高等数学

（干部班适用）

卷二

王渠芳 王载舆 刘宝三
胡淑洪 程紫明 钱文侠 编

人民教育出版社

本书初版于1958年出版，现由原编者根据一年以上的试用情况作了一次修订。新修订版分为二卷出版，而原来在编写方面的特点则仍予保留。本书为第二卷，其主要内容有：空间解析几何、多元函数、重积分、曲线积分与曲面积分及无穷级数。

本书适用于干部班学员，也可以作为业余大学的教材及干部自学用书。

高等数学

（干部班适用）

卷二

王築芳 王载舆 刘宝三 胡淑洪 程紫明 钱文俠 编

人民教育出版社出版
新华书店北京发行所发行
湖南省新华印刷二厂印装

开本 850×1168 1/32 印张 6.625 字数 178,000
1961年12月第1版 1981年9月第12次印刷
印数 71,201—88,200
书号 13012·0529 定价 0.60元

009598

卷二目录

第十三章　空間直角坐标系

13-1. 空間直角坐标

空間解析几何是用代数方法来研究空間的几何問題的。首先須解决怎样用数来确定空間点的位置。例如，气象台放出一个气球，要想說明某时刻气球的位置，只說明多高，或是只說明离气象台多远，还都不能达到目的。但如果說：以气象台为标准向北五百米，向东三百米，离地面四百米，这样就确定了气球在空中的位置。由此就引出空間直角坐标的概念。

空間坐标的規定如下：取三条具有共同原点且互相垂直的数軸，三条数軸的正向配置如图 13.1 所示。这样就确定了一个空間的直角坐标系。三条数軸称为坐标軸，它們的共同原点称为直角坐标系的原点，任意两坐标軸构成的平面叫做坐标面。如图 13.1 所示，O 是原点，OX, OY, OZ 是坐标軸，平面 XOY, YOZ 及 ZOX 是坐标面。通常采用的就是这种坐标系。这种坐标系叫做右手系或右旋系。

設 M 为空間的一点，过 M 向 XOY 面上作垂綫，垂足为 P（图 13.1)。在平面 XOY 上 P 点的坐标 x 和 y 分别称为 M 点的横坐标与纵坐标。若 M 在 XOY 面上方，MP 的长度就叫 M 的竖坐标；若 M 在 XOY 面下方，則 MP 的长度前边加負号称为 M 的竖坐标。竖坐标用 z 表示。点 M 記作 $M(x, y, z)$。

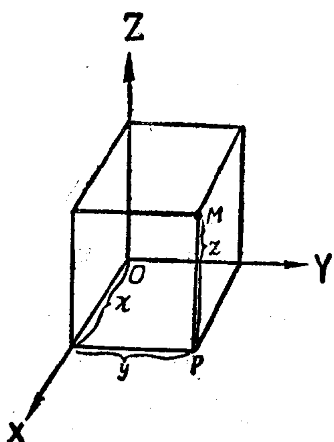

图 13.1

显然：相交于一点的三个互相垂直的坐标平面把空間分成八个部分(如图 13.2)，叫做卦限，关于每一部分(卦限)里的点M，对它的坐标x, y, z的符号作如下规定：

1° M在YOZ平面之前，x为正；在后x为负。

2° M在XOZ平面之右，y为正；在左y为負。

3° M在XOY平面上方，z为正；在下z为負。

空間的点与数組(x, y, z)的一一对应关系也和平面上的相似：在坐标空間中选定一点，就能得到三个有次序的数来表示它的位置；反过来說，給定有先后次序的三个数x, y, z，必能找到一点，使第一个坐标为x，第二个坐标为y，第三个坐标为z。

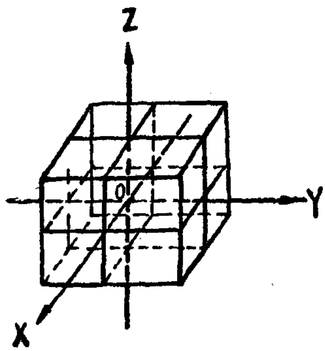

图 13.2

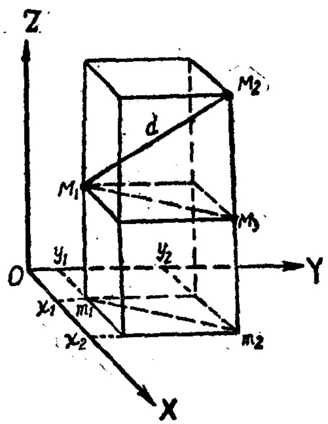

图 13.3

13-2. 空間解析几何中的两个簡单問題

(一) 任意两点間的距离

設空間有两点$M_1(x_1, y_1, z_1)$，$M_2(x_2, y_2, z_2)$。求此两点間的距离d。設两点在XOY面上的垂足各为m_1，m_2。过M_1作M_1M_3平行于m_1m_2(图 13.3)。由于$\triangle M_1M_2M_3$为直角三角形，所以得

$$d=\sqrt{(M_1M_3)^2+(M_3M_2)^2}=\sqrt{(m_1m_2)^2+(M_3M_2)^2}. \quad (13.1)$$

其中 m_1, m_2 各为平面上的点，由平面解析几何求平面上两点间的距离公式知

$$(m_1m_2)^2=(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2. \quad (13.2)$$

又由图可看出

$$m_1M_1=m_2M_3=z_1,$$

而 $$M_3M_2=m_2M_2-m_2M_3=z_2-z_1,$$

所以得出 $$(M_3M_2)^2=(z_2-z_1)^2. \quad (13.3)$$

以(13.2)及(13.3)代入(13.1)得

$$d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}. \quad (13.4)$$

由此可得出任一点$M(x, y, z)$到原点的距离为

$$d=\sqrt{x^2+y^2+z^2}. \quad (13.5)$$

例 1. 已知两点$(-1, 0, 2)$, $(3, -2, 4)$；求此两点間的距离。

解：将两点坐标代入公式(13.4)，得

$$d=\sqrt{(3+1)^2+(-2-0)^2+(4-2)^2}=$$
$$=\sqrt{24}=2\sqrt{6}=4.9.$$

例 2. 求点$(3, 4, 5)$到原点的距离。

解：将两点坐标代入公式(13.5)，得

$$d=\sqrt{3^2+4^2+5^2}=\sqrt{50}=5\sqrt{2}=7.07.$$

（二）綫段的定比分点

設已知两点 $M_1(x_1, y_1, z_1)$及 $M_2(x_2, y_2, z_2)$，連接成一綫段，求在此綫段上滿足 $\frac{M_1M}{MM_2}=\lambda$ 的点M的坐标 x, y, z。和平面解析几何相仿，有

$$x=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda}, \quad y=\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}, \quad z=\frac{z_1+\lambda z_2}{1+\lambda}. \quad (13.6)$$

若 $\lambda=1$，即 $M_1M=MM_2$，在几何意义上，M 就是 M_1M_2 的中点，这时得到求綫段中点的公式如下：

$$x=\frac{x_1+x_2}{2},\quad y=\frac{y_1+y_2}{2},\quad z=\frac{z_1+z_2}{2}. \tag{13.7}$$

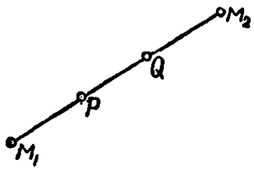

图 13.4

例 1. 已知空間两点 $M_1(1, 2, -4)$ 及 $M_2(2, 3, 0)$，求此綫段的三等分点的坐标。

解：設綫段中两个分点各为 $P(x, y, z)$ 及 $Q(x', y', z')$（图 13.4），易知：

$$\frac{M_1P}{PM_2}=\frac{1}{2},\quad \frac{M_1Q}{QM_2}=\frac{2}{1};$$

所以 P 点的坐标为

$$x=\frac{1+1}{1+\frac{1}{2}}=\frac{4}{3},\quad y=\frac{2+\frac{3}{2}}{1+\frac{1}{2}}=\frac{7}{3},\quad z=\frac{-4+0}{1+\frac{1}{2}}=\frac{-8}{3};$$

Q 点的坐标为

$$x'=\frac{1+4}{1+2}=\frac{5}{3},\quad y'=\frac{2+6}{1+2}=\frac{8}{3},\quad z'=\frac{-4+0}{1+2}=\frac{-4}{3}.$$

13-3. 曲面与方程

和平面解析几何相仿，空間解析几何利用空間坐标法，把由点构成的几何图形和代数表达式联系起来。空間解析几何也研究两方面的問題，就是：知道了几何关系来建立方程和由已知方程来研究图形。現在用几个例子来說明第一方面的問題，第二方面的問題在第十六章中讲述。

把曲面看作空間动点 $M(x, y, z)$ 的軌迹，根据动点运动規律，得到一个含 x, y, z 的方程 $F(x, y, z)=0$。在曲面上的点，其坐标都滿足这个方程，同时坐标滿足方程的点都在曲面上，此方程叫做曲面的方程。因此要検驗点是否在曲面上，只要把点的坐标代入方程，看它是

否满足此方程即可。若满足方程則說明該点在曲面上，若不满足方程則說明該点不在曲面上。建立曲面方程的方法則和平面解析几何建立曲綫方程的方法相似。

例 1. 設有与两定点 $A(-1,0,4)$和 $B(1,2,-1)$等距离的点的軌迹，試建立它的方程。

解：和平面解析几何中的方法相仿，由已知条件来建立曲綫方程，分成如下几个步驟：

1° 設$M(x,y,z)$为曲面上动点。

2° 由条件得

$$|MA|=|MB|.$$

3° 引入坐标得

$$|MA|=\sqrt{(x+1)^2+y^2+(z-4)^2},$$

$$|MB|=\sqrt{(x-1)^2+(y-2)^2+(z+1)^2};$$

于是

$$\sqrt{(x+1)^2+y^2+(z-4)^2}=\sqrt{(x-1)^2+(y-2)^2+(z+1)^2}.$$

两端平方后，化簡得

$$4x+4y-10z+11=0.$$

事实上，这就是 A, B 两点的联綫的垂直平分面的方程。

例 2. 求以定点 $C(a,\ b,\ c)$ 为中心，以 R 为半徑的球面的方程。

解：

1° 設$M(x,y,z)$为球面上动点。

2° 由立体几何知，球面上任一点至中心的距离等于半徑，即

$$|MC|=R.$$

3° 引入坐标得

$$|MC|=\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2},$$

于是

$$\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2}=R.$$

两边平方得

$$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2. \tag{13.8}$$

如果球心在原点,则得

$$x^2+y^2+z^2=R^2. \tag{13.9}$$

(13.8)为球面方程的标准形式,(13.9)则为球面方程的最簡形式。

例 3. 檢驗下列各点是否在球面 $(x-1)^2+(y+2)^2+(z-3)^2=5^2$ 上:

$$(1)\ M_1(1,0,3),\ (2)\ M_2(1,1,7).$$

解: 根据曲面与其方程的概念, 将点的坐标代入球面方程, 看是否滿足。将M_1的坐标代入球面方程, 若該点在球面上,則应有

$$(1-1)^2+(0+2)^2+(3-3)^2=5^2,$$

但

$$0+4+0\neq 25,$$

M_1的坐标不滿足此球面方程, 故知 M_1不在球面上。将 M_2的坐标代入球面方程的左端,得

$$(1-1)^2+(1+2)^2+(7-3)^2,$$

化簡得

$$0+9+16=25=5^2.$$

M_2的坐标滿足此球面方程,故知M_2在球面上。

总 結

空間解析几何的基本問題,是由点与坐标的关系,規定曲面及其方程, 并运用坐标方法研究空間曲面和曲綫性质。其中有以下的两个簡单問題:

1. 任意两点間的距离。

两点 $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$間的距离 d 为

$$d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}.$$

空間任一点$M(x, y, z)$至原点的距离 d 为

$$d=\sqrt{x^2+y^2+z^2}.$$

2. 綫段的定比分点

已知綫段两端点坐标 $M_1(x_1, y_1, z_1)$ 及 $M_2(x_2, y_2, z_2)$。一点将此綫段所分成的比为 $\lambda=\dfrac{M_1M}{MM_2}$。求分点 $M(x, y, z)$。

$$x=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda},\quad y=\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda},\quad z=\frac{z_1+\lambda z_2}{1+\lambda}.$$

若分点 M 为綫段中点，則其坐标公式如下：

$$x=\frac{x_1+x_2}{2},\quad y=\frac{y_1+y_2}{2},\quad z=\frac{z_1+z_2}{2}.$$

曲面方程的建立方法和平面解析几何曲綫方程的建立法相似，步驟如下。

1° 設 $M(x, y, z)$ 为曲面上的动点。

2° 根据几何条件建立等式关系。

3° 用坐标 x, y, z 代入等式，化簡卽得所求曲面方程。

按上法建立的球面方程如下：

中心在 $M(a, b, c)$ 而半徑为 R 的球面方程为：

$$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2.$$

于特例，中心在原点而半徑为 R 的球面方程为：

$$x^2+y^2+z^2=R^2.$$

問題和习題

1. 若 P 在 XOY 面上，z 之值如何？P 在 YOZ 面上，x 之值如何？P 在 ZOX 面上，y 之值如何？

2. 若 P 在 X 軸上，y 及 z 之值如何？若 P 在 Y 軸上，x 及 z 之值如何？若 P 在 Z 軸上，x 及 y 之值如何？

3. 一长方六面体有一頂点在原点，三棱长各为 a, b, c（均为正），求各頂点的坐标。

4. 已知空間两点的坐标，如何求其距离？

5. 已知两定点 M_1, M_2，如何求定比分点的坐标？

6. 求 $M_1(1, -2, 2)$，$M_2(3, 1, -4)$ 間的距离。　　答：7。

7. 将 $M_1(0, -1, 3)$ 和 $M_2(2, 3, -4)$ 間的联綫分成定比 $\lambda=\frac{1}{2}$，求分点坐标。

答：$\left(\frac{2}{3},\ \frac{1}{3},\ \frac{2}{3}\right)$.

8. 已知两点(3, 2, −1)与(4, −2, 6)，求其联綫的中点及三等分点。

答：$\left(3\frac{1}{2},\ 0, 2\frac{1}{2}\right)$; $\left(3\frac{1}{3},\ \frac{2}{3},\ 1\frac{1}{3}\right)$, $\left(3\frac{2}{3},\ -\frac{2}{3},\ 3\frac{2}{3}\right)$.

9. 描出下列各点，并計算各点与諸軸的垂直距离，及其与原点的距离。

(1) (0, 0, 4), (2) (0, −2, 0), (3) (3, 0, 5),

(4) (7, 3, 0), (5) (−2, −1, 4), (6) (6, 4, −2).

10. 已知长方体一个对角綫的两端坐标为(0, 0, 0)与(3, 6, 7)。試画此长方体，使其諸棱在坐标平面上或平行于坐标平面。

11. 求由各軸至各点 (a, b, c), $(a, b, -c)$, $(a, -b, c)$, $(-a, b, c)$, $(-a, b, -c)$, $(a, -b, -c)$, $(-a, b, c)$, $(-a, -b, -c)$ 的垂直距离及由原点至各点的距离。各点中哪几对点对于坐标平面对称？哪几对点对于坐标軸对称？哪几对点对于原点对称？

12. 过点(−6, 5, 2)平行于Y軸引一直綫。求此直綫上距原点为 9 的点的坐标。

13. 設該綫平行于X軸；該綫平行于Z軸；分别解出上題。

14. 曲面方程是怎样建立的？試举一例以說明。

15. 适合于 $x=y$ 的点，在空間应有怎样的位置？

16. 描述动点的軌迹，設該点按下述规则而移动：

(1) 与Y軸的垂直距离为 3。

(2) 与原点的距离为 6。

(3) 与坐标平面 XOY 及 YOZ 的垂直距离相等。

(4) 与坐标平面 ZOX 的垂直距离为 5。

17. 以原点为中心，以R为半径的球面方程如何？

18. 以 XOY 坐标面上一点为中心，以R为半径的球面方程如何？

19. 求一动点与两定点$P(0, 1, 2)$, $Q(2, -3, 0)$等距离的点的軌迹。

答：$x-2y-z-2=0$.

20. 求一动点到两定点$(C, 0, 0)$, $(-C, 0, 0)$两个距离的比为一常数 k 的軌迹方程。

答：$x^2+y^2+z^2+\frac{2C(k^2+1)}{k^2-1}x+C^2=0$.

21. 一动点与点(6, 8, 10)的距离为 5，与 XOY 面的距离为 8，求此动点的軌迹方程。

22. 球的半径为 3，且中心在点(0, −1, 2)，求此球面方程。

23. 求球面方程 $4x^2+4y^2+4z^2-8x-16y+16=0$ 的球心坐标及半径。

答：球心(1, 2, 0)，半径为 1.

24. 球面过原点和点(2, 0, 0), (1, 1, 0), (1, 0, −1)，求此球面方程。(提示：設球面方程为：$x^2+y^2+z^2+Ax+By+Cz+D=0$) 答：$x^2+y^2+z^2-2x=0$.

25. 求以点(−3, 4, 2)与(7, −2, 6)的联綫为直径的球面方程。

答：$x^2+y^2+z^2-4x-2y-8z-17=0.$

26. 球心在点(3, 2, 7)且球面过点(5, --3, 8)，求此球面方程。

答：$x^2+y^2+z^2-6x-4y-14z+32=0.$

27. 求过四点(2, 0, 0)，(0, −4, 0)，(0, 0, 4)，(8, 0, 0)的球面方程。

28. 求距点(5, 0, 0)及(−5, 0, 0)距离之和为 20 的点的軌迹方程。

答：$3x^2+4y^2+4z^2=300.$

29. 求与点(−4, 3, 4)的距离等于其与 XOY 平面的距离的点的軌迹方程。

30. 有一动点，其与各坐标平面之距离之和等于其与原点之距离，求此动点的軌迹方程。

答：$xy+yz+zx=0.$

第十四章　矢量代数

在一些物理量中，如溫度，质量，密度等，都可以用一个数值来表示；但如力，位移，速度，加速度等，除以数值来表示外，还须要規定它的方向。为此，我們規定：有大小和方向的量叫矢量也叫向量，并且认为：方向相同长度相等的两个矢量是相等的，在这种意义下的矢量叫自由矢量。以后所讲的矢量都指自由矢量，用 $\boldsymbol{a}$ 表示。其长度用 $|\boldsymbol{a}|$ 表示。矢量的长度又叫矢量的模。因为矢量的概念是由物理量抽象而来，所以它的运算也要按照其物理意义来規定。

14-1. 矢量的綫性运算

矢量的綫性运算是指矢量加，減及乘常数这三种运算。力的合成与分解即是矢量的加、減法的例子。

(一) 矢量加法

設有两个力 $\boldsymbol{a}$ 及 $\boldsymbol{b}$，求其合力。方法是把矢量中的一个經过平移，使 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ 的起点放在一起，再以 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 为边作一平行四边形，如图 14.1，平行四边形对角綫所表示的矢量，就是合力，表示为 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$。这个方法叫平行四边形法。

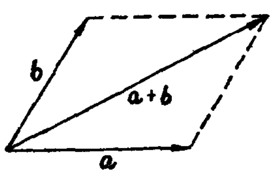

圖 14.1

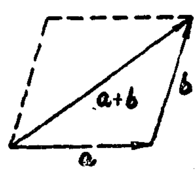

圖 14.2

或者，經过平移把 $\boldsymbol{b}$ 的起点放在 $\boldsymbol{a}$ 的終点上，則由 $\boldsymbol{a}$ 的起点到 $\boldsymbol{b}$ 的終点的矢量叫 $\boldsymbol{a}$ 及 $\boldsymbol{b}$ 的和，这叫三角形法，如图 14.2。显然，两者

表示的和是相同的。三角形法是常用的方法。

对于两个以上的矢量求和，可以根据上述的运算加以推广。例如，設有五个矢量 $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{a}_4, \boldsymbol{a}_5$。求它們的和的运算方法如下：經过平移将 $\boldsymbol{a}_2$ 的起点放在 $\boldsymbol{a}_1$ 的終点上，再将 $\boldsymbol{a}_3$ 的起点放在 $\boldsymbol{a}_2$ 的終点上，……，如此继續作下去，最后連 $\boldsymbol{a}_1$ 的起点到 $\boldsymbol{a}_5$ 的終点所得的矢量，即为所求各矢量的总和，如图 14.3。

（二）矢量减法

已知合力 $\boldsymbol{a}$ 及其一分力 $\boldsymbol{b}$，求另一分力。方法是把 $\boldsymbol{a}$ 及 $\boldsymbol{b}$ 的起点放在一起，把 $\boldsymbol{b}$ 的終点和 $\boldsymbol{a}$ 的終点联結起来，所得的矢量就是 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的差，即另一分力，用 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ 表示，如图 14.4。因为矢量减法可看作矢量加法的逆运算，所謂求 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的差，就是要找一个 $\boldsymbol{c}$ 使 $\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}$，由图可以看出，这个 $\boldsymbol{c}$ 就是从 $\boldsymbol{b}$ 的終点联到 $\boldsymbol{a}$ 的終点而成的矢量。

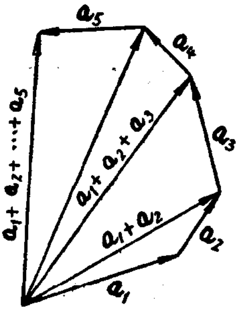

圖 14.3

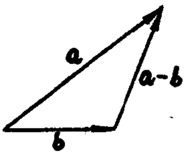

圖 14.4

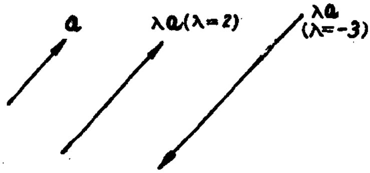

圖 14.5

（三）矢量乘以常数

矢量 $\boldsymbol{a}$ 乘以常数 λ 的意义如下：当 $\lambda>0$ 时，$\lambda\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 的方向相同；当 $\lambda<0$ 时，$\lambda\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 方向相反，它們的模都是 $|\lambda|\,|\boldsymbol{a}|$，如图 14.5。

14-2 矢量投影·方向余弦。

（一）矢量在軸上的投影及有关投影的主要定理

設有一矢量 $\boldsymbol{c}$，其始点及終点各为 A, B，如果只考慮大小及方向，作为矢量的几何表示可称为有向綫段，記作 $\overrightarrow{AB}$。过其始点及終点 A, B 各作一平面垂直于 u 軸，与 u 軸交于 a，b。由 a 到 b 的方向与 u 軸的方向一致时 ab 为正，否則为負。此 ab 的代数值叫 $\boldsymbol{c}$ 在 u 軸上的投影，記作 $(\overrightarrow{AB})_u$，如图 14.6。

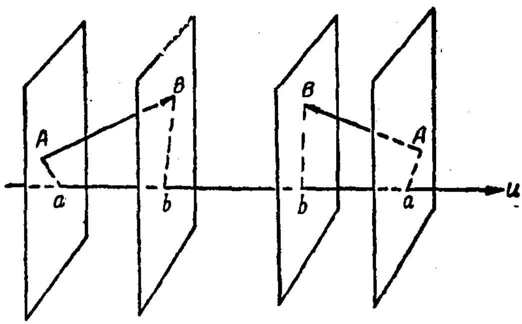

图 14.6

在計算矢量投影时，需要知道两个矢量之間的夹角，今規定空間两矢量 $\boldsymbol{u}_1$，$\boldsymbol{u}_2$ 的夹角为：由空間任一点 O 引两矢量 $\overrightarrow{OP}$，$\overrightarrow{OQ}$ 各平行于矢量 $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2$，如图 14.7。其間夹角就是两矢量 $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2$ 間的夹角。

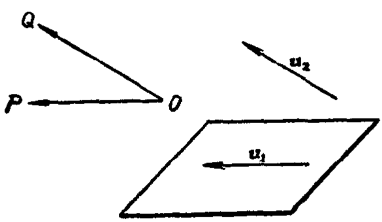

图 14.7

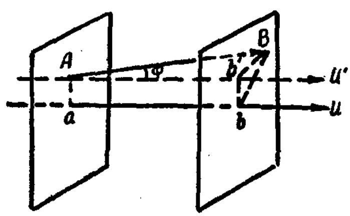

图 14.8

常用到的投影定理有二：

定理一：矢量 $\boldsymbol{c}$（表为 $\overrightarrow{AB}$）在 u 軸上的投影等于它的长度乘以夹角 φ 的余弦（如图 14.8），即

$$(\overrightarrow{AB})_u = |\overrightarrow{AB}| \cos\varphi. \tag{14.1}$$

因为，过A作u'軸平行于u軸，$\overrightarrow{AB}$ 在u軸上的投影 ab 等于 $\overrightarrow{AB}$ 在u'軸上的投影Ab'，又u'軸垂直于过B点的平面。故$\triangle Ab'B$为直角三角形，而

$$Ab'=|\overrightarrow{AB}|\cos\varphi,$$

即

$$(\overrightarrow{AB})_u=|\overrightarrow{AB}|\cos\varphi.$$

定理二：諸矢量之和(表为 $\overrightarrow{AD}$) 在u軸上的投影等于各矢量在該軸上的投影之和(图 14.9 表示三个矢量 $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CD}$ 之和在u軸上的投影)。

$$(\overrightarrow{AD})_u=(\overrightarrow{AB})_u+(\overrightarrow{BC})_u+(\overrightarrow{CD})_u. \tag{14.2}$$

由图 14.9，即可看出右端各矢量投影之和为 $ab+bc+cd$；而 $\overrightarrow{AD}$ 在u軸上的投影也正是如此。

已知矢量两端点坐标，求該矢量在坐标軸上的投影。

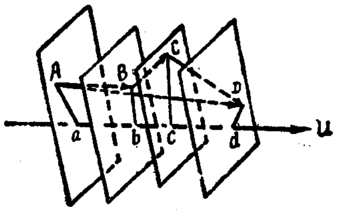

图 14.9

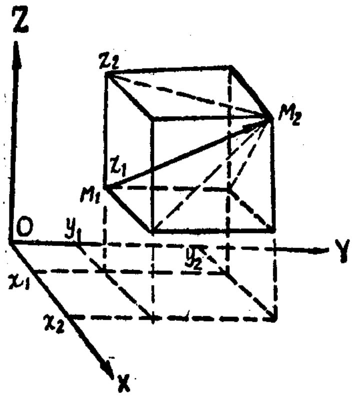

图 14.10

設矢量 $\boldsymbol{a}$ 的两端点各为 $M_1(x_1,y_1,z_1)$, $M_2(x_2,y_2,z_2)$。如图 14.10。显然 $\overrightarrow{M_1M_2}$ 在坐标軸上的投影 X, Y, Z 各为：

$$X=x_2-x_1;\quad Y=y_2-y_1;\quad Z=z_2-z_1. \tag{14.3}$$

（二）矢量的方向余弦

要想确定空間矢量的方向，就需要知道矢量与三个坐标軸正向的

夹角 α, β, γ; 这三个角叫做矢量的方向角（規定方向角在 0 与 π 之間)。方向角的余弦 $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$, 叫做矢量的方向余弦，如图 14.11。

矢量的起点如果不在原点时，可以从原点引一矢量与該矢量平行。两者与坐标軸的夹角是相同的(图 14.12)。

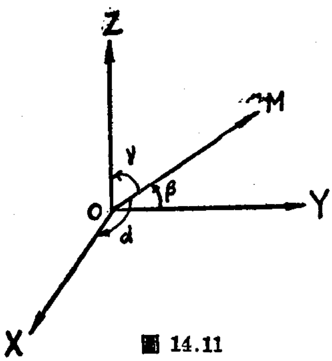

圖 14.11

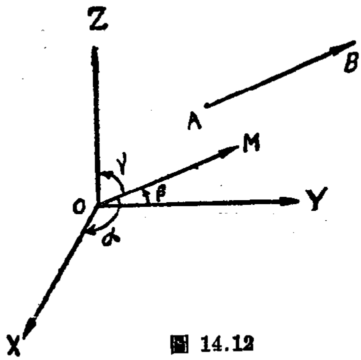

圖 14.12

(i) 方向余弦間的公式。

設有一矢量 $\overrightarrow{OM}$, 长度为 l, 方向角为 α, β, γ。M 在坐标軸上的投影各为 P, Q, R (图 14.13)。由公式(14.1)得:

$$OP = l\cos\alpha,\quad OQ = l\cos\beta,\quad OR = l\cos\gamma.$$

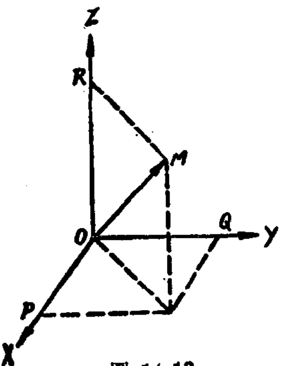

圖 14.13

所以点 M 的坐标为:

$$(l\cos\alpha,\quad l\cos\beta,\quad l\cos\gamma).$$

但由 M 到原点的距离即是矢量的长度。由公式(13.5)

$$l^2 = (l\cos\alpha)^2 + (l\cos\beta)^2 + (l\cos\gamma)^2,$$

即:

$$l^2 = l^2(\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma).$$

两边消去 l^2 得: