中等學校用

葛·斯·密·平面三角學

全一冊

葛蘭維爾　原著

斯密斯
密克許　修訂

金立藩　譯述

中華書局印行

一九五〇年九月七版
中等學校用

葛・斯・密・平面三角學（全一冊）

◎基價十四元三角
（郵運匯費另加）

原著者　葛蘭維爾
修訂者　斯密斯
　　　　密克許
譯述者　金立藩
發行者　中華書局股份有限公司
　　　　上海河南中路二二一號
印刷者　中華書局永寧印刷廠
　　　　上海澳門路四七七號
發行處　各埠中華書局

印數1—3,000

・總目編號・（一二五三二）

原　序

葛氏平面三角學之所以能風行一時,而爲教師及學生所樂於採用者,其特點在簡明之解釋,豐富之例題,以及大量廣遍之應用問題.此等特點,著者於修訂此書時未敢或忘也.本書中所有更改之處,目的在變更其着重之點——即着重三角函數之由於直角三角形所演化者.修訂本中於函數之形式,以簡潔明晰之方式表明之.解釋函數之後,即繼以第四及第五兩章"應用問題,"一章以對數求解,另一章不用對數求解.其後更繼以"三角分析"一章.尤可注意者,此章有數處更改,更足以引起學生之興趣;而於"三角恆等式"及"三角方程式"等,均已重爲修訂.此項編制可使學者在未習三角分析以前,將應用問題完全修畢.

本書與初版同,仍沿用四位數值表.但於葛氏四位數值表中,更加入第*IV*及第*V*兩表;表*IV*係正弦及餘弦之自然值,表*V*係正切及餘切之自然值.此外更加入各表用法之說明.此二表上所列之數值,均與原有其他諸表一致,在計算上可至四位準確度.另一着重點,即在原有諸表與新加入二表中,凡未將四位有效數字表出者,均加以如何求得此四位有效數字方法之說明.

本書所有習題內之角度,仍根據初版之意旨,用度及分

數或度及度之小數部份表明之.至量角之方法,則悉憑教師選擇,蓋表中之數值,對於任何一種習題均能引用也.

目　次

第一章　三角函數

第二章　基本關係式;減角公式

第三章　線值定義及圖解

第四章　應　用

第五章 對數之理論及應用

第六章 三角分析

第七章 近於0°或90°之銳角

第八章 公式摘要

[附錄] 四位數值表

表 I

表 II

表 III

表 IV

表 V

葛·斯·密·平面三角學

第一章　三角函數

1. 三角學. 在三角學中,吾人所研究之數量,常稱之為三角函數(trigonometric functions).本章之目的,卽在說明此等函數之定義,及其初步應用之方法.

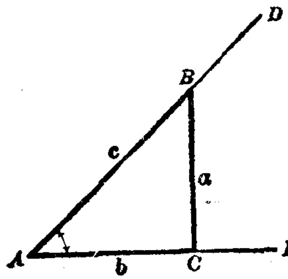
2. 變數;常數. 問題中所含有之數量,非為變數,卽屬常數.吾人對於此二種數量之意義,必須得一明晰之區別.變數(variable) 者,可視之為無限個多之數量,在問題中可代表任何數值.通常以英文字母之末尾數字,如 x, y, z 等表示之.

常數 (constant) 之值,在一個問題中,固定不變.數值常數或絕對常數(numerical or absolute constants),在任何習題中,其所表之值常屬一定,如 2, 5, $\sqrt{7}$, π 等.此等常數,恆以英文之首數字母,如 a, b, c 等表示之.

3. 函數. 變數之函數者,其數值恆隨此變數之值而改變.正方形之面積,為其一邊長度之函數;球形之體積,為其直徑之函數.同理,三項式 x^2-7x-6, 亦為 x 之函數,因此一三項式之數值,須視 x 之值而定.在三角函數中,其變數卽為角之度量,因此等函數之值,常隨其所設角之大小而定也.目前,吾人暫以度制表示角之大小;以後,再討論角之第二種量度法.

4. 銳角之三角函數. 兩線間交角之概念,諒讀者已熟習之矣;此與初等平面幾何學中所示者,其意義相同.本節吾人卽就銳角而論列之.

設令 EAD 爲小於 $90°$ 之角,此卽爲一銳角.自此角之一邊上,任取一點 B,向其他一邊作一垂線,卽成一直角三角形,如 ABC.在此三角形中,以英文之大寫字母 A, B, C 表各角之度量,以小寫字母 a, b, c 表其相對邊之長度*.吾人在幾何學中,已習知此一三角形之邊與角均有相互之關係.三角學之發軔,卽在研究此項邊角關係之準確性,並使用邊之比值以達此目的.此等邊之比值,卽稱爲**三角函數**.茲將任一銳角如 A 之六個三角函數舉之如下:



$\sin A$, 讀作 "A 之正弦";

$\cos A$, 讀作 "A 之餘弦";

$\tan A$, 讀作 "A 之正切";

$\csc A$, 讀作 "A 之餘割";

$\sec A$, 讀作 "A 之正割";

$\cot A$, 讀作 "A 之餘切".

此等三角函數(比值)之定義,可述之如下(參閱上圖)

(1) $\sin A = \dfrac{\text{對邊}}{\text{斜邊}} \left(= \dfrac{a}{c}\right)$; (4) $\csc A = \dfrac{\text{斜邊}}{\text{對邊}} \left(= \dfrac{c}{a}\right)$;

(2) $\cos A = \dfrac{\text{鄰邊}}{\text{斜邊}} \left(= \dfrac{b}{c}\right)$; (5) $\sec A = \dfrac{\text{斜邊}}{\text{鄰邊}} \left(= \dfrac{c}{b}\right)$;

(3) $\tan A = \dfrac{\text{對邊}}{\text{鄰邊}} \left(= \dfrac{a}{b}\right)$; (6) $\cot A = \dfrac{\text{鄰邊}}{\text{對邊}} \left(= \dfrac{b}{a}\right)$.

在上述之定義中,有一顯而易見而又極重要之事項;卽上列任一函數之數值,祇視 A 角之大小而定,與垂線之端點

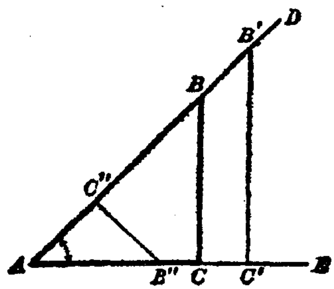
*除特別情形外,普通恆以小寫字母 c 表直角三角形之斜邊,以大寫字母 C 表直角.

B 之位置無關.

令 B' 為 AD 上之其他任一點,而 B'' 為 AE 上之任一點.作 $B'C'$ 及 $B''C''$ 各垂直於 AE 及 AD.則此三個三角形 $ABC, AB'C', AB''C''$, 因皆含有一直角及一公共角 A, 故均為互等角三角形而相似,且有相似比

$$\frac{BC}{AB}=\frac{B'C'}{AB'}=\frac{B''C''}{AB''}.$$

上列諸比式,均為"A 之正弦".吾人可由同法證明其他諸函數亦有此相同之性質.由此可知三角函數與直角三角形之大小無關,蓋三角函數之意義,乃各邊相對長度之比值,故各邊之真實長度,並不視為重要.



惟讀者所宜注意者,即以上六個比值中之每一數值,均隨 A 角之數量而更變.

以上所述之六個三角函數(比值),實為研究三角學之重要基礎.讀者於上述六個函數之定義,若不徹底了解,而欲作進一步之探討,實不可能.然苟能注意第一縱行之三函數各為第二縱行三函數之逆數,則記憶亦甚簡易.因

$$\sin A=\frac{a}{c}=\frac{1}{\frac{c}{a}}=\frac{1}{\csc A};\qquad \csc A=\frac{c}{a}=\frac{1}{\frac{a}{c}}=\frac{1}{\sin A};$$

$$\cos A=\frac{b}{c}=\frac{1}{\frac{c}{b}}=\frac{1}{\sec A};\qquad \sec A=\frac{c}{b}=\frac{1}{\frac{b}{c}}=\frac{1}{\cos A};$$

$$\tan A=\frac{a}{b}=\frac{1}{\frac{b}{a}}=\frac{1}{\cot A};\qquad \cot A=\frac{b}{a}=\frac{1}{\frac{a}{b}}=\frac{1}{\tan A}.$$

若應用定義(1)至(6)於上圖之銳角 B 上,則對邊 $=AC=$

b,鄰邊$=BC=a$.故

$$\sin B=\frac{b}{c};\qquad \csc B=\frac{c}{b};$$

$$\cos B=\frac{a}{c};\qquad \sec B=\frac{c}{a};$$

$$\tan B=\frac{b}{a};\qquad \cot B=\frac{a}{b}.$$

設與 A 角之諸函數比較之,可知

$$\sin A=\cos B;\qquad \csc A=\sec B;$$

$$\cos A=\sin B;\qquad \sec A=\csc B;$$

$$\tan A=\cot B;\qquad \cot A=\tan B.$$

因 $A+B=90°$ (此卽 A 與 B 互爲餘角),故上列之結果,可簡述之如下:

定理. 一銳角之函數等於其餘角之餘函數* (co-function.)

上述定理可錄之如下:

$$\sin A=\cos(90°-A);\qquad \csc A=\sec(90°-A);$$

$$\cos A=\sin(90°-A);\qquad \sec A=\csc(90°-A);$$

$$\tan A=\cot(90°-A);\qquad \cot A=\tan(90°-A).$$

例 1. 一直角三角形 $a=3$, $b=4$; 試計算 A 角之諸函數.

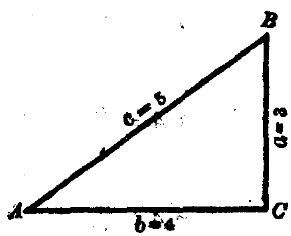
解. $c=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{9+16}=\sqrt{25}=5$.

應用公式(1)至(6),

$$\sin A=\frac{3}{5};\qquad \csc A=\frac{5}{3};$$

$$\cos A=\frac{4}{5};\qquad \sec A=\frac{5}{4};$$

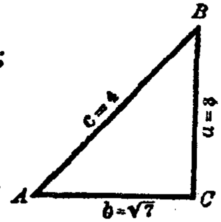
$$\tan A=\frac{3}{4};\qquad \cot A=\frac{4}{3}.$$



*正弦與餘弦謂之互爲餘函數.同理,正切與餘切以及正割與餘割,亦均互爲餘函數.

試再求 B 角之諸函數,並比較其結果.

例2.　一直角三角形 $a=3,\ c=4$;試計算 B 角之諸函數.



解.　$b=\sqrt{c^2-a^2}=\sqrt{16-9}=\sqrt{7}.$

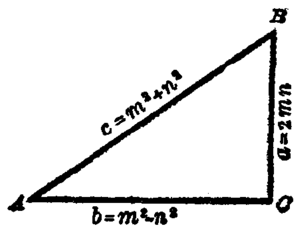
$$\sin B=\frac{\sqrt{7}}{4}=0.66;\quad \csc B=\frac{4}{\sqrt{7}}=\frac{4\sqrt{7}}{7}=1.51;$$

$$\cos B=\frac{3}{4}=0.75;\quad \sec B=\frac{4}{3}=1.33;$$

$$\tan B=\frac{\sqrt{7}}{3}=0.88;\quad \cot B=\frac{3}{\sqrt{7}}=\frac{3\sqrt{7}}{7}=1.14.$$

試再求 A 角之諸函數,並比較其結果.

例3.　一直角三角形中,$a=2mn,\ b=m^2-n^2$;試計算 A 角之諸函數.



解.　$c=\sqrt{a^2+b^2}$

$$=\sqrt{4m^2n^2+m^4-2m^2n^2+n^4}$$

$$=\sqrt{m^4+2m^2n^2+n^4}=m^2+n^2.$$

$$\sin A=\frac{2mn}{m^2+n^2};\quad \csc A=\frac{m^2+n^2}{2mn};$$

$$\cos A=\frac{m^2-n^2}{m^2+n^2};\quad \sec A=\frac{m^2+n^2}{m^2-n^2};$$

$$\tan A=\frac{2mn}{m^2-n^2};\quad \cot A=\frac{m^2-n^2}{2mn}.$$

例4.　設一直角三角形中,$\sin A=\frac{4}{5},\ a=80$;試求 c.

解.　由公式(1)知

$$\sin A=\frac{a}{c}.$$

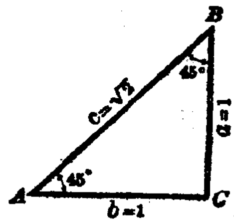
以 $\sin A$ 及 a 之值代入,則得

$$\frac{4}{5}=\frac{80}{c};$$

解之,　　$c=100.$　(答).

5. 45°, 30°, 60° 之函數.　用三角法解習題時,45°,30°,及 60° 之角為最常遇到,故必須求得此等角度之三角函數值而熟

記之.



***a.* 求45°角之諸函數.** 作一等腰直角三角形,如ABC,則

$$\angle A=\angle B=45^\circ.$$

吾人已知三角函數爲三角形中各邊相對長度之比值,對於各邊之眞實長度並不重要.故可以任何長度假設此等腰直角三角形之各邊,愈簡愈妙.

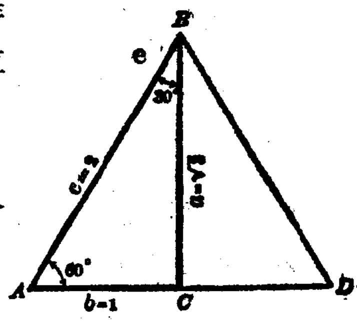
設令其短邊之長度爲單位長,卽令$a=1$, $b=1$.

則 $c=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{2}$, 因此

$$\sin 45^\circ=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2};\qquad \csc 45^\circ=\sqrt{2};$$

$$\cos 45^\circ=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2};\qquad \sec 45^\circ=\sqrt{2};$$

$$\tan 45^\circ=1;\qquad \cot 45^\circ=1.$$



***b.* 求30°及60°角之諸函數.** 作一等邊三角形ABD.自B作BC垂直AD,則在三角形ABC中,

$$\angle A=60^\circ,\qquad \angle ABC=30^\circ.$$

仍令其最短邊爲單位長,卽令$b=1$. 則$c=AB=AD=2AC=2b=2$,

又 $a=\sqrt{c^2-b^2}=\sqrt{4-1}=\sqrt{3}$.

故
$$\sin 60^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2};\qquad \csc 60^\circ=\frac{2}{\sqrt{3}}=\frac{2\sqrt{3}}{3};$$

$$\cos 60^\circ=\frac{1}{2};\qquad \sec 60^\circ=2;$$

$$\tan 60^\circ=\sqrt{3};\qquad \cot 60^\circ=\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

同理,在同三角形中,

$$\sin 30^\circ=\frac{1}{2};\qquad \csc 30^\circ=2;$$

$$\cos 30^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2};\qquad \sec 30^\circ=\frac{2}{\sqrt{3}}=\frac{2\sqrt{3}}{3};$$

$$\tan 30^\circ=\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3};\qquad \cot 30^\circ=\sqrt{3}.$$

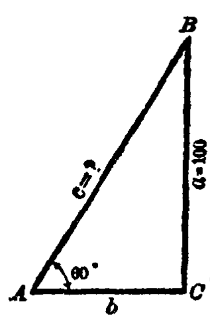
玆將此等結果列表如下:*

角	*sin*	*cos*	*tan*	*cot*	*sec*	*csc*
30°	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{3}$	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	2
45°	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	1	$\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$
60°	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	2	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$

讀者須熟習此45°直角三角形及30°, 60°直角三角形之諸函數. 但此等函數亦毋須強記,吾人可於直角三角形之圖形中直接求得之.

例. 設一直角三角形之$A=60^\circ$, $a=100$; 試求c.

解. 因A角爲已知,故A之任一函數亦爲已知. A角之餘割中,含有一已知之a, 及一所求之c, 吾人卽可應用此餘割之公式而求得c之值.



$\csc A=\frac{c}{a}$.　　　第2頁公式(4)

以$a=100$, 及上表中之$\csc A=\csc 60^\circ=\frac{2\sqrt{3}}{3}$

*爲便於記憶起見,可視第一縱行(或*sin*縱行)之各數$\sqrt{1}$, $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, 各爲2所除.

第二縱行(或*cos*縱行)之各數與第一縱行各數之順序適相反.

第三縱行(或*tan*縱行)之各數,可視爲以第二縱行各數除第一縱行各數而得.