成人高等教育试用教材

经济数学基础(一)

微积分

萧福铨　主编

上海科学技术文献出版社

(沪)新登字301号

经济数学基础(一)
微积分
谢福铨 主编
*
上海科学技术文献出版社出版发行
(上海市武康路2号)
上海中行印刷厂常熟分厂印刷
*
开本787×1092 1/32 印张10.125 字数244,000
1992年6月第1版 1992年6月第1次印刷
印数: 1—5000
ISBN7-5439-0039-4/o·70
定价: 5.00元

前　言

本书是专为成人高等教育财经类专业微积分教学而编写的。它可以作为全日制大学专科班、夜大学、函授大学、职工大学的教材，也可以作为参加统计、会计、工业经济、农业经济等财经类专业和党政干部基础课自学考试的自学用书，对从事实际工作的同志也有参考价值。

本书选材精练、实用。在注意紧扣微积分基本内容的同时，适当删节了部分定理的证明和调整了部分内容的顺序。编写时力求做到文字通俗、条理清楚、重点突出。对基本内容着重分析和总结，对基本方法注意指导和归纳。书末附有习题答案，并附录了集合的简介和初等数学基础知识，以方便自学的同志。

本书由萧福铨主编，参加编写的有张来泰，雍庆生和李国勤。

由于编者水平所限，恳切希望读者对本书的不足之处给予批评指正。

编　者

目　　录

第一章　函　　数

§1　变量及其变化范围

1.1　常量与变量

在考察各种经济活动或从事某种生产活动时，总会遇到各式各样的量，其中有一类量在变化过程中它的值相对保持不变，这一类量称为**常量**．而另一类量的值却时时在变化，称它为**变量**．例如，在讨论某种产品的总成本时，其中由折旧费、企业管理费等构成的**固定成本**由于不随产量的增减而变化，它就是常量．而由原材料费、直接参加生产的工人的工资等构成的**变动成本**由于随产量的增减而变化，它就是变量．自然，常量与变量的区分要根据具体过程作具体分析，同一个量在某个过程中是常量，而在另一个过程中可能是变量．例如，商品价格在较短的时期里可以看作常量，而在一个较长时期里就可能是变量了．另外，在研究某些特定问题时，为了简化讨论，有利于把握事物的本质，也时常将一些变量看作或暂时看作常量．

习惯上以字母a，b，c…表示常量，以x，y，z…表示变量．由实数与数轴上点的一一对应关系，常量可以用数轴的定点表示，变量可以用动点表示．并且在不致于引起混淆的情形下，常常把‘数a’也说成‘点a’．

1.2　区间、邻域

在某个特定的过程中，变量总是在一定的范围内取值．例

如，一昼夜时间的取值总是介于0到24（小时）之间。变量的取值范围称为变量的**变化域**。区间是最常见的变化域。

定义1.1 设a、b是两个实数，且$a<b$，

(1) 满足不等式 $a\leqslant x\leqslant b$的全体实数x称为**闭区间**，记作$[a, b]$。

(2) 满足不等式 $a<x<b$的全体实数x称为**开区间**，记作(a, b)。

在数轴上$[a, b]$和(a, b)都代表以a，b为端点的线段（见图1.1）。一个包括端点，另一个不包括端点。

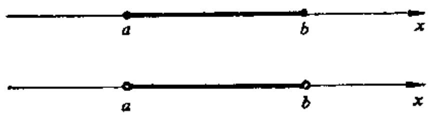

图 1.1

称$(a, b]$和$[a, b)$为**半开（闭）区间**。

满足不等式$x>a$或$x\geqslant a$的全体实数x，和满足不等式$x<a$或$x\leqslant a$的全体实数x也可以分别用$(a, +\infty)$，$[a, +\infty)$和$(-\infty, a)$，$(-\infty, a]$等形式表示；全体实数可用$(-\infty, +\infty)$表示。图1.2是$(-\infty, a)$和$[a, +\infty)$的图形。记号“∞”读作“无穷大”（它的意义将在下一章阐述）。

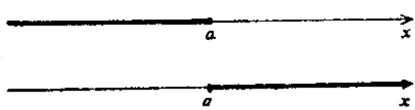

图 1.2

定义1.2 满足不等式$|x-a|<\delta$（δ读作“代尔塔”，表示某个确定的正数）的全体实数x称为**a的δ邻域**。

由绝对值不等式性质可知，它是以a为中心，长度为2δ的开区间$(a-\delta,\ a+\delta)$，见图1.3.

例如，“3的$\frac{1}{2}$邻域”是指满足不等式$|x-3|<\frac{1}{2}$的全体实数，即开区间$(2.5,3.5)$.

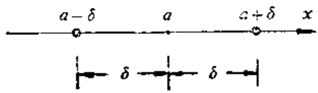

图 1.3

§2 函　　数

2.1 函数概念

在一个特定变化过程中同时出现的一些变量往往是相互联系和互相制约的.

例1 某水泥厂日产水泥量最高可达M吨.已知它的固定成本是C_0（元），且每生产水泥1吨，成本增加a（元），则水泥厂每日的总成本C与产量q的关系是

$$C=C_0+aq$$

等式反映了总成本C与产量q的依赖关系。当q在生产能力容许的范围$[0,M]$内取定某个数值时，总成本C也随之有一个确定的数值与之对应。

例2 为进行市场预测，对某商场上半年度的月营业额作了统计，并列表如下

t（月序）	1	2	3	4	5	6
y（万元）	7.8	9.2	7.3	8.1	6.8	5.4

表格反映了月序t自1至6的任何一个月中其相应营业额y的值。

例3 图1.4中曲线C反映了某种商品的销售收益状况。如

果产品的生产限额是Q，那么当产量X在$(O,Q]$上任取某个定值x时，总有相应的收益值y与其对应.

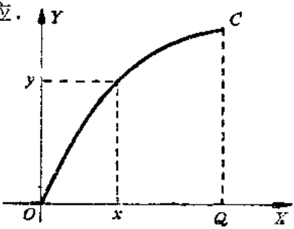

图 1.4

以上三例都按不同形式反映了在三个特定过程中变量与变量间的相互依赖关系。其共同点是：当其中一个变量在一定范围内取某个定值时，另一个变量将按确定的对应法则取定一个相应的值。这种变量间的依赖关系就是下面要讲的函数关系。

定义1.3 设D是非空的实数集合。x和y是两个变量，如果对于x的取值范围D内的每一个值，按照某一个确定的对应法则f，变量y有唯一确定的值与之对应，则称**y是确定在D上的x的函数**。记作

$y=f(x)$　　$x\in D$　（记号$\in$读作"属于"）。　x称为**自变量**，y称为**因变量**，x的取值范围D称为函数的**定义域**。

定义1.4 函数　$y=f(x)$。当自变量x取D中某个定值x_0时，因变量y的相应值称为**$x=x_0$时的函数值．记作**

$f(x_0)$；$f(x)|_{x=x_0}$　或　$y|_{x=x_0}$，

此时也称函数$f(x)$**在x_0处有定义**。

例如，设$f(x)=2x^2-5$。则$f(1)=2\cdot1^2-5=-3$；$[2x^2-5]_{x=a}=2a^2-5$

当自变量x在定义域上取值时，其相应的函数值的全体，称为函数$y=f(x)$的**值域**。

由函数定义可见，定义域和对应法则构成了函数的两大要素。当且仅当定义域相同，且对定义域内的每个相同点都对应着相等的函数值时，才认为函数相同。例如函数$y=\lg x^2$与$y=$

$2\lg x$是不同的函数。因为前者的定义域是$x\neq0$的全体实数，而后者是$x>0$的全体实数。

函数$y=x$与$y=\sqrt{x^2}$虽然有相同的定义域$(-\infty,+\infty)$，但是$y=\sqrt{x^2}=|x|$，当$x<0$时它不等于x而是$-x$。因而它们也不相同。

函数$y=x^2$与函数$u=v^2$虽然变量采用了不同的字母，但是它们却是相同的函数。因为它们有相同的定义域$(-\infty,+\infty,)$且对定义域内每个相同的自变量值都对应着相等的函数值。

对于用算式表示的函数，其定义域如果未作特别指明，则它的定义域是指使算式有意义的自变量值的全体。例如$y=\dfrac{1}{x^2-3x+2}$的定义域是使$x^2-3x+2\neq0$的全体实数，写成区间就是$(-\infty,1)$，$(1,2)$及$(2,+\infty)$。

例4 求下列函数的定义域，并将它表示成区间.

(1) $y=\dfrac{1}{\lg(3x-2)}$， (2) $y=\dfrac{2x}{x^2-5x+6}+\lg(x-1)$，

(3) $y=\arcsin(2+x^2)$。

解 (1) 当$3x-2>0$且$3x-2\neq1$时y才有意义，即$x>\dfrac{2}{3}$且$x\neq1$。因此y的定义域为$(\dfrac{2}{3},1)$及$(1,+\infty)$。

(2) 当$x-1>0$即$x>1$且$x\neq2$，$x\neq3$时才有意义，因此y的定义域为$(1,2)$，$(2,3)$及$(3,+\infty)$。

(3) 因为对任何实数x，恒有$2+x^2>1$.此时按所给的对应法则不存在相应的y值与之对应，因此它不能构成函数。

定义中的对应法则f，可以用算式给出（如例1和例4中的(1)、(2)那样），也可以列表（如例2）或借助于图形（如例3）形式给出。但是当我们同时讨论两个不同的函数时，为区分它们不同的对应法则就要用不同的字母。例如圆的周长C

和圆的面积A都是半径r的函数，就可以用 $C=f(r)=2\pi r$ 和 $A=g(r)=\pi r^2$来区别。

2.2 分段函数

用算式表示的函数中有一种称为**分段函数**。它在定义域的不同部分用不同的算式表示变量的对应法则．例如，$y=|x-1|$就是如此。

$$y=|x-1|=\begin{cases}x-1 & x\geqslant 1\\ 1-x & x<1\end{cases}$$

它的定义域是全体实数$(-\infty,+\infty)$。对应法则是当$x\in[1,+\infty)$时，按算式$y=x-1$确定函数值；当$x\in(-\infty,1)$时，按算式$y=1-x$确定函数值。（见图1.5）。

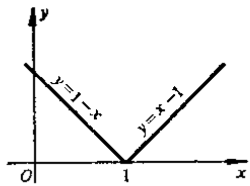

图 1.5

例如，$y|_{x=0}=(1-x)|_{x=0}=1$；$y|_{x=1.5}=(x-1)|_{x=1.5}=0.5$。

注意分段函数是**一个**函数，不能理解为**几个**函数。实际问题常常会遇到这类形式。

例5 某轮船公司规定，在甲、乙两港间旅客托运行李的运价在50kg以内，每公斤按k元计，超过50kg，其超重部分每公斤按0.8k元计，规定托运行李不得超过100kg。试列出运价与行李重量之间的函数关系。

解 设行李重为x(kg)，运价为y（元）。按题意可列得

$$y=\begin{cases}kx & x\in[0,50]\\ 50k+0.8k(x-50) & x\in(50,100]\end{cases}$$

例6 确定函数 $y=\begin{cases}\sqrt{1-x^2} & |x|<1\\ x^2-1 & 1<|x|\leqslant 2\end{cases}$

的定义域，并求 $y\Big|_{x=\frac{1}{2}}$；　$y\Big|_{x=\frac{3}{2}}$；　$y\Big|_{x=3}$

解　函数y在$x=\pm1$处无定义。其定义域为各个分段的合并，即$[-2,\ -1)$，$(-1,\ 1)$及$(1,\ 2]$。

$$y\Big|_{x=\frac{1}{2}}=\sqrt{1-x^2}\Big|_{x=\frac{1}{2}}=\frac{\sqrt{3}}{2};$$

$$y\Big|_{x=\frac{3}{2}}=(x^2-1)\Big|_{x=\frac{3}{2}}$$

$=\dfrac{5}{4}$；由于函数在$x=3$处无定义，因此$y|_{x=3}$无意义。其图形见图1.6。

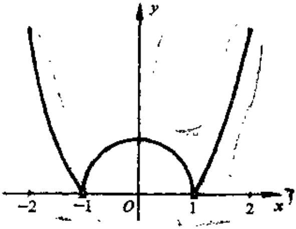

图　1.6

§3　几种常见的函数性态

3.1　函数的有界性

设函数$f(x)$在区间Ⅰ上有定义。若存在某个正数M，使对于任意的$x\in$Ⅰ，恒有

$$|f(x)|\leqslant M$$

则称$f(x)$在Ⅰ上**有界**，也称$f(x)$为Ⅰ上的**有界函数**。否则称$f(x)$在Ⅰ上**无界**或称$f(x)$为Ⅰ上的**无界函数**。

例如，三角函数$\sin x$和$\cos x$对于任意的$x\in(-\infty,\ +\infty)$恒有

$$|\sin x|\leqslant1,\quad |\cos x|\leqslant1.$$

因而它们在整个数轴上有界。

函数 $y=\frac{1}{x}$ 在[1,2]上有界($y\leqslant 1$)，但在(0,1)内无界(因为不存在这样的正数M，使$y\leqslant M$)。

如果$y=f(x)$为 I 上的有界函数，且$|f(x)|\leqslant M$，则其图形将处于直线$y=M$和$y=-M$之间（见图1.7）。

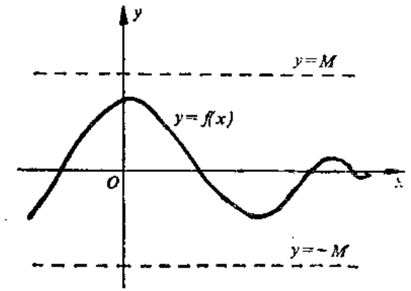

图 1.7

3.2 函数的单调性

设函数$f(x)$在区间 I 上有定义。若对于任意的$x_1<x_2\in \mathrm{I}$，恒有

$$f(x_1)<f(x_2)\ (\text{或} f(x_1)>f(x_2))$$

则称$f(x)$在 I 上**单调增加**（或**单调减少**）。

单调增加和单调减少的函数统称**单调函数**。

例 讨论$y=x^2$的单调性。

解 设x_1，x_2是$(-\infty,0)$内的任意两点，且$x_1<x_2$。由于

$f(x_2)-f(x_1)=x_2^2-x_1^2=(x_2-x_1)(x_2+x_1)<0$，即$f(x_2)<f(x_1)$。因此$y=x^2$在$(-\infty,0)$内单调减少。