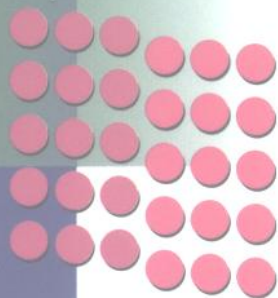


张尧庭 编著

全国文科数学教育研究会推荐教材

指标量化、序化的 理论和方法



科学出版社

指标量化、序化的理论和方法

张尧庭 编著

科学出版社

1999

内 容 简 介

本书是“全国文科数学教育研究会”推荐教材之一。

本书主要介绍事物度量的理论和方法,解答了诸如:重量和温度在度量的关系上有什么不同?什么对象可以量化、序化,什么对象不行?不同的指标如何综合?什么是派生的指标?等问题。这些对理解事物的量与序有很好的作用。本书最后一章,通过各种例子来说明这些结果对解决实际问题的指导意义。

本书大学一二年级文、理科学生均宜阅读,也可供有关科研人员参考。

图书在版编目(CIP)数据

指标量化、序化的理论和方法/张尧庭编著.-北京:科学出版社,1999

ISBN 7-03-007462-9

I. 指… II. 张… III. ①指标-量化-研究②指标-有序化-研究
IV. 0174.12

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (1999) 第 09777 号

科 学 出 版 社 出 版

北京东黄城根北街16号

邮政编码:100717

科 地 亚 印 刷 厂 印 刷

新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售

*

1999年9月第 一 版 开本:850×1168 1/32

1999年9月第一次印刷 印张:5

印数:1—3 000 字数:124 000

定价:10.00 元

(如有印装质量问题,我社负责调换〈新欣〉)

序 言

社会科学的发展历史，在 20 世纪有一个明显的特点，科研人员越来越多地把一些自然科学的研究方法、理论以及一些名词术语引入自己的领域，突出体现在定量化分析、理性思维的决策、计算技术的应用，数学成了不可缺少的工具。这一状况的反映是一些教科书上越来越多地出现数学的内容、符号与公式。

定量分析与定性分析表面上是两个不同的内容，然而仔细了解一下，就知道这是无法分开的。没有专业方面的定性的研究，定量分析就没有对象，对象之间的联系也无从考虑，更谈不上去描述、分析。没有定量分析的依据，定性分析的结论就显得贫乏，并且不易更加深入。很明显，在定量分析之前，必须把所关心的“性质”、“关系”等等的“质”给以量化，而量化绝不是一个简单的打分，量化必须符合所反映的“性质”、“关系”等的特点，否则这种量化，以及定量分析，不仅没有意义，而且会导致不正确的结论，或者没有意义的结论。在如何量化、序化的探索中，已经形成了自己的理论和方法，在国外的高校中，60 年代就已有这类课程，70 年代已有这一类的教材。但是在国内，缺乏一本这样的教材，我写这本书的目的是填补这一空白，希望引起注意，共同来改进这一课程的教与学。

其实在工作和生活中，我们经常会面临这一类问题，但是由于不去注意，又没有接触过这方面的教材，往往凭借经验来处理。如果知道了这些基本知识，对事情的看法就不同了，就不会简单地盲从一种方法，而会深入思考，寻求比较合理的方法。从这一点来说，对于一般的读者，也是有帮助的，是提高人们自身对知识了解的一种素养。

由于本书的对象非常广泛，因此也就必然很抽象，而且所用

的公理化方法，对多数人不习惯的。我本想直接翻译一本教材，一是感到篇幅太大，学生接受不了；二是写的方式过于数学化、形式化，不易接受。所以想自己编写一本在这两方面都有一些改进的、适合国内需要的教材。然而写好之后，我自己感到上述二个缺点依然存在，我期待着有更好的这一类的教材出版。

诺贝尔经济奖得主、英国的经济学家理查德·斯通，多年前专门写了一篇文章《社会科学中的数学》，详细地论述了社会科学中几个重要领域，如何用数学方法去描述和反映现实，如何去分析处理问题，对我国目前的状况非常合适。这也表明认识到数学在社会科学中的作用，在国外也经历了一个相当长的时间，全文很长，我们节录了其中一部分，作为书的绪论，以飨读者。

我十分感谢科学出版社的林鹏、毕颖同志，没有他们的热情支持，仔细阅读，提出意见，几次改写，本书是不可能以现在的面貌出现的。因为这书本身就是探索性的，尽管改了几次，还是感到不满意，只能希望大家多提意见，将来有机会重印时改得更好一些。

本书的写作得到上海财经大学 211 工程教改科研项目的资助。

张尧庭
1999 年 1 月

绪论 社会科学中的数学

现在，在社会科学中使用数学已被广泛接受了，只有少数顽固抵制的领域是除外的。原因不能从任何高深哲学的论战中去寻找，而是从许多简单的事实中就可明白。首先是社会科学的许多分支明显地在定量化，甚至可以说是被迫地定量化，人口统计学和经济学是这方面明显的例子。其次，社会科学的主题，关于复杂系统的理论是用文字表达的，而它们的分析与比较用数学形式来表示会有很大的帮助。第三，除非这些理论关系可以定量化，否则它们的应用就只能依然是很一般化的。第四，对于一些主题中比较模糊、甚至很难得到确切信息的概念，数学可以提供一种领会的手段。最后，社会科学关注的不只是描述发生了什么，它们之间是如何联系的，还在于隐藏在背后的有效、还是无效的决策。在很大程度上，这些决策过程可以数学地表述和分析，使得我们的决策可以较多地依赖于知识，较少地依赖于推测。

已经证实，一些到目前还未见诸文字的想法，用数学概念来表达的可能性是行的，这就极大地克服了用数学的抵触情绪，越来越多的学者在他们研究的社会科学分支中体现出应用数学方法的价值。就现在情况而言，成功的进展是不平衡的，还未达到人们预期那样的一致。然而数学的运用是普遍开展了，我们可以看到，许多不同领域的研究在下一代会积聚在一起，而现在还各自保持着差别并担心的专业。

大约 75 年以前，当伟大的美国经济学家欧文·费希尔撰写他的博士论文时，他认为那时在全世界大约只有 50 本关于数量经济的书和一些论文，称得上是名符其实的。现在的情况完全不同了：不仅在经济学中，而且在所有社会科学中，数学书籍和论文每年要数以千计地出现。

在社会科学中，特别是涉及实证分析的，要大量采用有限数学的方法，尤其是矩阵、矩阵代数与差分方程，因为这些明显地与大部分实证研究基础的离散观测资料相吻合。但这并不表示传统的工具如微积分，特别是微分方程就没有用处了，在一些纯理论的分析中是会涉及的。

对于这个大而复杂问题，最好的处理是先把确定性条件下的决策与不确定性条件下的决策区分开，然后在这两个主类之内，把单个阶段的决策与多个阶段的决策分开。在这一节我们将论述一些对决策者有用的技术，是在规划论、博弈论、统计决策论等等不同的领域之内。这就再一次发现许多新的方法在很大程度上是使用有限数学的，虽然这许多决策问题，至少在理论上，正如我们将会看到的那样，这与用过去的待定乘子法和变分法来解决的问题是属于同一类型的。

(1) 在确定条件下的单阶段决策。开始的一个好的例子就是消费者行为的理论，它是在 19 世纪末发展起来的。根据这个理论，消费者有一个明确的偏好系统，他从所购买的商品中得到的效用(或满足)是依赖于各种商品和各种服务的数量。他有一笔固定的钱，是他的收入，可供他花费，面对的是一组固定的各种价格。他的目标是在收入和价格体系的约束条件下，使效用达到最大值。

这是一个在约束条件下求极大值的问题，可以用待定乘子法来解，并有一个几何的解释。

然而还需细加说明：偏好是会系统地改变的。人们要花费时间来适应正在改变的环境。人们也受到别人做了些什么的影响。一种特别要注意的适应的方式是与新商品的介入相连的。对新商品的反应包含着一个适应的过程，在许多方面与时尚流行相似。接受的速度部分依赖于已拥有新商品的人数，部分依赖于还未拥有的人数。这个适应的过程能用一个正向偏态的曲线，如对数正态积分，来很好近似地描述。

常常会遇到一个决策问题，虽然与刚才提到的多少有些类

似，但用经典方法是没有解的，因为求极大值(或极小值)的函数是线性的。这方面的一个例子是费用最小的食谱问题，求解必须用线性规则的现代方法。这个问题可叙述如下。一个合适的食谱是按营养成分的最低含量来确定的，营养成分有：热量、蛋白质、维生素等等。含有这些营养成分的各种食品都是可用的，它们的含量和价格都是已知的、固定的。问题是：每种食品应该买多少既能达到营养的要求又使花费最少。这等于说：将这些食品的未知的购买量乘以他们的价格求和后达到最小，还需受一些不等式的限制。这些不等式中首先是所买的量要提供足够的每种营养成分，其次购买食品的量不能是负的。

(2) 在确定条件下的多阶段决策。采取决策时，常会要考虑某一变量能有一个所要的随时间变化的路径该怎么办。这种情况要极大化(或极小化)的不是一个函数而是泛函。用于这种目的的经典方法是变分法。例如，让我们问这样的问题：一个社会最佳的储蓄是多少？若一个社会储蓄很少，相应的用于消费的就多些。于是短期内，可享受一种相对较高的生活水平；但长期看，资本设备增加很少，不能指望生活水平会有多大提高。因此我们必须问另一个问题：这个社会为了将来能得到更多，现在应该放弃多少？并且我们必须想到这个问题将持续到难以确定多长的未来。

(3) 不确定条件下的决策。

让我们考虑以下几点：首先，所谓不确定是由于不可控的事件引起的；其次，不确定是由于在冲突情况下别人的行为引起的；第三是已讨论过的方法的确定性条件被不确定的所代替。

与前面的例子相比，不确定性的作用是把一个假设已知的量代之以一个量的分布，现在我们的问题是找出分布的特性并判断它应如何影响我们的决策。这类问题将我们引入概率和统计的领域。

还应考虑决策的另一方面，避免一项大的损失比获得一项大的收益，个人可能会更在意些。于是在某些商业，他愿意承担额

外的费用来保持商品的库存，为了不让顾客等待，这并不是眼前的收益就能相抵，而是不想交货期弄得较长，最终会失去顾客。换句话说，正如决策者想对客观的概率有一个准确的估计一样，他也要对与他有关的主观评价有一个准确的估计。这就引向这一节的第二个内容，从冲突和联合中产生了不确定性。这个内容是另一种新的方法，博弈论的主题。

在一场博弈中，局中人不能确切地知道别的局中人将怎么办，而他的行动却依赖于他期望别人的反应而定的。至少在简单的情况下，我们可以制订出局中人可用的纯策略，并能给出任何特定的策略组合的结果如何。

虽然我们的特定模型是从社会生活中经济方面开始的，它有一种不可逆转的趋势蔓延开来。例如，在讨论生产商品和提供劳务中劳力、资本和创造性的作用时，就需要考虑另一方面，不同的技能，这将我们引向学习这些技能的教育和培训的系统。再一方面，研究和创新把我们引向社会心理学，最终我们将不得不面对社会——经济系统的全面分析。

目 录

序言

绪论 社会科学中的数学

第一章 实数的结构	(1)
§ 1. 引言	(1)
§ 2. 集合、数集	(2)
§ 3. 关系	(6)
§ 4. 关系的特性	(14)
§ 5. 序结构与实数	(22)
§ 6. 集合的运算	(29)
第二章 指标与度量	(34)
§ 1. 引言	(34)
§ 2. 等价关系与分类	(36)
§ 3. 函数与运算	(45)
§ 4. 度量的基本问题	(55)
§ 5. 幂律	(57)
§ 6. 指标的合理性	(60)
第三章 表示定理	(65)
§ 1. 基础指标与派生指标	(65)
§ 2. 同态与同构	(67)
§ 3. 指标的可选性与正规性	(71)
§ 4. 表示定理 (一)	(77)
§ 5. 表示定理 (二)	(82)
§ 6. 表示定理 (三)	(88)
§ 7. 乘积空间与可加性	(93)
§ 8. 乘积空间与可分解性及其他	(98)
第四章 应用	(103)
§ 1. 引言	(103)

§ 2. 指标综合	(105)
§ 3. 效用函数的作用	(116)
§ 4. 效用函数的存在性定理	(125)
§ 5. 主观概率 (信念)	(132)
附录	(141)
参考文献	(145)
名词索引	(146)

第一章 实数的结构

§1. 引言

要对研究的对象给以一种度量，从数学上看，就是以对象为自变量，给出一个函数，函数的数值就是给对象赋以的度量。当然所赋的度量要能反映对象的特性，从数学来看，就是要求函数具有某种性质。函数的值是一个实数，因此讨论实数的性质就很重要。

从度量的角度来考虑问题，首先是所研究的对象能赋以什么样的度量。比如重量、长度等能给出具体的数值，而且数值的大小就反映了对对象的量级；有的就不是这样，比如品尝酒的好坏，只能分出次序，这是第一，这是第二，等等，没有办法说第一比第二好多少，这种度量和重量、长度，就很不一样。什么样的对象，所讨论性质是像长度、重量这样的？什么样的对象，所讨论的性质是像品酒那样的？这正是度量理论所关心讨论的问题。

对有些度量如重量、温度等，它们的取值是可以充满一个区间，是连续性的指标，然而从度量的理论来看，重量和温度还是很不同的，两个 5 公斤重的物体放在一起就有 10 公斤重，而两个 10°C 的物体放在一起还是 10°C ，为什么这两种度量有这样的差别，这也是度量理论应该解决的。

当我们对一个对象给出评价时，如一些比赛，要通过打分评优劣，排名次，实际上打分就是一种度量。对企业考核它的好坏时，也要打分，这也是一种度量。然而考核一个企业往往有许多指标，这些指标能否综合成一个？怎样综合才是恰当的？这些都是实际管理部门经常会遇到的问题。其实不同类型的指标综合的规则自然是不同的，只有对度量理论有了一定了解之后，才能处

理好综合的问题。很明显，综合指标本身就是对一组指标给出一个新的度量，它能很好地反映被综合指标的性质。

为了能把度量理论叙述清楚，数学中常用的一些基本概念，如同态、同构等必须要能理解和运用。所以我们先不讨论一般的对象，而是先讨论具体的数——全体实数。对实数的各种性质，从不同的角度给以描述，使得将来用实数去反映、度量抽象的对象时，就能更熟练地予以运用。

§ 2. 集合、数集

在今后的讨论中，最基本的概念就是集合。集合就是把一些具有某一性质的对象放在一起。有两种办法描述一个集合：

(一) 说清集合中成员的性质。

$$\{x \mid x \text{ 是偶数}\}$$

$$\{x \mid x \text{ 能被 } 2 \text{ 除尽}\}$$

$$\{x \mid x \text{ 是 } 20 \text{ 岁以下的中国男青年}\}$$

集合中的成员我们称为元素，上述集合的元素都用符号 x 表示，“ $\mid$ ”右面就是叙述元素所具有的性质，这是常用的表示一个集合的方法。

(二) 说清集合中全部元素。

$$\{x \mid x = 1, 2, 3, 4\}$$

这就表示集合 $\{1, 2, 3, 4\}$ 。这种表示方法的好处是很具体，但随之也就成了缺点，如考虑不大于 100 的自然数，就需要把 1, 2, 3, … 这 100 个数一一写出，就很费事。有时简直就不可能，如 $[0, 1]$ 区间中的全部实数，这就无法一一列出，只能用元素的性质来表示，如

$$\{x \mid 0 \leq x \leq 1\}$$

这种写法比一一列举要方便，特别在社会科学、工程技术方面，我们研究的对象逐一列举是很困难的，但用性质刻画就很方便，因此我们一定要学会用第一种方式来论述一个集合。例如

$\{x \mid x \text{ 是经营良好的国营企业}\}$

这一内容是清楚的，但要一一列举是麻烦的。如果要对这个集合中的企业给以评价，选出 100 个最佳的，实际上就是要在这个集合上给出一个函数，按函数值的大小来排序，这就是量化；或者对这个集合内的企业排名次，谁第一，谁第二，……这就是序化。无论量化还是序化，都是想反映集合内成员(元素)的性质，这就是本书所讨论的问题。

集合与集合之间会有一种关系称为包含，它的定义是：

定义 2.1 若集合 A 中的元素均为集合 B 的元素，则称 B 包含 A ，或 A 被 B 所包含，用符号 $A \subset B$ 表示。这时也称 A 是 B 的一个子集。

例如 A 是全部自然数， R 是全部实数，由于自然数是实数的一部分，因此 $A \subset R$ 。

又如 R 是全部实数， C 是全部复数，于是 $R \subset C$ 。对 R 可以考虑它的各种各样的子集，例如

$$S = \{A \mid A \text{ 是 } R \text{ 的子集}\} \quad (2.1)$$

S 就是由 R 的一切子集所组成的集合，它的每个元素是 R 的一个子集。我们规定空集被包含在任何一个集合之中，空集用 $\emptyset$ 来表示，因此有

$$\emptyset \subset R$$

它是 R 的一个子集，从 S 的定义(2.1)就知道空集 $\emptyset$ 是 S 的一个元素。

我们用符号 $x \in A$ 表示 A 中的一个元素是 x ，或者说 x 是 A 的一个元素，或称 x 属于 A 。因此属于是元素和集合的关系，而包含是集合与集合的关系，这两者是有区别的。例如“1”是自然数中的一个数，自然数集用 N 表示，于是有

$$1 \in N$$

表示 1 是一个自然数。同样有 $2 \in N$ ， $3 \in N$ ，等等。如果把由“1”这个元素组成的集合 $\{1\}$ 作为考虑的对象，则 $\{1\}$ 是 N 的一个子集(虽然它只有一个元素)，这时 $\{1\}$ 与 N 只能有包含关系，

也即

$$\{1\} \subset N$$

而不能谈属于关系，即不能写成 $\{1\} \in N$ 。我们通常要考虑的数集合，有下列几个，用一些特定的符号来表示它们。

R 就是全部实数组成的集合

Z 就是全部整数组成的集合

N 就是全部自然数组成的集合

即

$$R = \{x \mid x \text{ 是实数}\}$$

$$Z = \{n \mid n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$$

$$N = \{n \mid n = 1, 2, 3, \dots\}$$

自然有关系式

$$N \subset R, Z \subset R, N \subset Z$$

要注意的是，两个集合 A 与 B 可以有包含关系，也可以没有包含关系。例如全部整数组成的集合 Z 与全部正实数组成的集合

$$R_+ = \{x \mid x \text{ 是实数, 且 } x > 0\}$$

就不能谈包含关系，而自然数 N 是被包含在 R_+ 之中的。

在数学上为了讨论方便，当我们只限于考虑一个集合 X 内的元素时， X 就是整个空间， X 的一切子集，包括 $\emptyset$ 和 X 本身，就称为 X 所形成的幂集，有的书上用 2^X 表示，幂集内的元素就是 X 元素形成的种种集合，它们之间可以有包含关系，也可以没有包含关系。

很明显，当 $A \subset B$ 与 $B \subset A$ 同时成立时， A 与 B 就相等。

集合是一个非常重要而基本的概念。当我们讨论一个问题时，论述的对象就形成了一个集合，但是各人所想的集合不一定相同，于是讨论时容易有分歧，到后来才发现彼此说的有相同部分，有不同部分。这用集合的语言来描述就是甲考虑集合 A ，乙考虑集合 B ， A 与 B 的公共部分非空，即

$$A \cap B \neq \emptyset$$

但 A 与 B 不相等.

集合这个概念的一个重要作用是可以把一个动态的对象变成了一个静态的对象,充分发挥了人的抽象能力,比如自然数 $1, 2, 3, \dots$, 这样写下去,是永远写不完的,而且是一个动态的过程,但是我们用 N 表示全体自然数, N 就是一个确定的集合,放在我们面前,它就不是由动态的生成法来描述了. 这种考虑问题的方法是很重要的. 例如一个动物的出生到死亡,经历了很复杂的过程,是一个动态的演化过程,但是我们可以把它的一生作为一个集合放在面前考察、比较,探讨有什么规律. 例如一种商品,从它进入市场,到这种商品在社会上消失,这是一个漫长的过程,例如煤油灯,从进入中国市场,到在市场上消失经历了百年以上的历史. 我们把各种商品这样的经历作为一个集合来研究,就可以考察商品寿命的规律,蜡烛比煤油灯出现早,但它依然在市场上有一席之地,为什么这两者有不同. 也就是说,集合这个概念,使我们有可能从全局来观察研究的对象. 再举一个例子,星球的演化,人们是无法亲眼目睹的,但人们可以设想,全体星球演化形成的集合,从眼前可以观察到的现象去推测演化的历史,提出种种假说. 要是没有这样一个集合的概念,就无法提出这一类问题,更谈不上去研究了.

集合这个概念我们是常常在使用的,但不一定自觉,更不一定重视各种关系和运算,这正是我们这本教材要强调的,自觉地运用这个概念,来描述、反映、分析客观的事物,使我们可以达到一个新的境界.

这一节我们介绍了集合这个概念,集合中的成员称为元素,一个集合 X 的一切子集构成 X 的幂集 2^X , 因此对一个集合 X 而言有三个不同的层次:

X 集本身, X 的元素 x , X 的幂集 2^X

不同层次之间可以问是否有属于关系,同一层次的可以问是否有包含关系,包含关系是用属于关系来描述的.

一般说来,我们考虑的对象、或问题所研究的范围是固定的

集体 X ，所以面对的是 X 的元素 $x, y, z, \dots$ ，用小写字母表示； X 的子集， $A, B, C, \dots$ 用大写字母表示， $\emptyset$ 表空集，它被每个子集所包含； X 的一部分集合构成的集合系，即是 X 的幂集 2^X 的子集，用大写花体字母表示，写成 $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}, \dots$ 等。这样，对于属于关系，可以问 $x \in A$ 是否成立， $A \in \mathcal{B}$ 是否成立；对于包含关系，可以问 $A \subset B$ 是否成立， $\mathcal{B} \subset \mathcal{C}$ 是否成立。 $A \subset B$ 表示 $x \in A$ 时， $x \in B$ 一定成立，所以它是用属于关系描述的； $A \subset B, B \subset A$ 都成立时， A, B 的元素都相同，因而相等。

习 题

1. 什么是集合？举几个集合的例子。
2. $x \in X$ 表示什么？
3. “属于”与“包含”这两者有什么联系？
4. 举一个例，两个集合 A 与 B 无包含关系，但又有公共部分。
5. 用两种方法来描述集合，各自的利弊何在？
6. 回忆这一节的主要概念

集合与元素

属于与包含

集合与集合系

7. 什么是 X 的幂集？ $\{1, 2\}$ 的幂集是什么？

§ 3. 关 系

量化或序化是研究对象之间存在的一种关系的反映，或者说用数值或次序来刻画这种关系。因此度量理论——指标量化、序化的理论——的基础是研究对象之间关系。应先把关系给以恰当的分类，然后对不同的关系来考虑能否量化或序化，所以关系