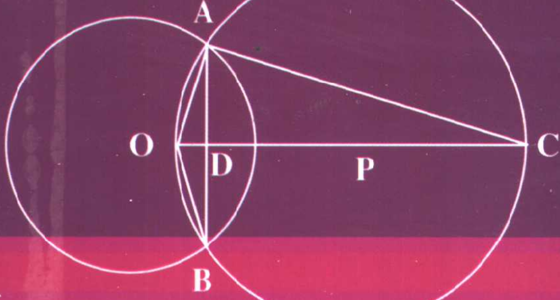
初中几何
多种证题方法



- 归纳证明平面几何题的基本方法
- 传授解答平面几何证明题的特殊技艺
- 举例说明 练习巩固 答案参考
- 由易到难 循序渐进

中国致公出版社

初中几何
多种证题方法

主　编　刘　昌
副主编　董　海
编　委　关敏华　余亚萍　张凤兰
王　理　韩国栋　汤立成
刘春颖　郑立勋　刘兴盛
蒋桂荣

中国致公出版社

图书在版编目(CIP)数据

初中几何多种证题方法/刘昌主编. -北京:中国致公出版社,2000.1

ISBN 7-80096-485-X

Ⅰ.初… Ⅱ.刘… Ⅲ.几何课-初中-解题 Ⅳ.6633.635

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (1999)第 03083 号

初中几何多种证题方法

主　　编:刘　昌

责任编辑:李　爽

责任印制:盛　熠

出版发行:中国致公出版社

(北京市西城区太平桥大街 4 号 电话 66168543 邮编 100810)

经　　销:全国新华书店

印　　刷:北京市顺义兴华印刷厂

印　　数:15003-20000 册

开　　本:787×1092　1/32 开

印　　张:8.125

字　　数:167 千字

版　　次:2000 年 1 月第 2 版　　2002 年 1 月第 4 次印刷

ISBN 7-80096-485-X/G·347　定价:9.50 元

出版说明

平面几何是初中阶段的一门重要课程，它的基础知识和基本技能在生产、生活和科学实验等实践中有着广泛的应用，也是继续学习数学和其他学科的基础。几何证明的严密逻辑推理对于培养思维能力有着巨大的作用。

平面几何题的证明，具有方法多、思路广、技巧活、类型全的特点。除了一些基本方法之外，还有一些常用的特殊方法，这就是本书第一、二章所介绍的内容。

对于纷繁的几何证明，虽然不存在一把万能的钥匙，但是在熟悉基础知识和基本技能的基础上，还是有一些类型题能够整理和归纳的，在技巧上也还有其一定的规律可循的，这便是本书第三章所介绍的内容。

每种方法和类型题都是先举例加以介绍，再配以二倍的练习题，以便读者练习和巩固，所附解答仅供参考，既不是全部，也不一定是最优的。

本书各章的顺序是按照从一般到特殊的思路编排的。如果读者欲从掌握解题技巧入手，可先阅读第三章。再阅读第二章，第一章。

本书介绍的是平面几何证题方法与类型题中的一部分，还有更多的有待于进一步发现和总结。另外，在方法与类型上只有大致归类，不是严格界定，况且有的题目的证明是几种方法的综合运用，不是单靠某一种方法所能解决的，这样的题目只好大致放在某种方法或类型中，因为分类的目的是为了学

习与掌握的方便。

书中个别题所用的知识超出九年义务教育教材的内容，作为附录放在书后，以便查阅。

本书既具实用性，又具资料性，是配合素质教育的课外辅导读物。

本书在写作过程中参考了一些书刊的材料，在此对原作者表示谢意，恕不一一列举。

水平所限，书中错误与不当之处难免，恳请读者不吝指正。

1999 年 2 月

目　　录

第一章　一般证题方法

在初一的几何课中，我们已经接触到了命题与证明，特别是初二以后，证明题逐渐多起来，几何证明题对于培养我们的逻辑思维能力，推理论证能力是非常有好处的．一般地说，证明题的难度较大，要做对一道证明题，不但要对题目所涉及的知识能了如指掌，熟练掌握，还要求掌握正确的证明方法．

证明是一种思维过程，是从一些已知或已证的真确命题推出新命题真确性的过程．几何证明就是用逻辑推理的方法论证图形的几何性质．每步推理都要以所给的条件、定义、公理或已经证明的定理为依据．一个命题的证明过程本身是由一系列相互联系的推理来完成的，一个证明是真确的，仅当证明过程的各步推理都是真确的．

数学证明按其方式可分为直接证明与间接证明；按其方法可分为归纳法、演绎法与类比法．

从题目的条件出发，根据定义、公理、定理等，通过一系列的逻辑推理，一直推导到所要证的结论为止，这种从题目的条件入手，从正面肯定结论的证明方法，叫做直接证明．

常用的有分析法、综合法、比较法、迭合法等．

有些命题的证明采用直接证明不易证出或者比较繁难，这时可改证与原命题等价的逆否命题，或者改证原命题的反命题不成立．根据思维规律的排中律，从而间接地断定原命

题成立，这种不从正面来证明命题真实性的证明方法，叫做间接证明．

常用的有反证法、同一法、待定系数法、归纳法等．

综合上述可得

- 证明方式
  - 直接证明
    - 分析法
    - 综合法
    - 比较法
    - 迭合法
  - 间接证明
    - 反证法
    - 同一法
    - 待定系数法
    - 归纳法——归纳法

演绎法

归纳法

类比法

推理方法

§1—1　分析法

分析法是数学中常用的一种直接证明方法，它是一种由未知到已知，由结论逐步追溯到前提的思考方法，即所谓的“执果索因”的证明方法．它的思考过程是从要证明的结论开始，利用学过的公理、定理、定义或法则去逆求要证明这个结论需要具备什么条件，一旦这些条件具备，结论就成立．

分析法的本质在于“由未知看须知，逐步靠拢已知”，就

是从所要证明的结论出发，探求结论成立的条件，再探求这些条件成立所需的条件，逐个考察，逐步追溯，一直追溯到与已知条件符合，这样，所要求的结论就成立了.

比如要证明甲命题成立，就去寻找甲命题成立的条件是否具备，若甲命题成立的条件可以由已知条件直接推得，那么问题就解决了；如果所需条件的一部分或全部都不是已知的，问题没有解决，那就去继续往上找. 欲证甲命题成立，须先证明乙命题成立，那就去寻求乙命题成立的条件是否可由已知条件直接推出. 如果可以，则问题解决了；如果还是不行，那就继续按着同样的方法向上追溯，直到所寻求的某个命题成立的条件已能由已知条件推得为止.

例 1. 试证等腰三角形两底角的平分线相等.

已知：在$\triangle ABC$中，$AB=AC$，BE，CD分别是$\angle ABC$和$\angle ACB$的平分线.

求证：$BE=CD$.

分析法证明：如图 1-1-1，欲证$BE=CD$，须证$\triangle BEC\cong\triangle CDB$或$\triangle BEA\cong\triangle CDA$.

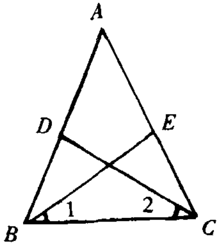


图 1-1-1

欲证$\triangle BEC\cong\triangle CDB$，须证$\angle BCE=\angle CBD$，$BC=CB$，$\angle 1=\angle 2$.

欲证$\angle BCE=\angle CBD$，需证$AB=AC$，这是已知的.

欲证$BC=CB$，而这是显然的.

欲证$\angle 1=\angle 2$，须证$\angle CBD=\angle BCE$，且BE平分$\angle CBD$，CD平分$\angle BCE$.

欲证$\angle CBD=\angle BCE$，需$AC=AB$，这是已知的，而BE

平分$\angle CBD$，CD平分$\angle BCE$也是已知的，因此问题得证．

当然，此题也可由追溯$\triangle BEA \cong \triangle CDA$的条件而得到证明．

例 2. 在$\triangle ABC$中，$\angle A$的平分线交BC于D，交三角形的外接圆于E. 求证：$AB \cdot AC = AD \cdot AE$.

已知：如图 1-1-2，$\triangle ABC$的外接圆，$\angle BAE = \angle EAC$，AE交BC于D.

求证：$AB \cdot AC = AD \cdot AE$.

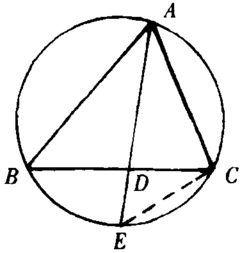


图 1-1-2

分析法证明：欲证

$AB \cdot AC = AD \cdot AE$，只须证明

$\frac{AB}{AE} = \frac{AD}{AC}$或$\frac{AB}{AD} = \frac{AE}{AC}$.

欲证 $\frac{AB}{AE} = \frac{AD}{AC}$

须证$\triangle BAD \backsim \triangle EAC$.

这时发现，须添加辅助线CE，以构成$\triangle EAC$.

为证这两个三角形相似，需从三角形相似的判定定理中寻求解决．在判定定理中，对应边成比例的条件是待证的或者说是未知的，因此，应从对应角考虑.

这须证$\angle BAE = \angle EAC$及$\angle B = \angle E$.

而$\angle BAE = \angle EAC$是已知的，$\angle B = \angle E$从同弧上的圆周角容易得到．于是问题得证．

本题也可由追溯$\frac{AB}{AD} = \frac{AE}{AC}$到$\triangle BAE \backsim \triangle DAC$，连结$BE$而得证．

§1—2 综合法

综合法也是中学数学证明中常用的一种直接证明方法．它是一种从已知到未知，由前提逐步推导到结论的逻辑推理方法．这与分析法正好相反，即从题设中的已知条件或已证的真实命题出发，经过一系列中间推理，最后导出所要求证的命题结论的真确性．

综合法是一种“由因导果”的证明方法．其本质是“由已知想可知，逐步推向未知”，即先分析题目中给了哪些已知条件（包括隐含条件），对每个已知条件都想想由此可知什么，把这“可知”当作新的已知条件，又可知什么，依此类推，不断扩大“可知”，一旦“可知”包含了要求的结论，便完成了证明．

一般的几何证明都是采用综合法，因为它叙述简明．上一节分析法的两例用综合法证明如下．

例 1．证明：如图 1-1-1，

$\because AB=AC$，$\therefore \angle BCE=\angle CBD$.

由 BE 平分$\angle CBD$，CD 平分$\angle BCE$，

$\therefore$ $\angle 1=\angle 2$.

又 $\angle BCE=\angle CBD$，$BC=CB$，

$\therefore$ $\triangle BCE\cong\triangle CBD$，

$\therefore$ $BE=CD$.

例 2．证明：如图 1-1-2，，连结 CE，则$\angle B=\angle E$.

又 $\angle BAE=\angle EAC$，

$\therefore$ $\triangle BAD\backsim\triangle EAC$，

$$\therefore \frac{AB}{AD}=\frac{AE}{AC},$$

即 $AB \cdot AC = AD \cdot AE$.

实际上，在证明几何题时，最困难的是找到证明线索，或者说是寻求解题思路．由于在由前提推结论时，一个条件成立的必要条件往往可以有许多，究竟顺着哪条思路找下去，才能得到所要求的结论，事先并不清楚．而由结论推前提时，因为一个条件成立的充分条件往往也可罗列多个，而究竟沿着哪条路可以追溯到题设，也不是容易看出的．因此，在实际分析思考时，往往不是单纯使用分析法或者综合法，而是两种方法并用．一方面由前提往结论靠拢，另一方面由结论往前提靠拢，这样两者才能更快地汇合到一起，最后找到解题思路，这就是通常所说的“两头凑”的方法．

§1—3　反证法

反证法是一种间接证明方法．当有的命题采用直接证明不易证出或者比较繁难时，可改为证明原命题的反命题不成立(命题“若 A 则 B”的反命题是“若 A 则非 B”)或证明与原命题等价(或称等效)的逆否命题．

反证法是先提出与结论相反的假设，把此假设作为新的已知条件，然后推出与公理、定义、定理、题设、假设或推导自身相矛盾，这就证明了与原结论相反的结论不能成立，从而肯定了原结论必然成立．

反证法又分归谬法和穷举法两种：

当命题结论的反面只有一种情况时，只需推翻这种情况

就能证明结论正确，叫做归谬法．

当命题结论的反面不止一种情况时，则需一一推翻，才能证明结论的正确，叫做穷举法．

用反证法证题的步骤如下：

1．反设——假定结论的反面成立；

2．矛盾——推理推出矛盾结果；

3．结论——判断结论的反面错误，断定结论正确．

宜用反证法的类型：

1．起始性命题．基本定理或某一系统的初始阶段已知条件较少，结论的反面多于已知条件，此时宜用反证法．

2．否定型命题．结论中有“不是”、“不能”、“没有”、“不可约”等词语，其反面往往更具体，宜用反证法．

3．唯一性命题．命题的结论以“至少”、“至多”、“唯一”等形式出现，宜用反证法．

4．必然性问题．结论中有“必然”、“一定”、“必”、“总”等特征，宜用反证法．

5．用直接证明方式较繁琐或有困难时，宜用反证法．

6．命题的结论涉及无理数，因其反面是有理数，可以表示为$\frac{p}{q}$（p 与 q 互质），这时宜用反证法．

7．命题的结论涉及的对象无限．

后两种情形在代数、三角等学科中用得多，几何中极少出现．

以下举例说明怎样用反证法证题．

例 1．在平面内，如果两条直线都和第三条直线平行，那么这两条直线也互相平行．

已知：直线 a,b,c 在同一平面内，$a /\!/ b$，$c /\!/ b$.

求证：$a /\!/ c$.

证明：如图 1-3-1，假设直线 a，c 不平行，即相交，设交点为 P，则在同一平面内，由 $a /\!/ b$，$c /\!/ b$ 得到过 P 点有两条直线 a 和 c 都与直线 b 平行，这与平行公理“经过直线外一点有且只有一条直线和已知直线平行”相矛盾，这说明前面假设的直线 a,c 相交是错误的，即 a,c 不平行是错误的，因此直线 $a /\!/ c$.

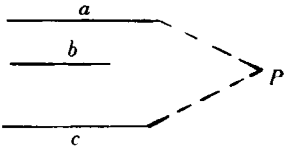


图 1-3-1

例 2. 求证：一个三角形中至少有一个内角大于或等于 $60°$.

已知：$\triangle ABC$.

求证：$\angle A$、$\angle B$，$\angle C$ 中至少有一个$\geqslant 60°$.

证明：如图 1-3-2，假设 $\angle A$，$\angle B$，$\angle C$ 都不大于或等于 $60°$，即都小于 $60°$，

即 $\angle A < 60°$,

$\angle B < 60°$,

$\angle C < 60°$.

三式相加，得

$\angle A + \angle B + \angle C < 180°$.

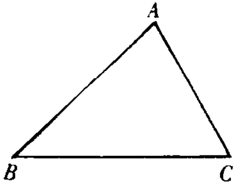


图 1-3-2

这与定理“三角形的三内角之和等于 $180°$”相矛盾，所以，三角形的三个角都不大于或等于 $60°$的假设是错误的，故一个三角形中，至少有一个内角大于或等于 $60°$.

例 3. 证明：在同一平面内，同一条直线的垂线和斜线必

然相交.

已知:在同一平面内,直线 $a\perp l$,直线 b 是 l 的斜线.

求证:a 与 b 必相交.

证明:如图 1-3-3,假定 a 与 b 不相交,由于 a,b 在同一平面内,

$\therefore a/\!/b$,

$\therefore \angle 1=\angle 2$.

$\because a\perp l$,

$\therefore \angle 2=90^\circ$,

$\therefore \angle 1=90^\circ$,

$\therefore b\perp l$.

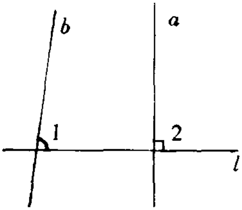


图 1-3-3

这与已知的 b 是 l 的斜线相矛盾.

这一矛盾说明我们假定的 a 和 b 不相交是错误的,所以原命题成立,即 a 与 b 必相交.

§1—4 同一法

同一法是一种间接证明方法.

如果一个命题的题设和结论都是唯一存在的,而且所指的概念是同一概念,同时这个命题的逆命题的题设和结论也都是唯一存在的,而且所指的概念是同一概念,这样的命题和它的逆命题是等价的.原命题和它的逆命题等价的命题称为符合同一原理.

当一个命题不易直接证明,而它又符合同一原理时,我们就可以转而证明它的等价的逆命题,只要这个逆命题真确,原命题也就成立.这种证明方法叫做同一法.