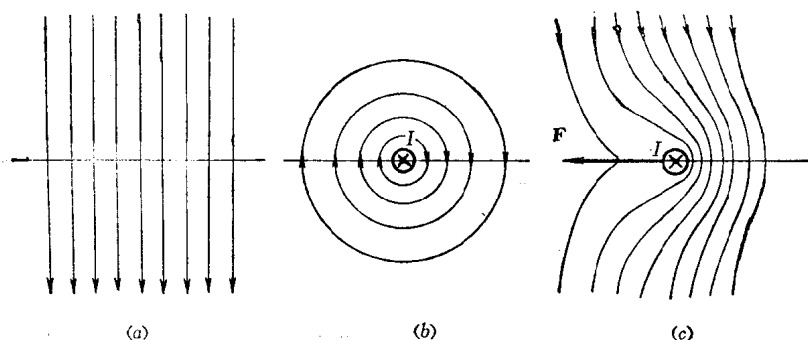


图1-2 以磁感应线来说明磁场对电流的作用

四 毕奥-萨伐尔定律

这是法国物理学家毕奥和萨伐尔在多次试验的基础上总结出来的一个磁场定律: 在无限大的均匀介质中, 电流元 Idl 在距其为 r 的一点 P 处所产生磁感应强度的向量, 是与电流 I 成正比, 与距离 r 的平方成反比, 并且与向量积 $[dl \times r^0]$ 的模成正比, 其方向则按右手螺旋法则而为 $[dl \times r^0]$ 所决定。此定律的数学形式为

$$dB = \frac{\mu I}{4\pi} \frac{[dl \times r^0]}{r^2} \quad (1-1-6)$$

式中 r^0 ——由电流元引至 P 点的单位距离向径 (图1-3); μ ——介质的磁导率。在SI单位制中, μ 的单位是亨利/米 (H/m), 真空的磁导率为 $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}$ (H/m)。工程上常用磁介质的磁导率与真空磁导率之比 $\mu_r = \mu/\mu_0$ 来说明介质的磁性质, 并称之为相对磁导率。在混合单位制中, μ 的单位为高斯·厘米/安, 而且 $\mu_0 = 0.4\pi$ (G·cm/A)。

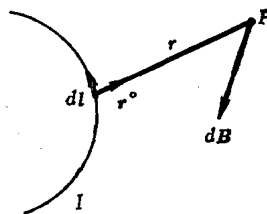


图1-3 电流元产生的磁场

如果无限大的均匀介质为线性, 即 $\mu = \text{const}$, 则整个载流回路在 P 点产生的磁感应强度为

$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_l \frac{[dl \times r^0]}{r^2} \quad (1-1-7)$$

计算分布电流的磁场时, 不能直接应用毕奥-萨伐尔定律。这时, 应从分布电流场中取一单元电流管 (图1-4), 将它分为若干小段。自电流管上取一小段 dl , 令电流管的截面

积为 dS ，则该小段体积为

$$dV = dS \cdot dl$$

通过该小段的电流

$$dI = \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} = J dS$$

由于面积元 dS 、长度元 dl 和电流密度向量 $\mathbf{J}$ 三者方向一致，故这一段电流管对场点 P 处的磁感应强度的贡献为

$$d\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{[\mathbf{J} \times \mathbf{r}^0]}{r^2} dV \quad (1-1-8)$$

全部电流在该点产生的磁感应强度为

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_V \frac{[\mathbf{J} \times \mathbf{r}^0]}{r^2} dV \quad (1-1-9)$$

必须注意，运用公式 (1-1-9) 时，应对电流占有的全部体积 V 进行积分。

须知，在式 (1-1-7) 和式 (1-1-9) 的推演过程中，均先设 $\mu = \text{const}$ ，而后应用叠加原理。因此，它们只适用于均匀介质空间[●]。换言之，即毕奥-萨伐尔定律的应用是有其局限性的。

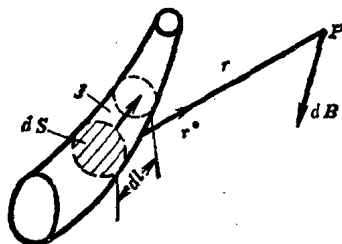


图1-4 电流管产生的磁场

§ 1-2 磁通和磁通连续性定律

一 磁通

我们将向量函数与其所在面积元的标量积定义为向量函数的通量。据此，磁感应强度向量 $\mathbf{B}$ 通过磁场中某个面 S 的通量

$$\Phi = \iint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} \quad (1-2-1)$$

就被定义为磁通量，简称磁通。在 SI 单位制中， Φ 的单位为伏特·秒，称为韦伯 (Wb)，在混合单位制中， Φ 的单位为麦克斯韦 (Mx)，它们之间的关系为

$$1\text{Wb} = 10^8\text{Mx}$$

如果在图 1-5 所示曲面 S 上任取一面积元 dS ，以该处的外法线 $\mathbf{n}$ 的方向为 $d\mathbf{S}$ 的方向，则当磁感应强度为 $\mathbf{B}$ 时，穿过面积元 dS 的磁通为

$$d\Phi = \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = B dS \cos \theta \quad (1-2-2)$$

虽然磁通是标量，但我们给它规定一个正方向。例如，可以规定从曲面 S 的某一侧穿到另一侧（比方说从图 1-5 所示曲面 S 的下侧穿到上侧）的磁通为正值。如果磁通得负值，就意味着其实际方向与标示的正方向相反。

当 $\mathbf{B}$ 与 $d\mathbf{S}$ 方向重合时，则

$$d\Phi = \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = B dS$$

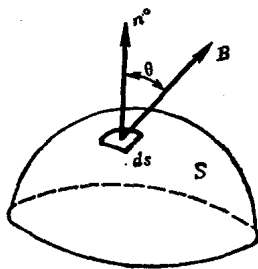


图1-5 穿过面积元 dS 的磁通

● 若在此两式中考虑磁介质中的分子电流（详见 § 1-3 和 § 1-4），那么原则上讲，它们可以适用于一切磁介质。

因此有

$$B = \frac{d\phi}{dS} \quad (1-2-3)$$

这就是说, 我们可以将磁感应强度看成磁通密度。显然, 磁通量与磁感应线的数量可以等同起来。这样, 就完全可以利用磁感应线来形象地表示磁场了。

通常, B 并不与 dS 重合, 此时式 (1-2-3) 应改写为

$$B_n = \frac{d\phi}{dS} \quad (1-2-3a)$$

式中 B_n ——磁感应强度的法向分量。

二 磁通连续性定律

试验表明, 穿入某一体积的磁通恒等于自同一体积穿出的磁通。换言之, 即穿过任意封闭曲面的磁通的代数和恒等于零:

$$\oiint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0 \quad (1-2-4)$$

这就是磁通连续性定律。由于式 (1-2-4) 在形式上酷似电路的克希荷夫第一定律, 故它又称为磁路的克希荷夫第一定律。

顺便指出, 磁通连续性定律亦可由毕奥-萨伐尔定律来证明。

三 恒定磁场是无源场

式 (1-2-4) 是积分形式的磁通连续性定律。若将此式的两边同除以封闭曲面为边界的体积, 并在令该体积趋近于零的条件下求极限, 即得

$$\lim_{V \rightarrow 0} \frac{\oiint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}}{V} = 0$$

上式的左端部分称为 $\mathbf{B}$ 的散度, 即 $\text{div} \mathbf{B}$, 故有

$$\text{div} \mathbf{B} = 0 \quad (1-2-5)$$

是即微分形式的磁通连续性定律, 它说明了向量场 $\mathbf{B}$ 在磁场中每一点的连续性。公式 (1-2-5) 的物理意义是: 就磁场中的任意一点而论, 磁感应强度是连续的, 它既无源, 也无汇。换句话说, 即磁感应线乃是自身闭合的曲线。

由于式 (1-2-5) 说明了“磁场是无源场”这一重要性质, 所以被称为磁场的 一个基本定律。

在直角坐标系中, 式 (1-2-5) 的展开式为

$$\text{div} \mathbf{B} = \frac{\partial}{\partial x} B_x + \frac{\partial}{\partial y} B_y + \frac{\partial}{\partial z} B_z \quad (1-2-6)$$

它在圆柱坐标系中的展开式为

$$\text{div} \mathbf{B} = \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} (R B_R) + \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial \theta} B_\theta + \frac{\partial B_z}{\partial z} \quad (1-2-7)$$

§ 1-3 磁场强度与安培环路定律

一 物质的磁化和磁化强度

任何物质都可以看作充满分子电流的空间。这些分子电流同样能产生磁场, 只是它

们的取向杂乱无章，所以就整体而论，一般物质并不呈现磁性。

若将物质置于载流导体产生的外磁场中，其中的分子电流在外磁场的作用下会转动，使它们产生的磁场尽可能地与外磁场方向一致^①。这时，物质便处于能呈现磁性的“磁化状态”。

这样，当介质中存在载流回路时，其中的磁场就可看成为两个组成部分的总体：一是载流回路本身的宏观电流产生于真空中的磁场；另一是介质中的分子电流在外磁场作用下产生于真空中的磁场。

若用 S 表示分子电流 I 的回路内以回路为边界的面积，则 I 与 S 的乘积称为分子电流的磁矩，即

$$m = IS \quad (1-3-1)$$

式中 S 的方向与分子电流 I 的方向成右手螺旋关系（参见图1-6）。于是，外磁场对分子电流的作用就可借力矩表示如下：

$$M_F = m \times B \quad (1-3-2)$$

式中 B ——外磁场的磁感应强度。显然，只有 m 与 B 的方向相重时，分子电流方能处于稳定平衡状态。

为了说明物质磁化的程度，要引入一个新的物理量，即磁化强度向量。它被定义为单位体积物质内的分子电流所产生总磁矩的极限。

$$M = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\sum m}{\Delta V} \quad (1-3-3)$$

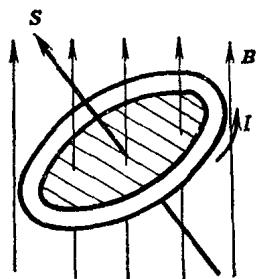


图1-6 磁场对分子电流的作用

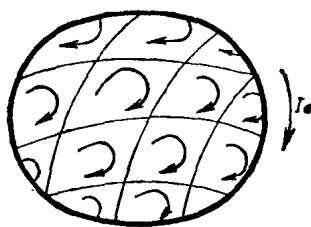


图1-7 表面电流

据此，若已知介质内某点的磁化强度 M ，就能求出该点所在体积元 ΔV 中的总磁矩

$$\sum m \approx M \Delta V \quad (1-3-4)$$

当 $\Delta V \rightarrow 0$ 时，上式化为

$$\sum m = M dV \quad (1-3-5)$$

在介质已均匀磁化之后，其所有分子电流可视为具有相同的取向（图1-7）。由图可见，两相邻部分分子电流的方向恰恰相反，可以互相抵消，所以只有介质表面才有电流。这种表面电流称为磁化电流，以符号 I_s 表示。

设物质的每单位体积内含有 n 个分子电流，它们又各产生磁矩 $m = IdS$ ，则在截面

● 这里讨论的不包括反磁性物质，详见 §1-4 之二。

积为 dS 、长度为 dl 、轴线与 M 的方向重合的一小段圆柱体内（图1-8），围绕着轴线的磁化电流应为

$$\begin{aligned} dI_e &= n(dS \cdot dl) I = nI dS \cdot dl \\ &= nm \cdot dl = M \cdot dl = M dl \end{aligned}$$

因而有

$$|M| = \frac{dI_e}{dl} \quad (1-3-6)$$

二 安培环路定律的积分形式

关于磁场及其场源——电流之间关系的试验定律，除毕奥-萨伐尔定律外，还有安培环路定律。它的内容如下：在各向同性的均匀线性介质空间内，磁感应强度 B 沿任意闭合回路的线积分，等于穿过该回路所界定面积的电流的代数和与介质磁导率之积，即

$$\oint_l B \cdot dl = \mu \Sigma I \quad (1-3-7)$$

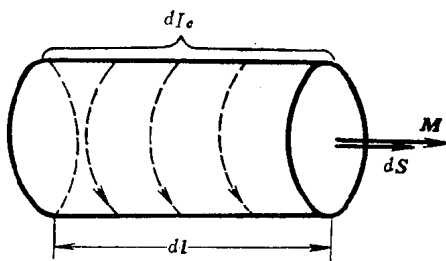


图1-8 磁化电流与磁化强度

显然，当磁场对称分布时，应用安培环路定律计算磁场要比应用毕奥-萨伐尔定律方便得多。

三 磁场强度

如果将介质中的磁场视为宏观电流与分子电流二者各自产生的磁场的总体，则式(1-3-7)可改写为

$$\oint_l B \cdot dl = \mu_0 (\Sigma I + I_e) = \mu_0 \left(\Sigma I + \oint_l M \cdot dl \right)$$

或者

$$\oint_l \left(\frac{B}{\mu_0} - M \right) \cdot dl = \Sigma I$$

令

$$\frac{B}{\mu_0} - M = H \quad (1-3-8)$$

则有

$$\oint_l H \cdot dl = \Sigma I \quad (1-3-9)$$

向量 H 称为磁场强度，它和向量 B 一样，是表征磁场性质的基本物理量。在SI单位制中， H 的单位是安/米(A/m)，在混合单位制中， H 的单位则是安/厘米(A/cm)。

公式(1-3-9)称为推广形式的安培环路定律。理论和实验均可证明，式(1-3-9)不仅适用于均匀介质，也适用于非均匀介质。同时，由此公式还可看出：在讨论介质中的磁场时，应用 H 向量要比应用 B 向量更为方便。因为 H 的闭合回路线积分只和宏观电流有关，而不涉及到磁化电流。当然从这里绝不应引出 H 的分布与介质无关的结论。

安培环路定律及其推广形式，是关于磁场的又一个重要定律，它是磁路的克希荷夫第二定律的基础。

四 安培环路定律的微分形式

为便于理解安培环路定律的物理意义, 我们根据磁感应线连续的概念, 在磁场中沿磁感应线划分出若干个管子, 使每个管子的横截面都穿过等量的磁通 $\Delta\phi$, 而管子的侧壁则无磁通穿过。这样的管子就称为磁通管 (图1-9)。沿磁通管内的路径取 H 向量的线积分, 由于积分路径上各点的 H 方向都与路径一致, 积分值不会等于零, 故由安培环路定律可知, 磁通管必定包围着电流。反之, 由于电流线也连续, 所以电流也必定包围着磁通。总之, 磁通必链电流, 电流也必链磁通, 它们的正方向遵循右手螺旋关系。对此, 我们也可以说, 磁感应线总是环绕着其激发者——电流而“旋转”着, 犹如水中的旋涡, 而电流正处在旋涡的中心。

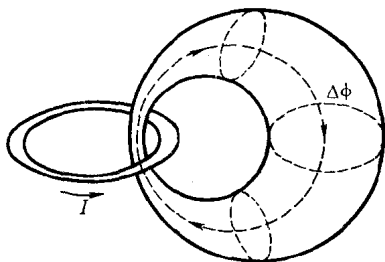


图1-9 磁通与电流的交链

数学上将向量沿闭合回线的线积分称为该向量的环量, 例如, $\oint_l H \cdot dl$ 就是 H 向量的环量, 并记作 C_H 。如果闭合回路围绕着 H 场的激发者——电流, 则 $C_H \neq 0$; 反之, 若未围绕电流, 则 $C_H = 0$ 。

将 H 向量的环量除以闭合回路所界定的面积 ΔS , 并考虑到式 (1-3-9), 即得

$$\lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\oint_l H \cdot dl}{\Delta S} = J_n$$

由于 ΔS 的方向可以任意选择而不致影响上式之成立, 同时又考虑到上式的左端部分为 H 的旋度 (即 $\text{rot}H$) 在 ΔS 法线方向的投影, 故必定有

$$\text{rot}H = J \quad (1-3-10)$$

即安培环路定律的微分形式。它的物理意义是: 磁场中任意一点的磁场强度向量 H 的旋度, 就等于该点的电流密度向量 J 。此公式揭示了“磁场是有旋场”这又一个重要性质, 它也是磁场的基本定律。

微分形式的安培环路定律, 其展开式在直角坐标系中是

$$\text{rot}H = \begin{vmatrix} e_x & e_y & e_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ H_x & H_y & H_z \end{vmatrix} \quad (1-3-11)$$

因此有

$$\left. \begin{aligned} J_x &= \frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} \\ J_y &= \frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x} \\ J_z &= \frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} \end{aligned} \right\} \quad (1-3-12)$$

在圆柱坐标系中

$$\text{rot}H = \frac{1}{R} \begin{vmatrix} e_R & Re_\theta & e_z \\ \frac{\partial}{\partial R} & \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{\partial}{\partial z} \\ H_R & RH_\theta & H_z \end{vmatrix} \quad (1-3-13)$$

因此有

$$\left. \begin{aligned} J_R &= \frac{1}{R} \frac{\partial H_z}{\partial \theta} - \frac{\partial H_\theta}{\partial z} \\ J_\theta &= \frac{\partial H_R}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial R} \\ J_z &= \frac{1}{R} \left[\frac{\partial}{\partial R} (RH_\theta) - \frac{\partial H_R}{\partial \theta} \right] \end{aligned} \right\} \quad (1-3-14)$$

§ 1-4 物质的磁性

一 磁感应强度与磁场强度的关系

比较一下式 (1-3-7) 和 (1-3-9), 容易看出, 磁感应强度和磁场强度之间的关系是

$$B = \mu H \quad (1-4-1)$$

而从式 (1-3-8) 又可得

$$B = \mu_0 (H + M) \quad (1-4-2)$$

在无磁滞现象的线性介质里, 磁化强度是同磁场强度成正比, 即

$$M = kH \quad (1-4-3)$$

式中 k ——磁化系数, 它是一个纯数。将式 (1-4-3) 代入 (1-4-2), 得

$$B = \mu_0 (H + M) = \mu_0 (H + kH) = \mu_0 (1 + k)H$$

令

$$1 + k = \mu_r \quad (1-4-4)$$

并称之为相对磁导率, 则介质的磁导率

$$\mu = \mu_0 \mu_r = \mu_0 (1 + k) \quad (1-4-5)$$

于是有

$$B = \mu H = \mu_0 (1 + k)H$$

若介质为非线性, 则 k 不再是常数, 其值随 $|H|$ 变化。

当介质为各向异性时, M - H 关系式可成

$$M = KH \quad (1-4-6)$$

式中 K ——磁化系数矩阵。它在直角坐标系中可表示为

$$K = \begin{bmatrix} k_x & 0 & 0 \\ 0 & k_y & 0 \\ 0 & 0 & k_z \end{bmatrix} \quad (1-4-7)$$

此时, 式 (1-4-2) 将变成

$$B = \mu_0 (E + K)H \quad (1-4-8)$$

式中 E ——单位阵。

如果令

$$\mu_r = E + K = \begin{bmatrix} 1 + k_x & 0 & 0 \\ 0 & 1 + k_y & 0 \\ 0 & 0 & 1 + k_z \end{bmatrix} \quad (1-4-9)$$

为相对磁导率矩阵, 则 B 与 H 的关系式, 虽然形式仍然和式 (1-4-1) 一样, 但已经应当将它理解为矩阵式, 其中的磁导率矩阵为

$$\mu = \begin{bmatrix} \mu_x & 0 & 0 \\ 0 & \mu_y & 0 \\ 0 & 0 & \mu_z \end{bmatrix} \quad (1-4-10)$$

式中 $\mu_x = \mu_0(1 + k_x)$ 、 $\mu_y = \mu_0(1 + k_y)$ 、 $\mu_z = \mu_0(1 + k_z)$ 。

综上所述, 式 (1-4-1) 只适用于磁滞现象可忽略的介质, 式 (1-4-2) 才是磁感应强度与磁场强度的普遍关系式。这一点将在第五章详细讨论。

二 物质按磁性的分类

一切物质皆可按其磁性的差异分为三类: 顺磁性物质、反磁性物质和铁磁性物质。

顺磁性物质的相对磁导率 $\mu_r > 1$ 。属于这一类的有大多数气体、金属和它们的盐类 (例如: 铝、铂、铁盐、钴盐、镍盐、碱土金属和稀土金属的盐类等)。反磁性物质的 $\mu_r < 1$, 属于这一类的有氢和惰性气体、大多数有机化合物、石墨以及某些金属 (例如: 铋、镓、铟、铜、银、金、汞等)。在工程上, 由于顺磁性物质和反磁性物质的 μ_r 值与 1 的差异是在小数点后的第四位以下, 所以将它们统归为一类——非铁磁性物质, 并且认为它们的磁导率和真空的磁导率一样, 都是 μ_0 。

铁磁性物质的特点之一是其相对磁导率 $\mu_r \gg 1$, 其值甚至可达数十万乃至百万之巨。属于铁磁性物质的有铁、钴、镍和它们的合金, 钆以及铁和镍的某些氧化物, 还有铜、锰和铬的某些合金等。其中用得最多的为铁和它的氧化物以及它的合金。

三 铁磁性材料的磁化曲线

铁磁性材料的相对磁导率 μ_r 不仅数值非常大, 而且还是磁场强度 H 的函数。换言之, 即铁磁性材料的磁感应强度与磁场强度之间, 呈现出规律十分复杂的非线性关系。

若将事先未磁化的铁磁性物质置于外磁场的作用下, 而且使磁场强度 H 自零开始逐渐增大到某一定值, 磁感应强度 B 就将沿曲线 oa 变化 (图 1-10)。这种曲线称为起始磁化曲线。在它的起始阶段, 当 H 增大时, B 增大很缓慢。与此相应, 磁导率 μ 也是个不很大的数值。随后, H 的微小变化, 即能引起 B 的很大变化。这时, μ 迅速增大, 并在某一 H 处达到其最大值。继之, 再增大 H 值, 只能使 B 值略微增大一些, 这就是所谓磁饱和现象。在这一阶段, μ 值骤减, 并在磁饱和以后减小到一甚小的数值。磁导率 μ 随 H 变化的 $\mu(H)$ 曲线亦示于图 1-10。

如果从 a 点开始, 逐渐减小 H , B 并不沿曲线 ao 变化, 而是沿曲线 ab 变化 (图 1-11)。这种磁感应强度的变化落后于磁场强度变化的现象, 为铁磁性材料所独有, 它习惯上被称为磁滞现象。当我们使磁场强度在 H_1 和 $-H_1$ 之间往复变化时, 由于磁滞, 使 B 沿回线 $abcdefa$ 往复变化。这个回线称为磁滞回线。若 H_1 增大, 磁滞回线也随之加大, 如图