

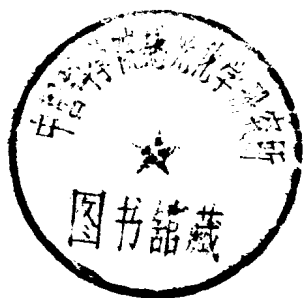
生物数学概论

杨纪珂 齐翔林 陈 霖 编译

科学出版社

生物数学概论

杨纪珂 齐翔林 陈霖 编译



科学出版社

1982

内 容 简 介

现代生物学的发展愈来愈多地要求用数学的方法进行定量研究,建立数学模型,以揭示生命现象的本质。本书就是针对这种需要,根据 E. Batschellet 的《Introduction to Mathematics for Life Scientists》和 S. I. Rubinow 的《Introduction to Mathematical Biology》编译而成。全书共分两部分:第一部分主要介绍应用于生物学的数学,简明扼要、深入浅出地引进了一些数学的基本概念和方法,并列举了大量的生物学例子,使具有初等数学水平的人也能较快地理解;第二部分主要介绍数学在生物学中的应用,如细胞增长、酶动力学、生理系统中的示踪物、生物流体力学、生物学中的扩散作用等。每章末附有习题,书后附有习题解答。可供生物学、医、农大专院校的师生、研究生及有关科技工作者参考。

生 物 数 学 概 论

杨纪珂 齐翔林 陈 霖 编译
责任编辑 马素卿

科 学 出 版 社 出 版

北京朝阳门内大街 137 号

中国科学院印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售

*

1982 年 9 月第 一 版 开本: 850×1168 1/32

1982 年 9 月第一次印刷 印张: 25 5/8

印数: 0001—7,200 字数: 676,000

统一书号: 13031·1763

本社书号: 2669·13—10

定 价: 4.70 元

编译者的话

“生物数学”是应用数学中新兴起来的一个数学分支。生物学是研究自然界中生命活动的学科，数学则是研究自然界中数量关系和空间形式的学科，这两门学科长期以来联系甚少，直到近几十年来随着生物学实验中大量采用先进的电子和光学仪器及记录设备，使观察和测试手段大为改进，并且逐渐积累了大量数据，迫切要求利用各种数学工具为生物学的研究建立数学模型，以揭示其生物现象的本质。从而使得生物学由一门定性的描述性学科走向了定量的精确性的学科，特别是电子计算机的飞速发展和大规模地推广应用，为生物学和数学之间的相互渗透提供了良好的条件。然而，现代生物学的发展也势必要求从事这一领域研究的生物学家尽快地了解和掌握一些基本的数学概念和方法，以便与渗透到这一领域的数学工作者密切协作。为此，我们为已从事多年生物学研究，又缺乏数学基础知识的研究者提供一本简明的速成数学的课本。

本书主要依据 E. Batschelet 《Introduction to Mathematics for Life Scientists》和 S. I. Rubinow 《Introduction to Mathematical Biology》合编而成，但有些章节作了必要的删改和补充，在写法上力求通俗易懂，深入浅出，许多重要概念主要用大量生物学例子来说明，避免数学上的枯燥推导，即使具有初等数学水平的同志也能够学会和掌握一些高等数学的基本概念和方法。

本书分为两大部分，第一部分共十五章，主要介绍了应用于生物学中的数学，诸如：实数、集合、函数、极限、微积分、微分方程、矩阵代数、概率、复数。第二部分共五章，主要介绍了数学在生物学中的应用，包括有细胞增长、酶动力学、在生物系统中的示踪物、生物流体力学、生物学中的扩散作用。每章末附有习题，它既作为

练习又可作为对正文的补充。书后给出习题解答，其中有一部分是原书中没有的，而是编译者给出的。

由于编译者学识和经验有限，书中不免有错误或不当之处，恳切地希望读者批评指正。

在此，对参加审校工作的赵冠美同志表示谢意。

编译者

目 录

第一部分 应用于生物学的数学

第一章 实数	1
1.1 分类与度量	1
1.2 百分率的使用问题	2
1.3 相对数字	4
1.4 不等式	5
1.5 平均数	5
1.6 求和	6
1.7 幂	7
1.8 近似计算	11
1.9 总结	13
习题	14
第二章 集与符号逻辑	17
2.1 “新数学”	17
2.2 集	17
2.3 记法和符号	18
2.4 可变元素	21
2.5 余集	21
2.6 并集	22
2.7 交集	23
2.8 符号逻辑	26
2.9 否定与蕴涵	29
2.10 布尔代数	31
习题	35
第三章 关系与函数	38
3.1 前言	38
3.2 积集	38

3.3	关系	41
3.4	函数	44
3.5	一种特殊的直线函数	48
3.6	一般线性函数	51
3.7	直线关系	56
	习题	60
第四章	幂函数和有关的函数	65
4.1	定义	65
4.2	幂函数的例子	66
4.3	多项式	72
4.4	差分	73
4.5	一个应用例子	76
4.6	二次方程	78
	习题	79
第五章	周期函数	81
5.1	引言与定义	81
5.2	角度	82
5.3	极坐标	84
5.4	正弦函数与余弦函数	86
5.5	极坐标的变换	89
5.6	直角三角形	94
5.7	三角函数间的关系	100
5.8	极图	101
5.9	三角多项式	103
	习题	109
第六章	指数函数和对数函数 I	111
6.1	序列	111
6.2	指数函数	114
6.3	反函数	115
6.4	对数函数	120
6.5	几例应用	122
6.6	感觉等级	124

6.7 螺线	128
习题	131
第七章 图解法	134
7.1 非线性尺度	134
7.2 半对数图	137
7.3 双对数图	139
7.4 三角图	142
7.5 算图(或列线图)	144
习题	149
第八章 极限	153
8.1 数列的极限	153
8.2 某些特殊的极限	160
8.3 级数	162
8.4 函数的极限	168
8.5 Fibonacci 数列	173
习题	177
第九章 微分和积分计算	180
9.1 增长率	180
9.2 微分	188
9.3 反导数	195
9.4 求和	196
9.5 积分	202
9.6 二阶导数	208
9.7 极值	214
9.8 连续函数的平均值	222
9.9 微小的变化	227
9.10 计算积分的方法	229
习题	232
第十章 指数和对数函数 II	236
10.1 前言	236
10.2 $1/x$ 的积分	236
10.3 $\ln x$ 的性质	239

10.4	$\ln x$ 的反函数	240
10.5	幂函数的一般定义	242
10.6	自然对数与常用对数之间的关系	244
10.7	微分和积分	244
10.8	某些极限	246
10.9	应用	247
10.10	指数函数的近似和级数	253
10.11	双曲函数	256
	习题	258
第十一章 常微分方程		263
11.1	前言	263
11.2	几何说明	263
11.3	微分方程 $y' = ay$	265
11.4	微分方程 $y' = ay + b$	275
11.5	微分方程 $y' = ay^2 + by + c$	280
11.6	微分方程 $y' = ky/x$	286
11.7	线性微分方程组	289
11.8	非线性微分方程组	296
11.9	微分方程的分类	300
	习题	301
第十二章 多元函数		305
12.1	前言	305
12.2	偏导数	307
12.3	极大与极小	310
12.4	偏微分方程	315
	习题	320
第十三章 矩阵与矢量		323
13.1	一些记号	323
13.2	矩阵代数	325
13.3	空间矢量	334
13.4	应用	341
13.5	行列式	350

13.6	矩阵的逆运算	358
13.7	线性相关	361
13.8	特征值与特征向量	367
	习题	371
第十四章 概率		376
14.1	引言	376
14.2	事件	377
14.3	概率	379
14.4	概率加法定理	380
14.5	条件概率和概率乘法定理	383
14.6	全概率公式	389
14.7	排列、组合	390
14.8	随机变量	394
14.9	离散型随机变量及其分布	395
14.10	连续型随机变量及其分布	409
	习题	418
第十五章 复数		421
15.1	前言	421
15.2	复平面	421
15.3	代数运算	425
15.4	复变量的指数与对数函数	428
15.5	二次方程	432
15.6	振荡	434
	习题	442

第二部分 数学在生物学中的应用

第十六章 细胞增长		444
16.1	指数增长或衰减	444
16.2	增长率或衰减率的确定	447
16.3	细胞的营养摄取	449
16.4	微生物菌落的生长	452
16.5	细胞的连续培养	458
16.6	相互作用的种群: 猎手-食饵系统	465

16.7 在细菌增长中的突变与回复	473
习题	479
第十七章 酶动力学	487
17.1 Michaelis-Menten 定理	487
17.2 酶控反应的早期动性	492
17.3 酶-底物-抑制剂系统	497
17.4 酶的合作性质	501
17.5 合作型的二聚蛋白质	508
17.6 变构酶	513
17.7 其它变构理论	521
17.8 血红蛋白	523
17.9 图论与稳态酶动力学	528
17.10 酶-底物-调节物系统	532
17.11 酶-底物-激活剂系统	537
17.12 天冬氨酸转氨甲酰酶	540
习题	543
第十八章 生理系统中的示踪物	547
18.1 分域系统	547
18.2 单分域系统	550
18.3 指示剂稀释理论	552
18.4 连续注入法	556
18.5 两分域系统	560
18.6 有漏洞的分域与封闭系统	565
18.7 指数剥离的方法	568
18.8 肌酸酐周转的两分域系统	570
18.9 “浸出”实验	572
18.10 三分域链状系统	578
18.11 n 分域系统	583
习题	589
第十九章 生物流体动力学	599
19.1 粘滞流体的运动方程	599
19.2 Poiseuille 定律	602

19.3	血液的性质	605
19.4	血液通过血管的稳定流股	609
19.5	脉冲波	615
19.6	微生物的游泳	620
	习题	633
第二十章	生物学中的扩散作用	640
20.1	扩散作用的 Fick 定律	640
20.2	Fick 原理	642
20.3	一维单位源的扩散方程解	646
20.4	扩散常数	649
20.5	动物的嗅觉信息传递	656
20.6	膜运输	659
20.7	通过平板的扩散	666
20.8	对流运输: 在一根轴突中的离子流	673
20.9	正态分布	678
20.10	超速离心作用	680
20.11	沉降速度法	686
20.12	Lamm 方程的一个近似解	692
20.13	沉降方程	697
20.14	经过毛细管的交换	705
	习题	709
习题解答		722
附表		791
表 1	x 的平方	791
表 2	x 的平方根	793
表 3	三角函数表	797
表 4	x 的常用对数	798
表 5	x 的自然指数函数	800
表 6	x 的自然对数	801
表 7	二项分布 $\binom{n}{k} p^k q^{n-k}$	802
表 8	Poisson 分布概率 $e^{-m} m^k/k!$	803
表 9	正态分布	804
表 10	随机数表	805

第一部分 应用于生物学的数学



第一章 实 数

本章的目的是温习一下初等代数中的定律和法则，并对一些在数学教科书中往往被忽视的重要概念加以说明。

1.1 分类与度量

把事物分类是最简单的度量方法，诸如对生物物种分门别类、对动物的不同习性分类、或者在各种气候条件间予以区别，这些都是在名称的水平上，而缺乏定量的资料。对物体给以名称、记以符号、编以号码，无非是为了分类，则这种最原始一种度量尺度就称为名称尺度。

如果能成功地把事物排成秩次，那就有了一种更有用的度量方法。例如，一位医学工作者分辨清楚了几种类别的由于某些化合物的过度消耗所引起的肾脏失效，他就可以按照病情的严重程度把几种类别排成秩次。比如，“正常”记为 0，“略微失效”记为 1，“中等失效”记为 2，“严重失效”记为 3。这样就引入了次序尺度。但要注意，秩次之差并不等于各类之间的差别就相等。

若所用的尺度具有有意义的区间时，就称之为区间尺度。比如，高度就是典型的区间尺度。其基准零高度是可以任意选定的，像地平面、海拔等，但无论什么高度，都是以精确定义的量度的高度差来计，而它与所选定的基准无关。

还有一种更为有用的尺度，比如，看一物体的重量，对此并不需要定人为的零点，而它具有自然的基准点。由此之故，如果说一种动物的体重为另一种动物的一倍，或说体重增长了百分之二，都

是有意义的.这是因为两个重量的比值或百分比有其真实的意义.这种尺度就称之为比例尺度.

综上所述,将其不同类型的度量尺度及其它们的性质列于表中:

度量的水平	性 质
名称的	不表示其秩次
次序的	有秩次,但区间无定义
区间的	有秩次,区间有定义,基准点由人定,比值无意义
比例的	有秩次,区间有定义,基准点是绝对的,比值和百分比有意义

1.2 百分率的使用问题

$20\% + 20\% = 44\%$ 对吗? 当然不对.然而有不少的初学者却碰到类似的矛盾结果. 假设有位生物学家研究一匹马驹的生长. 当他开始这项工作时,马驹重 50kg ,一个月后重量增加了 50kg 的 $1/5$,达于 60kg . 假定再过一个月体重又增加了 20% ,于是有的就说成“总的增加率为 $20\% + 20\% = 40\%$ ”的趋向,但实际的计算得出了不同的结果: 60kg 的 20% 是 12kg ,所以应该达于 72kg ,它比原来的 50kg 重了 22kg ,也就是增加了 44% (见图 1.1).

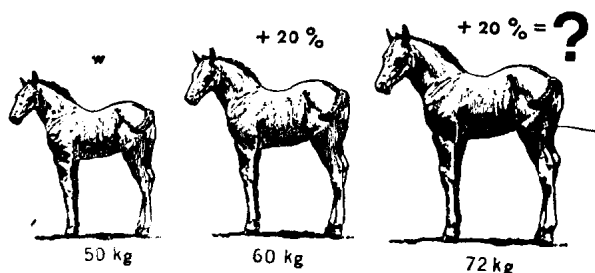


图 1.1 一匹马驹的生长

从直观上看,两次的增重必须相加.可是一种在直观上的相加性不一定就是在代数学上严谨意义上的那种加法.对此例应该

这样处理，令 w 为此马驹的初始体重。一个月之后的体重增至 $w + 0.2w$ 即 $1.2w$ ，故在经过一个月的生长之后需把体重乘以 1.2。同样的方法施之于第二个月的生长，结果所得的体重为

$$1.2 \times 1.2w = 1.44w = w + \frac{44}{100}w.$$

若把上例普遍化，可仍令 w 记为初始的数量，视具体情况而定。设 p 为增加的百分率，则增量为 $(p/100)w$ 。于是初始量增大到：

$$w + \frac{p}{100} \cdot w = w \left(1 + \frac{p}{100} \right). \quad (1.1)$$

算第二次增量后之量，则须再乘以 $1 + (p/100)$ ，从而得出

$$\left[w \left(1 + \frac{p}{100} \right) \right] \left(1 + \frac{p}{100} \right), \quad (1.2)$$

此式简化为
$$w \left(1 + \frac{p}{100} \right)^2. \quad (1.3)$$

同样的算法可多次继续下去，在经过了 n 个时间间隔后，得出的总量应为：

$$w \cdot \left(1 + \frac{p}{100} \right)^n. \quad (1.4)$$

在使用百分率时，一定要注意它只能用于那些可以在一个比例尺度上度量的数量。比如在日常生活中或报刊宣传上，往往用百分率来描述所发生的变化，诸如：说某种洗衣粉清洁能力提高 10%，某发动机的噪声水平降低 40%，诸如此类的讲法是不很恰当的。因此，在使用百分率时要根据不同情况进行仔细研究。

又如一个比例尺度在数学和物理上虽然是成立的，但在生物学上未必恰当。以听觉为例，小孩听到的频率高达 20,000Hz (1Hz = 每秒振动一周) 的声波，这个上限随年龄的增长而下降，一位四十岁的人超过 16,000Hz 的声波就听不大清楚了。如果说他的听觉丧失了一个 4,000Hz 的范围，也就是丧失了 20% 的听力，这可能使他感到吃惊。可是用这种方法衡量我们的耳朵是错

误的。在两个音调之间的区间是以它的频率之比度量的。因此，其丧失应由比值 $20,000:16,000 = 5:4$ 度量之。在音乐中这是个小的区间，称为三度音（相当于从“1”到“3”的区间）。如果跟我们所能听到的 10 个八度音相比，所丧失的听觉对我们生命几乎无关。

1.3 相对数字

把数字互相比较时，经常要注意它们的正负值。显然 -5°C 的温度跟 $+5^{\circ}\text{C}$ 的很不相同，因此，我们所碰到的都是相对数字。温度坐标如何把相对数字沿一条直线而排列，可看图 1.2 所示的实数线。各数均由线上的点代表之。按规则把正数作在零点的右边，而把负数作在零点的左边。实数是有序的。在右边的数字总是大于左边的，而左边的数字总是小于右边的。于是“ b 大于 a ”就可写成

$$b > a. \quad (1.5)$$

符号 $>$ 和 $<$ 为“大于”或“小于”，其开口一边面向较大数字，尖头一端面向较小数字。

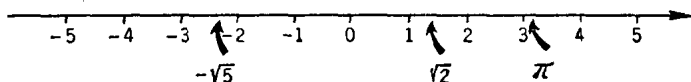


图 1.2 实数线

两个温度 -5°C 和 $+5^{\circ}\text{C}$ 在实数线上距 0°C 点等距离。为了表明这一事实，说这两个温度具有相同的绝对值。更确切地说，一个正数的绝对值就是数字本身，但一个负数的绝对值就是与它相反的正数。于是绝对值可写作：

$$|+5| = +5 \quad | -5| = +5$$

数 0 既非正数也非负数。定义 $|0| = 0$ 。显然，距 0 的距离越远，其绝对值就越大。

数字 0 在除法中起着一种特殊的作用。诸如 $0/5 = 0$ 和

$0/(-7) = 0$ 等除法不成问题,因其逆运算有意义,但当分母为零就不好办了,如 $5/0$ 并不是一个数字,因为没有有一个数 x 可以满足 $x \cdot 0 = 5$ 的逆运算. $0/0$ 也没有任何意义,因为其逆运算 $x \cdot 0 = 0$ 对任何数字 x 均属正确. 切注意不要除以零.

凡是知道符号 ∞ 的读者也许会写出 $3/0 = \infty$, 但这样做是不正确的,理由有二:第一, ∞ 不是个数字,因此不适宜于使用等号. 第二, 如果 $3/0 = \infty$ 属实, 那么 $3/0 = -\infty$ 也属实. 这点将在 8.4 节得到澄清.

1.4 不 等 式

由不等号组成的数学方程式称为不等式,如 $3x - 5 < x + 3$. 在解不等式时,要记住以下的法则: (1) 不等式两边同时加或减同一个数其不等号方向不变. (2) 不等式两边同时乘或除同一个正数时,仍保持原来的不等性;若其两边同时乘或除同一个负数后,则不等号要反向.

还须注意绝对值不等式,如

$$|x| < \sqrt{2}, \quad (1.6)$$

就意味着 x 是在实数线 $-\sqrt{2}$ 与 $\sqrt{2}$ 之间的任何数.

$$\text{即} \quad -\sqrt{2} < x < \sqrt{2}. \quad (1.7)$$

$$\text{而} \quad |x| > \sqrt{2}, \quad (1.8)$$

$$\text{就是说} \quad x > \sqrt{2} \text{ 或 } x < -\sqrt{2}.$$

1.5 平 均 数

在对一项实验重复多遍后得到一系列测量值,当所研究的测量值是在一个区间尺度或比例尺度上度量的话,那么由于各次测量值有所变异,则用其平均数也就是算术平均来表征它. 如测量值有两个,为 x_1 和 x_2 则定义: