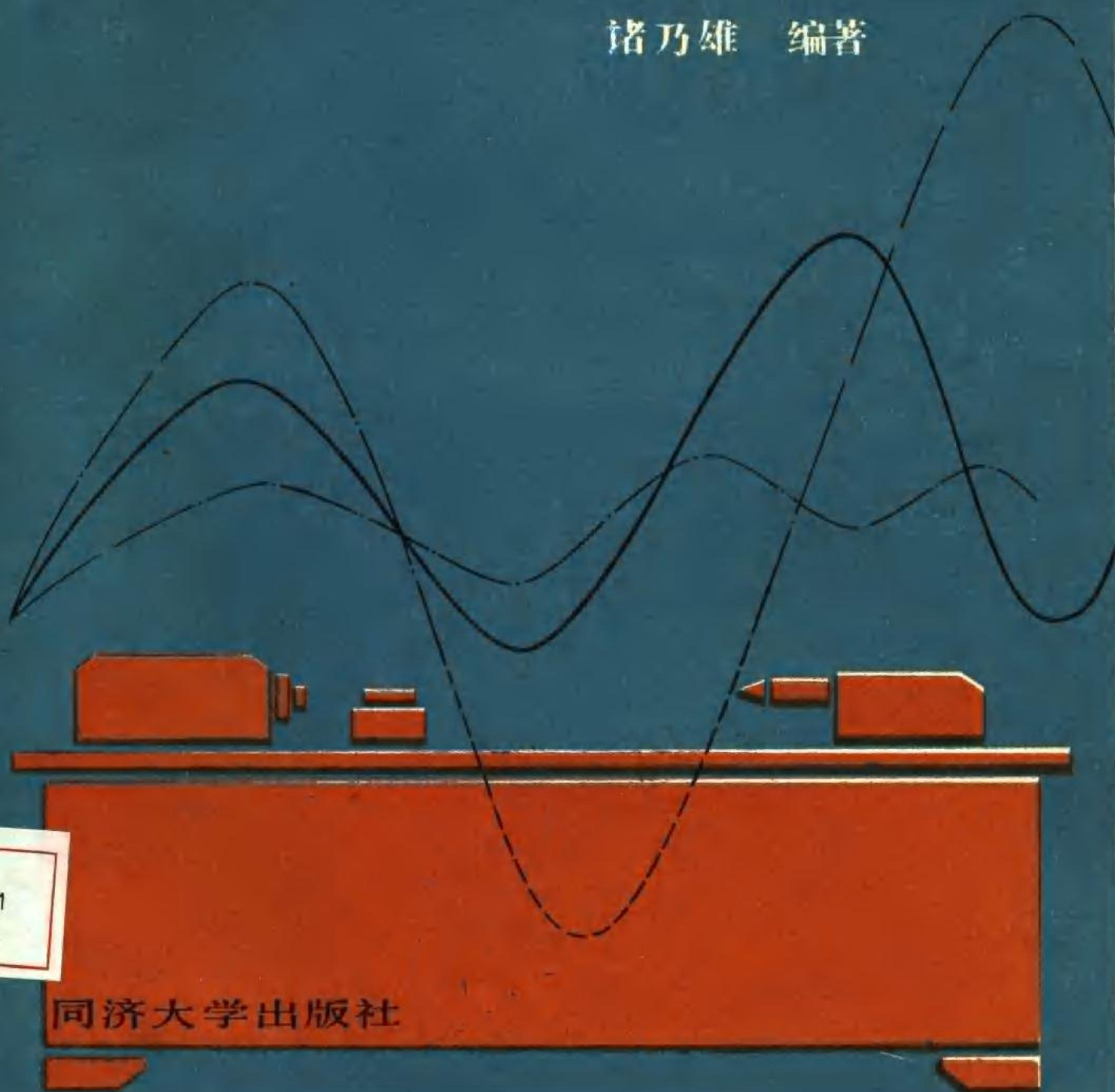


机床动态设计 原理与应用

褚乃雄 编著



02.1

同济大学出版社

内 容 提 要

本书就机床动态设计的基本原理及有关方法作了系统的介绍。它包括对机床整机动态设计的模态分析法,机床主轴部件动态设计的传递矩阵法,传动系统动态设计的传递矩阵法,以及支承件动态设计的有限元法作了详细叙述,同时都列举了应用实例。在最后还是附录了矩阵的基础知识,特征值问题的近似解法等。

本书除作为高等院校机械专业的教科书外,还可供有关科技人员和专业学校师生的参考。

责任编辑 陆菊英

封面设计 徐 繁

机床动态设计原理与应用

诸乃雄 编

同济大学出版社出版
(上海四平路 1239 号)

新华书店上海发行所发行
常熟市文化印刷厂印装

开本 787×1092 1/16 印张 11 字数 282 千字

1987 年 1 月第 1 版 1987 年 1 月第 1 次印刷

印数 1-7,000 科技新书目 142-257

统一书号 15335.039 定 价 1.90 元

前 言

人们把金属切削机床称作为工作母机,它是机械制造工业中最基本的设备,是国民经济发展中的先行工业。几十年来,机床工业虽然发展很快,但随着工业、农业、国防与科学技术的发展,对机床提出了越来越高的要求,尤其要求机床具有更高的精度和自动化程度的功能。为了满足这些要求,除了运用有关先进技术之外,最基本的问题要相应地提高机床的工作性能。机床的基本性能可以按静态性能和动态性能来分。所谓机床的动态性能,是指机床运转之后振动、噪声、热变形与磨损等性能的总称。但是长期以来习惯上指的只是机床的振动(或动力)性能(即 Dynamic Behavior),本书指的也是习惯含意。

近三十年来,机床动态性能的研究,吸引了国内外许多学者的关注,并取得了显著的成果。这方面的研究工作可以归纳为两大类内容:一类是机床动态性能基本理论的研究,另一类是机床动态性能测试技术的研究,两者相辅相成,密切联系。继续深入研究的最终目标,必须是解决生产实际问题,具体地说,要在机床工业生产中实现机床动态设计和机床动态验收。

机床动态设计,指的是机床的动态性能在其图纸设计阶段就得到预测和优化。目前那种通过经验设计——样机试制——样机测试——改进设计——再试制——再测试……的方法,其周期长,效果差,非长久之计。动态优化设计时,由于计算模式可以输入计算机,也就是说,整个设计过程实质上是运用机床动态设计数据库和程序库的过程。即借助计算机辅助设计和计算机绘图技术来完成结构设计工作,同时还可借助计算机工艺编程技术来完成工艺设计(包括工艺规程、刀具、夹具、量具、工时定额及成本核算等)。这样,结构设计、工艺设计与生产管理可以一气呵成了。

机床动态验收,指的是机床出厂或修复之后,按指定的规范(检验方法与检验指标)来检验机床的动态性能。不同种类和不同精度等级的机床应该有不同的动态验收标准。当然,制订一系列的动态验收标准,将是一个十分艰巨的研究课题。

机床动态优化设计的理论体系将随着机床动态性能研究的深入而逐步完善。本书就动态设计的基本原理及有关方法作系统的介绍,并辅以实例来说明应用过程。力图使读者掌握机床动态设计的基本思想和目前较成熟的实用方法,成为读者在生产中应用或理论上深入研究的基础。

自1982年起,编者为本校机制专业开设并讲授“机床动态设计”课程。几年来,在教学实践和科学研究的基础上,进一步积累资料和修改讲义,最后形成了本书。但是由于编者水平有限和编写时间仓促,书中难免有不少缺点和错误,诚望读者批评指正。

本书在同济大学机械系主任侯镇冰教授指导下编写,请上海交通大学贝季瑶教授评审,并得到了许多兄弟院校的专家学者的支持和帮助。特此表示衷心的感谢。

编 者
1986.9.

目 录

第一章 整机动态设计的模态分析法	(1)
第一节 模态分析原理	(1)
一 动力学模型和数学模型	(2)
二 固有频率和主振型	(5)
三 坐标转换	(6)
四 动态响应	(10)
第二节 机床动态性能优化原理	(19)
一 优化指标	(19)
二 模态柔度	(23)
三 能量分布	(24)
四 阻尼分配	(24)
第三节 应用实例	(25)
一 概述	(25)
二 初步建立动力学数学模型	(26)
三 测试有关数据	(29)
四 模型计算	(30)
五 新方案试算	(32)
第二章 主轴部件动态设计的传递矩阵法	(34)
第一节 数学模型的建立	(35)
一 元件数学模型	(36)
二 数学模型实化	(44)
三 主轴部件的数学模型	(47)
第二节 计算应用	(48)
一 固有频率与主振型	(48)
二 原点与跨点动柔度	(50)
三 挠度与转角	(52)
四 结构方案的选择	(53)
第三节 计算实例	(53)
第三章 传动系统动态设计的传递矩阵法	(59)
第一节 单支传动系统	(59)
一 系统动力学模型	(59)

二 元件数学模型·····	(64)
三 系统数学模型·····	(67)
第二节 多支传动系统·····	(67)
一 系统动力学模型·····	(67)
二 节点元件数学模型·····	(68)
三 系统数学模型·····	(72)
第三节 计算应用·····	(73)
一 自由振动·····	(73)
二 受迫振动·····	(74)
第四节 传动系统的自激振动·····	(74)
一 动力学模型·····	(75)
二 数学模型·····	(76)
三 临界条件和临界值·····	(77)
第五节 应用实例·····	(81)
一 建立动力学模型·····	(81)
二 建立数学模型·····	(82)
三 计算分析·····	(83)
第四章 支承件动态设计的有限单元法·····	(87)
第一节 概述·····	(87)
第二节 有关的力学和数学知识·····	(88)
一 外力与内力的关系·····	(88)
二 应变与位移的关系·····	(89)
三 应力与应变的关系·····	(90)
四 应变能·····	(92)
五 外力位能与总位能·····	(92)
六 最小位能原理与虚位移原理·····	(93)
第三节 平面问题三角形单元的数学模型·····	(95)
一 位移函数·····	(96)
二 单元的应变·····	(98)
三 单元的应力·····	(98)
四 单元的刚度矩阵·····	(99)
第四节 其它单元的数学模型·····	(101)
一 平面问题的四边形单元·····	(101)
二 弯曲问题的薄板单元·····	(105)
三 梁单元·····	(114)
第五节 构件的数学模型·····	(118)
一 单元刚度矩阵的座标转换·····	(118)

二 单元刚度矩阵的组合	(121)
第六节 支承件动力学模型	(125)
一 建立运动方程	(125)
二 自由振动分析	(127)
三 受迫振动分析	(127)
四 建立质量矩阵	(128)
第七节 应用实例	(134)
一 建立有限力学模型	(134)
二 建立数学模型	(137)
三 计算分析	(137)
附录I 矩阵基础知识	(139)
一 矩阵与线性方程组	(139)
二 矩阵种类	(140)
三 基本运算规则	(144)
附录 II 特征值问题的近似解法	(146)
一 瑞利法	(146)
二 邓柯莱法	(148)
三 李兹法	(149)
四 矩阵迭代法	(151)
五 吉文斯—豪斯霍尔德法(G-H 法)	(157)
六 子空间迭代法	(162)

第一章 整机动态设计的模态分析法

机床是一个质量分布连续的弹性体,具有无限多个自由度。但是,在动态分析中可以根据机床的具体结构,将整机离散成若干个集中质量,简化成为一个具有有限个自由度的多自由度振动系统,然后采用适当的方法进行分析计算。

一个多自由度振动系统,可以建立一个对应的运动微分方程组。从数学观点看,完全可以求解这个方程组,但实际上由于运算过程相当繁复以至较难应用,尤其是方程组内部存在耦合时,运算工作更为繁重。所以工程技术中必需通过其它途径来解决多自由度振动问题。当然,途径是很多的,但对于整台机床那样的复杂结构来说,采用模态分析法是较为适宜的。

模态分析法最大的优点在于:能够较方便地解决方程组的耦合现象,使矩阵对角化,显著地简化运算工作。当然,模态分析法还有一定局限性,所取的自由度数不宜太多。不过在分析整机动态性能时,真正感兴趣的只是低频段有限的几阶模态。例如,一般机床的主要模态多半为几阶或十几阶,这样多的自由度数,对模态分析法来说,正恰到好处。所以整机动态设计采用模态分析法,可谓扬长避短了。模态分析法非但适宜于整机,对于那些结构复杂的部件(例如磨床砂轮架),同样是动态分析的好方法。

第一节 模态分析原理

所谓模态分析法,是凭借振动系统的模态参数来对它的动态性能进行分析、预测、评价和优化的方法。把振动系统的模态参数计算(或称模态参数识别)出来,乃是模态分析过程的重要环节。然而模态分析法的核心问题在于解除多自由度系统运动方程组的内部耦合,即所谓解耦,解耦的具体方法是坐标系统转换,将物理坐标系统转换到模态坐标系统。而转换座标的条件是选择好一个合适的转换矩阵。由于主振型具有正交性,所以这个转换矩阵就是系统的主振型。因此求解系统的特征向量和特征值(主振型和固有频率)成为模态分析中的一个很关键的问题。为此,首先必需建立一个真正反映振动系统实际情况的动力学模型和对应的数学模型。它是整个模态分析过程最基本的问题。模型建立得不精确,将直接影响分析的结果。通常在分析过程中发现模型有问题的话,应回过头来修改模型。

所识别的模态参数还有实数和复数之区别,这是由于振动系统的阻尼性质的不同或人为假设条件的不同而引起的。当振动系统属于比例阻尼状态或人为近似地假设它为比例阻尼系统时,分析方法用实模态分析法,分析结果得到实模态参数;如果确认研究对象是非比例阻尼系统的话,则用复模态分析法,得到复模态参数。就运算方法而论,实模态分析法比复模态分析法要简单得多。但是按照实际情况,大多数机床都属于非比例阻尼系统,要是用实模态方法分析,近似地看作比例阻尼,则这个近似的前提所引起的误差是不可忽视的。不过,倘若照实取非比例阻尼为前提,用复模态方法运算,则由于所涉及的问题太复杂,在运算过程中势必要作一定的近似假设,这种近似所造成的误差也是不可忽视的。可见两者都会有误差,只是造成误差的原因不同。

模态分析法,无论是实模态法或复模态法,都需通过实测为运算提供所需要的原始数据;同时通过有关的实测数据来佐证初始动力学模型是否正确,以便修改模型。当通过大量实践和有系统地积累,逐步建立一套完整的数据库和计算机程序库之后,便可使计算分析和动态优化设计高度计算机化,效率就更高了。

通过模态参数识别来分析和优化机床动态性能的方法,过程紧凑,概念清晰,具有一定的精确度和实用价值。但是,它在机床动态设计中毕竟只是一种间接的方法。评价参数和优化技术参数多半只能提供定性数据或相对数据。因为它所提供的模态质量、模态刚度、模态阻尼比以及模态柔度等数据与生产中直接可以运用的质量、刚度、阻尼系数与动柔度等物理量,在物理概念上是完全不同的,不能互相代替。然而,欲解决这个问题却有一定的难度,关键在于要解决坐标系统的“返还”技术,即将原始模型的物理坐标转换到了模态坐标,经过模态参数识别与分析,得到了所需要的结论。然后,应该在维持这个结论的前提下,重新将模态坐标转换成物理坐标,用人们习惯的物理量来表示,供生产上直接引用。这个完整的过程可简述为物理坐标→模态坐标→物理坐标的过程。第一次的转换技术已经解决,这就是模态分析技术或模态参数识别技术。第二次的转换技术尚待解决。为此,国内外学者已经着手了这方面的研究,并陆续取得了一些成果,再经过坚持努力,不断完善和实践考验,可望能够满意地解决这个问题。

一 动力学模型和数学模型

运用模态分析法,必需将振动系统离散成若干个质量集中的子结构。子结构之间由等效弹簧和等效阻尼器联接起来,表示子结构之间的联结刚度和阻尼,构成一个动力学模型。图 1-1 为一个三自由度振动系统的动力学模型。

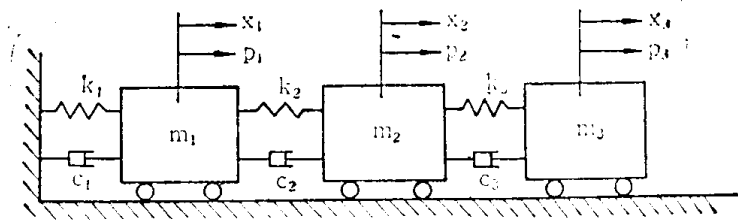


图 1-1 动力学模型

图中: $m_1 m_2 m_3$ ——离散了的集中质量;
 $k_1 k_2 k_3$ ——联结刚度;
 $c_1 c_2 c_3$ ——联结阻尼系数;
 $p_1 p_2 p_3$ ——子结构所承受的激振力;
 $x_1 x_2 x_3$ ——三个独立的物理坐标,表示振动位移值。

建立运动方程的方法,通常有两种。一是直接用牛顿第二定律按质点受力平衡原理,写出各子结构的运动方程,联合成方程组;另一种是按能量守恒原理,用拉格朗日方程建立运动方程组。两者所得到的结果是完全一致的,但各有所长。前者建立方程的过程较简单;后者推导过程稍复杂些,但建立拉格朗日方程时推导的子结构能量方程式,可供后期优化计算时直接运用,有一举两得之功。本节拟按牛顿第二定律来建立方程。

图 1-2 由图 1-1 分解所得,可写出每个子结构的独立方程:

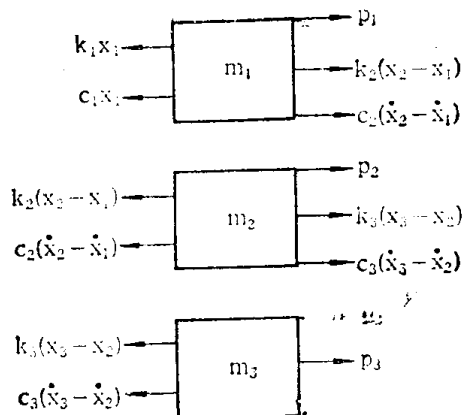


图 1-2 子结构受力图

$$\left. \begin{aligned} m_1 \ddot{x}_1 &= p_1 - c_1 \dot{x}_1 + c_2 (\dot{x}_2 - \dot{x}_1) - k_1 x_1 + k_2 (x_2 - x_1) \\ m_2 \ddot{x}_2 &= p_2 - c_2 (\dot{x}_2 - \dot{x}_1) + c_3 (\dot{x}_3 - \dot{x}_2) - k_2 (x_2 - x_1) + k_3 (x_3 - x_2) \\ m_3 \ddot{x}_3 &= p_3 - c_3 (\dot{x}_3 - \dot{x}_2) - k_3 (x_3 - x_2) \end{aligned} \right\}$$

整理成

$$\left. \begin{aligned} m_1 \ddot{x}_1 + (c_1 + c_2) \dot{x}_1 - c_2 \dot{x}_2 + (k_1 + k_2) x_1 - k_2 x_2 &= p_1 \\ m_2 \ddot{x}_2 - c_2 \dot{x}_1 + (c_2 + c_3) \dot{x}_2 - c_3 \dot{x}_3 - k_2 x_1 + (k_2 + k_3) x_2 - k_3 x_3 &= p_2 \\ m_3 \ddot{x}_3 - c_3 \dot{x}_2 + c_3 \dot{x}_3 - k_3 x_2 + k_3 x_3 &= p_3 \end{aligned} \right\} \quad (1-1)$$

用矩阵表示

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \\ \ddot{x}_3 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} c_1 + c_2 & -c_2 & 0 \\ -c_2 & c_2 + c_3 & -c_3 \\ 0 & -c_3 & c_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{Bmatrix} \\ & + \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 & 0 \\ -k_2 & k_2 + k_3 & -k_3 \\ 0 & -k_3 & k_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (1-2)$$

简写成

$$[m] \{\ddot{x}\} + [c] \{\dot{x}\} + [k] \{x\} = \{p\} \quad (1-3a)$$

(1-2)式与(1-3a)式各项一一对应,各矩阵的含意为:

- $[m]$ ——系统的质量矩阵;
- $[c]$ ——系统的粘性阻尼矩阵;
- $[k]$ ——系统的刚度矩阵;
- $\{\ddot{x}\}$ ——系统的振动加速度矩阵;
- $\{\dot{x}\}$ ——系统的振动速度矩阵;
- $\{x\}$ ——系统的振动位移矩阵;
- $\{p\}$ ——激振力矩阵。

(1-3)式便是图 1-1 振动系统的数学模型,它是振动系统运动方程的普遍形式,是有阻尼的受迫振动运动方程。除此之外,还有可能出现下列几种振动情况及相应的数学模型。

无阻尼受迫振动($[c] = \{0\}$):

$$[m] \{\ddot{x}\} + [k] \{x\} = \{p\} \quad (1-3b)$$

有阻尼自由振动($\{p\} = \{0\}$):

$$[m]\{\ddot{x}\} + [c]\{\dot{x}\} + [k]\{x\} = \{0\} \quad (1-3c)$$

无阻尼自由振动($[c] = \{p\} = \{0\}$):

$$[m]\{\ddot{x}\} + [k]\{x\} = \{0\} \quad (1-3d)$$

以上各类振动方程中的 $[m]$ 、 $[c]$ 、 $[k]$ 都是系数矩阵。若振动系统为 n 个自由度,则这些系数矩阵都是 n 阶方阵。这些系数矩阵对各座标之间起着相互影响甚至耦合的作用,这可以从这些矩阵的展开式中进一步来说明。

假设系数矩阵的一般形式为

$$[m] = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & \cdots & m_{1n} \\ m_{21} & m_{22} & \cdots & m_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ m_{n1} & m_{n2} & \cdots & m_{nn} \end{bmatrix}$$

$$[c] = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nn} \end{bmatrix}$$

$$[k] = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & \cdots & k_{1n} \\ k_{21} & k_{22} & \cdots & k_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ k_{n1} & k_{n2} & \cdots & k_{nn} \end{bmatrix}$$

这些矩阵中每个元素的物理意义为:

m_{ij} ——当 j 子结构具有单位振动加速度 $\ddot{x}_j = 1$,而其它子结构的振动加速度均为零时, i 子结构上会产生 $m_{ij}\ddot{x}_j = m_{ij}$ 的惯性力。说明 j 子结构(即 j 座标)对 i 子结构(即 i 座标)的惯性影响,也称惯性耦合。但对角元素 m_{ii} 或 m_{jj} 就不存在二个座标之间的互相影响,互相耦合了。

c_{ij} ——当 j 子结构具有单位振动速度 $\dot{x}_j = 1$,而其它子结构振动速度均为零时, i 子结构上会产生 $c_{ij}\dot{x}_j = c_{ij}$ 的阻尼力。这就是 j 座标与 i 座标之间的阻尼耦合。但对角元素 c_{ii} 或 c_{jj} 等却不存在阻尼耦合的问题。

k_{ij} ——当 j 子结构具有单位振动位移 $x_j = 1$,而别的子结构振动位移均为零时,在 i 子结构上会受到 $k_{ij}x_j = k_{ij}$ 的弹性力。这就是 j 座标与 i 座标之间的弹性耦合。但对角元素 k_{ii} 或 k_{jj} 等却不存在弹性耦合的问题。

如上所述,说明系数矩阵非对角元素不等于零时,就存在耦合现象。一个运动方程中,如果 $[m]$ 矩阵如此,就说明运动方程存在惯性耦合; $[c]$ 矩阵如此,即存在阻尼耦合; $[k]$ 矩阵如此,则存在弹性耦合。例如(1-2)式,它存在阻尼耦合与弹性耦合。质量矩阵的非对角元素全部是零,说明无惯性耦合。从而可以找到判别办法,凡系数矩阵是对角矩阵,例如(1-2)式中 $[m]$ 矩阵,就不存在耦合现象,否则一定存在耦合现象。

在数学模型中存在耦合现象,会导致数学上解题的困难。只有消除了方程组中的耦合现象,使方程组中每个方程各自独立,才能顺利解题。所以解除耦合的问题,就成了建立运动方程之后首先遇到的重要课题。

二 固有频率和主振型

固有频率和主振型是振动系统的自然属性，必需通过研究无阻尼的自由振动来求解。假定有个具有 n 个自由度的多自由度振动系统，它的无阻尼自由振动运动方程为

$$[m]\{\ddot{x}\} + [k]\{x\} = \{0\} \quad (1-4)$$

此方程的解虽不能立即求取，但由于线性振动的振动位移是简谐函数，此解的形式必为

$$\{x\} = \{A\}e^{i\omega_0 t} \quad (1-5)$$

求导得

$$\begin{aligned} \dot{\{x\}} &= i\omega_0 \{A\}e^{i\omega_0 t} \\ \ddot{\{x\}} &= -\omega_0^2 \{A\}e^{i\omega_0 t} \end{aligned}$$

代入(1-4)式，消去 $e^{i\omega_0 t}$ ，整理得

$$([k] - \omega_0^2 [m])\{A\} = \{0\} \quad (1-6)$$

$\{A\}$ 非零解的条件，为(1-6)式的系数行列式应满足：

$$\det([k] - \omega_0^2 [m]) = 0 \quad (1-7)$$

式中 $\{A\}$ 为系统的振幅列阵， ω_0 为固有频率。

通过(1-7)式可求解固有频率 ω_0^2 ，将 ω_0^2 代入(1-6)式可求解 $\{A\}$ 。一般情况下振动系统具有 n 个自由度的话，就有 n 个固有频率 $\omega_{01}, \omega_{02}, \dots, \omega_{0n}$ 以及 n 个对应的主振型 $\{A^{(1)}\}, \{A^{(2)}\}, \dots, \{A^{(n)}\}$ 。由于 ω_0 与 $\{A\}$ 都是振动系统的固有属性，表征着该系统的基本动态特征，所以称呼 $\{A\}$ 为振动系统的特征向量，称 ω_0^2 为特征值。在动力学中求解 ω_0^2 和 $\{A\}$ 的问题，称为“特征值问题”。因此，(1-6)式被称为特征方程，(1-7)式被称为频率方程。多自由度的特征值问题是一个较复杂而又关键的问题，引起了广泛的关注，许多学者相继提出了一些解决办法，诸如瑞利法，邓柯莱法，李兹法，矩阵迭代法，吉文斯-豪斯霍尔德法和子空间迭代法等。这些方法有两个共同特点：一是它们的计算技术的建立在线性代数的基础上；二是计算结果，严格地说均是近似值，但都是很实用的方法。具体解法可见本书附录“特征值的近似解法”。

每一阶固有频率对应一阶主振型，倘若第 r 阶固有频率 ω_{0r} 已知，则代入(1-6)式，展开为

$$\left(\begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & \cdots & k_{1n} \\ k_{12} & k_{22} & \cdots & k_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ k_{n1} & k_{n2} & \cdots & k_{nn} \end{bmatrix} - \omega_{0r}^2 \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & \cdots & m_{1n} \\ m_{21} & m_{22} & \cdots & m_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ m_{n1} & m_{n2} & \cdots & m_{nn} \end{bmatrix} \right) \begin{Bmatrix} A_1^{(r)} \\ A_2^{(r)} \\ \vdots \\ A_n^{(r)} \end{Bmatrix} = \{0\}$$

写成方程组形式

$$\left. \begin{aligned} (k_{11} - \omega_{0r}^2 m_{11})A_1^{(r)} + (k_{12} - \omega_{0r}^2 m_{12})A_2^{(r)} + \cdots + (k_{1n} - \omega_{0r}^2 m_{1n})A_n^{(r)} &= 0 \\ (k_{21} - \omega_{0r}^2 m_{21})A_1^{(r)} + (k_{22} - \omega_{0r}^2 m_{22})A_2^{(r)} + \cdots + (k_{2n} - \omega_{0r}^2 m_{2n})A_n^{(r)} &= 0 \\ \cdots &\cdots \\ (k_{n1} - \omega_{0r}^2 m_{n1})A_1^{(r)} + (k_{n2} - \omega_{0r}^2 m_{n2})A_2^{(r)} + \cdots + (k_{nn} - \omega_{0r}^2 m_{nn})A_n^{(r)} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (1-8)$$

(1-8)式是振动系统第 r 阶主振型 $A^{(r)}$ 的 n 元方程组，解方程组 可得到系统在以 ω_{0r} 频率振动时的主振型

$$\{A^{(r)}\} = \{A_1^{(r)} \ A_2^{(r)} \cdots A_n^{(r)}\}^T$$

每一阶固有频率有一阶对应的主振型，整个系统全部固有频率所对应的全部主振型集合起来便是系统的主振型；

$$[A] = [\{A^{(1)}\} \{A^{(2)}\} \dots \{A^{(n)}\}] = \begin{bmatrix} A_1^{(1)} & A_1^{(2)} & \dots & A_1^{(n)} \\ A_2^{(1)} & A_2^{(2)} & \dots & A_2^{(n)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_n^{(1)} & A_n^{(2)} & \dots & A_n^{(n)} \end{bmatrix} \quad (1-9)$$

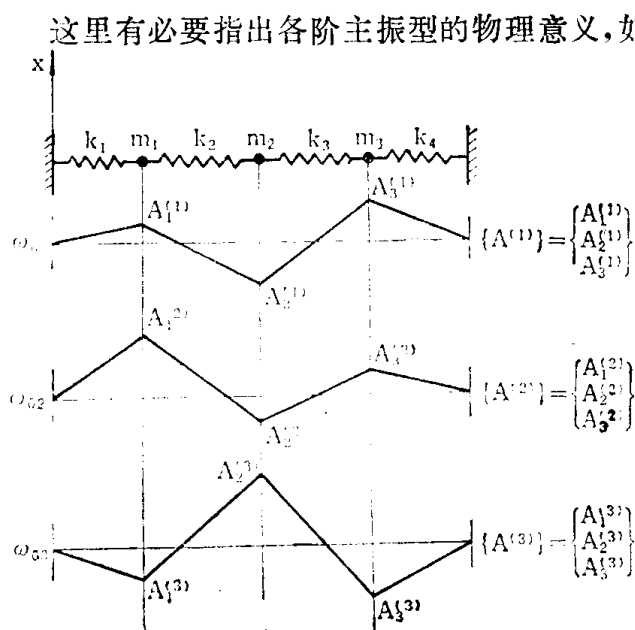


图 1-3 各阶主振型

这里有必要指出各阶主振型的物理意义,如图 1-3 所示,是三自由度的横向振动系统,具有三个固有频率及三阶主振型。其中每一阶主振型,指的是该振动系统在以此阶固有频率振动时各自由度之间振幅值的比例关系和一定的相位关系。也就是说,主振型列阵中的数值只表示各子结构振幅的比值,不是振幅的具体大小。因此,受迫振动时,振幅值的大小将随激振力大小而改变,但是它们之间的相对比例关系与相位关系(即振动型态)决不会改变。这就进一步说明了固有频率与主振型是振动系统最基本的固有属性,不会随意改变。这种振动系统中的固有属性,只有在被激励时才表现出来,这就是后面将要详述的动态响应。

三 座 标 转 换

1. 问题的引入

同一个振动系统可以取不同的座标而建立起不同形式的运动方程。所选择的座标不同,运动方程的耦合现象也不一样。例如图 1-4 所示,图(a)采用绝对座标(即物理座标),以地球为基准,可以建立如下方程:(推导方法如同(1-2)式)

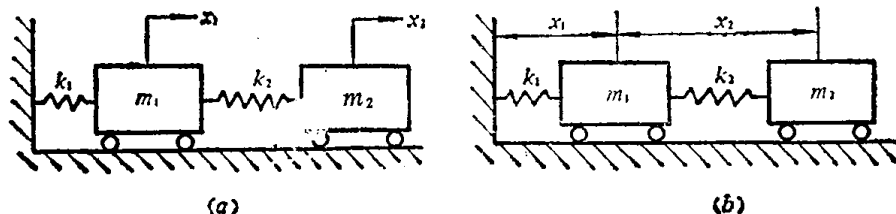


图 1-4 转换座标

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (1-10a)$$

图(b)采用相对座标(即设计座标)。若用拉格朗日方程来推导其运动方程,先写出振动系统的能量表达式。势能为

$$U = \frac{1}{2} k_1 x_1^2 + \frac{1}{2} k_2 x_2^2$$

动能为

$$T = \frac{1}{2} m_1 \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 (\dot{x}_1 + \dot{x}_2)^2$$

拉格朗日方程

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial x_i} + \frac{\partial V}{\partial x_i} = Q_i \quad (i=1, 2)$$

自由振动时 $Q_i=0$ 。将势能与动能代入拉格朗日方程,经运算得

$$\begin{cases} (m_1 + m_2)\ddot{x}_1 + m_2\ddot{x}_2 + k_1x_1 = 0 \\ m_2\ddot{x}_1 + m_2\ddot{x}_2 + k_2x_2 = 0 \end{cases}$$

写成矩阵形式

$$\begin{bmatrix} m_1 + m_2 & m_2 \\ m_2 & m_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 & 0 \\ 0 & k_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (1-10b)$$

从(1-10a)式和(1-10b)式可知,同一振动系统,由于所取座标不同,建立的运动方程也不一样。(1-10a)式中存在弹性耦合现象,(1-10b)式中却存在惯性耦合现象。由此可知,运动方程组内部的耦合现象并非振动系统所固有的性质,而只是选择不同座标的结果。不难想象,倘若能找到一组座标,使方程组内部不存在任何耦合现象,方程组中每个方程式都成为独立的单自由度形式的运动方程式,这样就可使运算过程大为简化。为了达到这个目的,就要进行座标转换。

分析机床时,首先以绝对座标 $\{x\}$ 建立方程,然后进行座标转换。假设所要寻找的理想座标为 $\{q\}$,则两个不同座标系统在描写同一个振动系统时,应保持如下换算关系:

$$\{x\} = [\phi] \{q\} \quad (1-11)$$

式中 $[\phi]$ 是座标转换矩阵。广义来说,任何座标的转换都可以通过(1-11)式进行,但新座标 $\{q\}$ 究竟是否具有解耦性质,关键在于所选择的转换矩阵 $[\phi]$ 是否确当。因此,问题的关键就转到了 $[\phi]$ 的选择问题上。客观上,这个理想的 $[\phi]$ 矩阵是存在的,通过主振型的正交性质可发觉它。

2. 主振型的正交性

任意选择振动系统的两阶固有频率 ω_{0r} 和 ω_{0s} 以及对应的主振型 $\{A^{(r)}\}$ 和 $\{A^{(s)}\}$, 分别满足(1-6)式

$$[k] \{A^{(r)}\} = \omega_{0r}^2 [m] \{A^{(r)}\} \quad (1-12)$$

$$[k] \{A^{(s)}\} = \omega_{0s}^2 [m] \{A^{(s)}\} \quad (1-13)$$

在(1-12)(1-13)式前分别乘 $\{A^{(s)}\}^T$ 与 $\{A^{(r)}\}^T$:

$$\{A^{(s)}\}^T [k] \{A^{(r)}\} = \omega_{0r}^2 \{A^{(s)}\}^T [m] \{A^{(r)}\} \quad (1-14)$$

$$\{A^{(r)}\}^T [k] \{A^{(s)}\} = \omega_{0s}^2 \{A^{(r)}\}^T [m] \{A^{(s)}\} \quad (1-15)$$

式中 $[k]$ 与 $[m]$ 都是对称矩阵, $[k]^T = [k]$, $[m]^T = [m]$ 。利用矩阵的转置性质: 矩阵乘积的转置等于各矩阵转置乘积并且次序相反。若有 A, B, C 三个矩阵, 则

$$(A \cdot B \cdot C)^T = C^T \cdot B^T \cdot A^T$$

因此取(1-15)式的两端转置, 得到

$$\{A^{(s)}\}^T [k] \{A^{(r)}\} = \omega_{0s}^2 \{A^{(s)}\}^T [m] \{A^{(r)}\} \quad (1-16)$$

(1-14)式减(1-16)式得

$$(\omega_{0r}^2 - \omega_{0s}^2) \{A^{(s)}\}^T [m] \{A^{(r)}\} = 0 \quad (1-17)$$

由于 $\omega_{0r}^2 \neq \omega_{0s}^2$, 则必有

$$\{A^{(s)}\}^T [m] \{A^{(r)}\} = 0 \quad (1-18)$$

代入(1-14)式又得

$$\{A^{(s)}\}^T [k] \{A^{(r)}\} = 0 \quad (1-19)$$

两个不同的向量之乘积为零,说明这两个向量互相正交,根据这个概念,(1-18)式被称为主振型关于质量的正交性,(1-19)式被称为主振型关于刚度的正交性。

证实了振动系统的主振型存在正交性质,便为取得新的理想的座标系统创造了必要的条件。

3. 模态座标和模态参数

正因为主振型对 $[m]$ 和 $[k]$ 都具有正交性,因此以主振型组成的矩阵作为线性交换矩阵,对系统的原方程进行座标变换,便可使质量矩阵 $[m]$ 和刚度矩阵 $[k]$ 同时对角化,即既不存在惯性耦合也不存在弹性耦合。这个结论可以作如下证明。

见(1-9)式,令

$$[\phi] = [A] = \begin{bmatrix} A_1^{(1)} & A_1^{(2)} & \dots & A_1^{(n)} \\ A_2^{(1)} & A_2^{(2)} & \dots & A_2^{(n)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_n^{(1)} & A_n^{(2)} & \dots & A_n^{(n)} \end{bmatrix} \quad (1-20)$$

得到(1-11)式

$$\{x\} = [\phi] \{q\}$$

为利用主振型对质量和刚度的正交性,对(1-11)式求导后,代入(1-3b)式,得

$$[m][\phi]\{\ddot{q}\} + [k][\phi]\{q\} = \{p\} \quad (1-21)$$

前乘 $[\phi]^T$ 得

$$[\phi]^T [m] [\phi] \{\ddot{q}\} + [\phi]^T [k] [\phi] \{q\} = [\phi]^T \{p\}$$

写成

$$[M] \{\ddot{q}\} + [K] \{q\} = \{Q\} \quad (1-22)$$

式中

$$[M] = [\phi]^T [m] [\phi]$$

$$[K] = [\phi]^T [k] [\phi]$$

$$\{Q\} = [\phi]^T \{p\}$$

$[M]$ 与 $[K]$ 都是对角矩阵,这是可以证明的:

$$\begin{aligned} [M] &= [\phi]^T [m] [\phi] = [\{A^{(1)}\} \{A^{(2)}\} \dots \{A^{(n)}\}]^T [m] [\{A^{(1)}\} \{A^{(2)}\} \dots \{A^{(n)}\}] \\ &= \begin{bmatrix} \{A^{(1)}\}^T [m] \{A^{(1)}\} & \{A^{(1)}\}^T [m] \{A^{(2)}\} & \dots & \{A^{(1)}\}^T [m] \{A^{(n)}\} \\ \{A^{(2)}\}^T [m] \{A^{(1)}\} & \{A^{(2)}\}^T [m] \{A^{(2)}\} & \dots & \{A^{(2)}\}^T [m] \{A^{(n)}\} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \{A^{(n)}\}^T [m] \{A^{(1)}\} & \{A^{(n)}\}^T [m] \{A^{(2)}\} & \dots & \{A^{(n)}\}^T [m] \{A^{(n)}\} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} M_1 & & & 0 \\ & M_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & M_n \end{bmatrix} = [M] \end{aligned} \quad (1-23)$$

矩阵中非对角元素符合正交性,数值为零,对角元素不为零,构成对角矩阵,即:

$$\{A^{(r)}\}^T [m] \{A^{(s)}\} = \begin{cases} 0, & (r \neq s) \text{ (非对角元素)} \\ M_r, & (r = s) \text{ (对角元素)} \end{cases}$$

第 r 个对角元素值为:

$$M_r = \{A^{(r)}\}^T [m] \{A^{(r)}\} = \sum_{j=1}^n \sum_{h=1}^n m_{jh} A_j^{(r)} A_h^{(r)} \quad (r=1, 2, \dots, n) \quad (1-24)$$

同理也可证明(1-22)式中的刚度矩阵 $[K]$ 也是对角矩阵。

$$[K] = \begin{bmatrix} K_1 & & 0 \\ & K_2 & \\ 0 & & K_n \end{bmatrix} = [K] \quad (1-25)$$

式中第 r 个对角元素值为

$$K_r = \{A^{(r)}\}^T [k] \{A^{(r)}\} = \sum_{j=1}^n \sum_{h=1}^n k_{jh} A_j^{(r)} A_h^{(r)} \quad (r=1, 2, \dots, n) \quad (1-26)$$

由此可知,通过矩阵 $[\phi]$ 在新坐标 $\{q\}$ 下建立的运动方程(1-22),完全解决了耦合问题,(1-22)式中的系数矩阵都是对角矩阵。在模态理论中,称(1-22)式为模态方程,这是一个理想的而又非常重要的方程。式中各参数给予专门的称呼:

- $\{q\}$ ——模态坐标,也称系统的固有座标或主座标;
- $\{\Phi\}$ ——模态矩阵;
- $[M]$ ——模态质量矩阵;
- $[K]$ ——模态刚度矩阵;
- $\{Q\}$ ——模态激振力;
- M_r ——第 r 阶模态质量;
- K_r ——第 r 阶模态刚度。

综上所述,为了解除多自由度振动系统运动方程中的耦合问题,必需建立一个模态方程。建立模态方程的过程应该从建立动力学模型和数学模型开始,先推导出绝对座标下的运动方程,解特征值问题,求得固有频率及其主振型,构成模态矩阵 $[\phi]$,以 $[\phi]$ 为座标转换矩阵进行座标转换,得到模态座标 $\{q\}$,然后建立模态方程。这样的过程,是进行模态分析时必需进行的基本过程。

4. 正则座标

许多场合在应用模态分析法时,把模态矩阵正则化,将使计算工作更加简化。

由于每阶主振型列阵 $\{A^{(r)}\}$ 是表示系统在以 ω_{0r} 固有频率振动时,各子结构振幅的相对比例关系,它只描写了当时的振动型态。如果确定了列阵中某一个元素数值之后,其它元素数值也确定了。因此可以设想,一定能够找到一个具体的 $\{A^{(r)}\}_N$ 值,满足下列关系:

$$M_r = \{A^{(r)}\}_N^T [m] \{A^{(r)}\}_N = 1 \quad (1-27)$$

或满足

$$K_r = \{A^{(r)}\}_N^T [k] \{A^{(r)}\}_N = 1 \quad (1-28)$$

(1-27)式或(1-28)式被称为正则条件。满足了任何一个正则条件之后,就可以使模态质量矩阵或模态刚度矩阵变成单位矩阵,这样就会简化运算过程。至于 $\{A^{(r)}\}_N$ 值的确定方法,拟以质量正则条件为例加以说明。设(1-27)式中

$$\{A^{(r)}\}_N = \alpha_r \{A^{(r)}\}$$

式中 $\{A^{(r)}\}_N$ —— r 阶正则振型,

α_r —— r 阶正则化因子。

(1-27)式写成:

$$\alpha_r \{A^{(r)}\}^T [m] \{A^{(r)}\} \alpha_r = \alpha_r^2 M_r = 1$$

所以 α_r 值计算式为

$$\alpha_r = \frac{1}{\sqrt{M_r}} = \frac{1}{\sqrt{\{A^{(r)}\}^T [m] \{A^{(r)}\}}} \quad (r=1, 2, \dots, n)$$

当 $[m]$ 是对角阵时, 计算较简单些:

$$\alpha_r = \frac{1}{\sqrt{\sum_{j=1}^n m_{jj} (A_j^{(r)})^2}}$$

欲使各阶模态质量都等于 1, 则分别计算出各阶正则化因子 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$, 组成一个矩阵

$$[\alpha] = \begin{bmatrix} \alpha_1 & & 0 \\ & \alpha_2 & \\ 0 & & \alpha_n \end{bmatrix}$$

由此可以构成一个正则模态矩阵:

$$[\phi]_N = [\alpha_1 \{A^{(1)}\} \quad \alpha_2 \{A^{(2)}\} \quad \dots \quad \alpha_n \{A^{(n)}\}] = [\phi] [\alpha]$$

以正则模态矩阵作为坐标转换矩阵的话, 便可以得到正则坐标 $\{q\}_N$, 坐标转换关系式为

$$\{x\} = [\phi]_N \{q\}_N$$

所以

$$\{q\}_N = [\phi]_N^{-1} \{x\}$$

因此就可仿照模态方程(1-22)式建立正则方程:

$$[M]_N \{\ddot{q}\}_N + [K]_N \{q\}_N = \{Q\}_N \quad (1-29a)$$

由于事先取的是质量正则条件, 所以(1-29a)式中质量矩阵为

$$[M]_N = [\phi]_N^T [m] [\phi]_N = [I]$$

又由于特征值问题, 存在

$$[k][\phi]_N = [m][\phi]_N \omega_0^2$$

两端前乘 $[\phi]^T$, 得

$$[\phi]_N^T [k] [\phi]_N = [\phi]_N^T [m] [\phi]_N \omega_0^2 \\ [K]_N = [M]_N \omega_0^2 = \omega_0^2$$

所以(1-29a)式可改写成

$$\{\ddot{q}\}_N + \omega_0^2 \{q\}_N = \{Q\}_N \quad (1-29b)$$

式中 $\{Q\}_N = [\phi]_N^T \{p\}$ 。(1-29b)式正则方程比模态方程简单多了。若以刚度矩阵为正则条件, 也可推导出一个正则方程来。即因为

$$[K] = [I]$$

所以

$$[M] = \omega_0^2^{-1}$$

因此代入(1-29a)得到新的正则方程

$$\omega_0^2^{-1} \{\ddot{q}\}_N + \{q\}_N = \{Q\}_N \quad (1-29c)$$

正则方程是模态方程的一种。一旦模态方程建立之后, 就可分析振动系统的动态响应。

四 动态响应

振动系统在动态力 $\{p\}$ 作用下, 即处在受迫振动或自激振动或两者兼有的状态下, 就可利用模态分析方法识别振动系统的动态响应。但是随着振动系统的阻尼情况不同, 则分析处理

方法也不一样。通常的阻尼情况包括无阻尼、比例阻尼、振型阻尼、结构阻尼与一般阻尼等。

1. 无阻尼情况

无阻尼受迫振动的数学模型为

$$[m]\{\ddot{x}\} + [k]\{x\} = \{p\}$$

经过坐标转换,建立模态方程

$$[M]\{\ddot{q}\} + [K]\{q\} = \{Q\} \quad (1-30)$$

(1-30)式是一个方程组,由 n 个独立方程组成,其中第 r 个方程式为

$$M_r \ddot{q}_r + K_r q_r = Q_r \quad (r=1, 2, \dots, n) \quad (1-31)$$

式中 $Q_r = \{A^{(r)}\}^T \{p\} = \{A^{(r)}\}^T \{P\} e^{i\omega t}$ 。所以(1-31)写成

$$\ddot{q}_r + \frac{K_r}{M_r} q_r = \frac{\{A^{(r)}\}^T \{P\}}{M_r} e^{i\omega t} \quad (1-31a)$$

因为简谐振动,所以有

$$q_r = \bar{q}_r e^{i\omega t}$$

$$\ddot{q}_r = -\omega^2 \bar{q}_r e^{i\omega t} = -\omega^2 q_r$$

又因为

$$\frac{K_r}{M_r} = \omega_{0r}^2$$

上式中 ω 为激振频率, ω_{0r} 为第 r 阶固有频率。代入(1-31a)式,得

$$(\omega_{0r}^2 - \omega^2) q_r = \frac{\{A^{(r)}\}^T \{P\}}{M_r} e^{i\omega t}$$

因此得到方程(1-31)式的解:

$$q_r = \frac{\{A^{(r)}\}^T \{P\}}{M_r(\omega_{0r}^2 - \omega^2)} e^{i\omega t} \quad (1-32)$$

另外,根据坐标转换关系有

$$\{x\} = [\phi]\{q\} = [\{A^{(1)}\} \{A^{(2)}\} \dots \{A^{(n)}\}] \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \dots \\ q_n \end{Bmatrix}$$

$$= q_1 \{A^{(1)}\} + q_2 \{A^{(2)}\} + \dots + q_n \{A^{(n)}\} = \sum_{r=1}^n q_r \{A^{(r)}\}$$

又因为 $\{x\}$ 本身是个简谐函数,有

$$\{x\} = \{X\} e^{i\omega t}$$

以上两式 $\{x\}$ 相等,得到:

$$\{X\} = \sum_{r=1}^n q_r \{A^{(r)}\} e^{-i\omega t}$$

用(1-32)式代入,得到:

$$\{X\} = \sum_{r=1}^n \frac{\{A^{(r)}\}^T \{P\} \{A^{(r)}\}}{M_r(\omega_{0r}^2 - \omega^2)}$$

因为

$$\lambda_r = \frac{\omega}{\omega_{0r}}$$

$$M_r = \frac{K_r}{\omega_{0r}^2}$$

所以系统的振幅列阵为

$$\{X\} = \sum_{r=1}^n \frac{\{A^{(r)}\}^T \{P\} \{A^{(r)}\}}{K_r(1 - \lambda_r^2)} \quad (1-33)$$