



# 工程师机械振动学

赵淳生 汪凤泉 陈卫东 编译

南京工学院出版社

# 工程师机械振动学

赵淳生 汪凤泉 陈卫东 编译

南京工学院出版社

## 内 容 摘 要

本书系统地阐述了线性振动的基本理论和振动工程中的近代分析方法，其中近似法和数值法特别适用于现代计算机的数字运算；本书还简要地介绍了近代振动的测试方法与测试系统。本书所包含的100多个习题及其分析解答，以及书末所附12个用BASIC语言编制的基本振动分析计算程序，均有实用参考价值。

本书适用于理工科院校有关专业的高年级本科生、研究生、教师以及从事飞机、导弹、航天器、机床、汽车、船舶、电气工程、工程机械、建筑、土木工程等工作的工程师。

责任编辑 徐步政

责任校对 张燕明

## 工 程 师 机 械 振 动 学

赵厚生 汪凤泉 陈卫东 编译

南京工学院出版社出版

南京市四牌楼2号

海军医专印刷厂印刷 江苏省新华书店发行

开本 787×1092毫米 1/32 印张 11 5/16 字数 264千

1988年4月第1版 1988年4月第1次印刷

印数 1—4000册

ISBN 7-81023-070-x

TH·76

定价：2.10元

## 序

本书原版“线性振动学”(Mecanique des vibrations lineaires)由法国国立应用科学院(Institut Nationale des Sciences Appliquees)工程力学系M.Lalanne教授等所著,1980年由法国权威(MASSON)出版社出版。该书曾分别在法国巴黎、美国纽约、西班牙巴塞罗那、意大利米兰等地发行,颇受西欧和美国振动工程界的好评。1983年,美国特福茨大学工程学院F.C.Nelson教授又对该书进行了修正和补充,译成英文出版,并改名为“工程师机械振动学”(Mechanical Vibrations for Engineers)。

该书有如下五个显著的特点:

第一,该书的内容既简明又系统,而且强调实际。它包括了现代振动工程中的各种分析和试验方法,便于有关工程技术人员阅读、理解和应用。

第二,该书不同于当前流行的振动学,并不偏重于精确解的经典方法,而是优先使用近似的和数字的方法,便于应用现代各类电子计算机。

第三,该书对振动设备和现代测试系统都作了必要的和富有实用价值的介绍。

第四,该书所包含的100多个习题中,大多数是富有实用价值的,而且全部习题均附有答案,多数习题还列有详细的解题步骤。

第五,本书附有12个用BASIC语言编制的基本振动分析程序,有助于从事实际工作的工程师们应用微机求解有关的一些基本振动问题。

鉴于上述特点并征得原作者同意后，本书编译者根据两种文版对照译成中文，并针对我国振动工程中的实际情况，对原著的第一章、第三章、第四章、第六章的部分内容作了一些修改和补充，编译成书在我国出版。本书编译者为南京航空学院赵淳生博士、南京工学院汪凤泉副教授和南京航空学院教师陈卫东同志。书稿曾由深圳航空公司尹传家工程师进行过详细的校对。

我相信，本书将有助于工科院校本科生对振动课程的学习，而且可作为振动专业研究生和机械工程师的参考书。

我祝贺本书的出版！希望国内同行能喜欢这本书，并从中得到裨益。

南京航空学院教授

张阿舟

1987年2月

# 目 录

<b>第一章 单自由度系统</b> .....	(1)
§ 1.1 自由振动 .....	(1)
§ 1.2 强迫振动 .....	(7)
§ 1.3 实际系统中的阻尼 .....	(19)
§ 1.4 瑞利法 .....	(22)
§ 1.5 应用 .....	(24)
习题.....	(27)
<b>第二章 两自由度系统</b> .....	(50)
§ 2.1 无阻尼系统 .....	(50)
§ 2.2 阻尼系统 .....	(61)
§ 2.3 吸振器 .....	(65)
习题.....	(68)
<b>第三章 N自由度系统</b> .....	(89)
§ 3.1 矩阵特性 .....	(89)
§ 3.2 频率和振型的计算 .....	(95)
§ 3.3 对激振力的响应.....	(109)
习题 .....	(113)
<b>第四章 连续系统</b> .....	(143)
§ 4.1 杆、轴和梁的运动方程.....	(143)
§ 4.2 频率、振型和正交性.....	(148)
§ 4.3 近似方法.....	(158)
§ 4.4 对激振力的响应.....	(161)
§ 4.5 板的动能和应变能.....	(163)

§ 4·6	板的频率和振型, 对激振力的响应·····	(166)
§ 4·7	旋转部件的动能和应变能·····	(171)
	习题·····	(176)
<b>第五章</b>	<b>有限元法</b> ·····	<b>(214)</b>
§ 5·1	方程的推导·····	(214)
§ 5·2	频率和振型, 对激振力的响应·····	(226)
§ 5·3	结构修改·····	(228)
§ 5·4	子结构法·····	(231)
	习题·····	(237)
<b>第六章</b>	<b>试验方法</b> ·····	<b>(263)</b>
§ 6·1	传感器·····	(263)
§ 6·2	激振器·····	(272)
§ 6·3	测试·····	(274)
<b>第七章</b>	<b>计算程序</b> ·····	<b>(288)</b>
§ 7·1	语言和注解·····	(288)
§ 7·2	程序说明·····	(292)
§ 7·3	程序清单·····	(305)

# 第一章 单自由度系统

机械振动是一种特殊的运动形式，它是机器或结构物在其平衡位置附近所做的往复运动。为了便于分析讨论，通常根据机械振动的不同特征可分类如下：

1. 按振动系统的自由度数，可将机械振动分为单自由度系统振动、多自由度系统振动和连续系统振动；

2. 按振动产生的不同原因，可将机械振动分为自由振动、受迫振动和自激振动；

3. 按振动的运动规律，可将机械振动分为周期振动、非周期振动和随机振动等；

4. 按振动系统的参数，可将机械振动分为线性振动和非线性振动；

5. 按系统在振动时变形的特征，可将机械振动分为扭转振动、纵向振动与横向振动等。

本书将以线性机械系统为对象，以第一种分类形式为基础，按离散系统、连续系统和简单结构顺序来逐一进行讨论。

单自由度系统的研究是分析机械振动现象（例如共振、阻尼和强迫响应等）的入门，又是研究多自由度系统特性的基础，而且也可作为许多实际结构的一级近似。同时它还有助于理解广泛使用的测量仪器，诸如压电晶体加速度计、电动式拾振器等等。

## § 1.1 自由振动

单自由度系统如图1.1所示。假定系统的运动仅仅沿着铅垂方向。并令 $x$ 为质量 $m$ 的位移（从静平衡位置算起）， $k$ 为弹簧



刚度； $c$ 为阻尼器的粘性阻尼系数，则弹簧作用在质量上的力为 $-kx$ ，阻尼器作用在质量上的力为 $-cx$ ，作用在质量上随时间变化的外力为 $F(t)$ 。

根据牛顿力学，可写出系统的运动微分方程为

$$m \ddot{x} = -c\dot{x} - kx + F(t) \quad (1.1)$$

对于外力为零时的自由振动，上式可改写为常系数线性微分方程

$$m \ddot{x} + c\dot{x} + kx = 0 \quad (1.2)$$

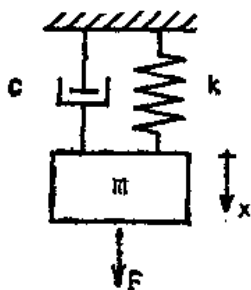


图 1.1 具有粘性阻尼的单自由度系统

上式的解可表为指数形式

$$x = Ae^{r_1 t} \quad (1.3)$$

将它代入式(1.2)即得特征方程

$$mr^2 + cr + k = 0 \quad (1.4)$$

它所具有两个根 $r_1$ 和 $r_2$ 为

$$r_{1,2} = \frac{1}{2} \left[ -\frac{c}{m} \pm \sqrt{\left(\frac{c}{m}\right)^2 - \frac{4k}{m}} \right] \quad (1.5)$$

故式(1.2)的解可写成

$$x = A_1 e^{r_1 t} + A_2 e^{r_2 t} \quad (1.6)$$

最好将上面的解 $r_1$ 和 $r_2$ 表成某一种形式,以便使参数的测定变得十分容易。于是先分别定义参数 $\omega$ 和 $\alpha$ 为

$$\omega^2 = \frac{k}{m} \quad (1.7)$$

$$\alpha = \frac{c}{c_0} \quad (1.8)$$

其中 $\omega$ 为圆频率,其单位是弧度/秒; $\alpha$ 为粘性阻尼比; $c_0$ 为临界阻尼系数,它可借助于式(1.5)中的判别式为零而导出如下:

$$\left(\frac{c_0}{m}\right)^2 - \frac{4k}{m} = 0 \quad (1.9)$$

$$c_0 = 2\sqrt{km} = 2m\omega \quad (1.10)$$

从而可得

$$c = 2m\alpha\omega \quad (1.11)$$

$$\alpha = \frac{c}{2\sqrt{km}} \quad (1.12)$$

利用式(1.7)和(1.11),将式(1.5)改写为

$$r_{1,2} = -\alpha\omega \pm \omega\sqrt{\alpha^2 - 1} \quad (1.13)$$

由此清楚地表明:图1.1所示系统的特性完全由参数 $\alpha$ 和 $\omega$ 所确定,而微分方程式(1.2)的解的形式又依赖于参数 $\alpha$ 。下面就按 $\alpha$ 的不同值分三种情况来进行讨论。

### 一、 $\alpha < 1$ (欠阻尼) 的情形

在实际中,这是最重要的情况,此时式(1.13)变为

$$r_{1,2} = -\alpha\omega \pm j\omega\sqrt{1 - \alpha^2} \quad (1.14)$$

而

$$j = \sqrt{-1} \quad (1.15)$$

于是通解(1.6)可写为

$$x = A_1 \exp[-\alpha\omega t + j\omega\sqrt{1-\alpha^2}t] + A_2 \exp[-\alpha\omega t - j\omega\sqrt{1-\alpha^2}t] \quad (1.16)$$

从而得到更恰当的形式

$$\begin{aligned} x &= Ae^{-\alpha t} \sin(\omega\sqrt{1-\alpha^2}t + \psi) \\ &= Ae^{-\alpha\omega t} \sin(\omega_d t + \psi) \end{aligned} \quad (1.17)$$

其中

$$\omega_d = \omega\sqrt{1-\alpha^2} \quad (1.18)$$

它是阻尼系统的圆频率。类似的分析给出： $\omega$ 是无阻尼系统的圆频率。待定常数 $A$ 和 $\psi$ 由两个初始条件（初始时刻为 $t_0$ 时的位移 $x_0$ 和速度 $\dot{x}_0$ ）来确定。

此外，我们还可以引入频率 $f$ ，其单位用赫兹表示，它与圆频率的关系是

$$\omega = 2\pi f \quad (1.19)$$

而振动周期为

$$T = \frac{1}{f} \quad (1.20)$$

但在实际中常常用得比较多的是频率 $\omega$ 和 $f$ 。

本章，我们将严格区分 $\omega$ （圆频率）和 $f$ （频率）。如上所述，它们都是无阻尼系统作自由振动的频率，所以在某些教

科书中又称这两个频率为系统的固有频率。据此，在本书以后的章节中，我们也将  $\omega$  和  $f$  统称为系统的频率，至于具体涉及到哪一个频率，根据其所用的符号和相应的单位可加以区分。

$\alpha$  可通过实验所得到的对数衰减率  $\beta$  来确定。对数衰减率定义为响应的两个相邻最大值之比的自然对数，即

$$\beta = \ln \frac{x_p}{x_{p+1}} \approx \ln \frac{\exp[-\alpha\omega t_p]}{\exp[-\alpha\omega(t_p + T)]} \quad (1 \cdot 21)$$

上面后一等式是近似的，因为衰减曲线与其指数包络线相接触的点 and 最大响应点并不精确重合。由式(1·21)得到

$$\begin{aligned} \beta &\approx \ln e^{\alpha\omega T} \\ &\approx \alpha\omega T \\ &\approx \frac{2\pi\alpha}{\sqrt{1-\alpha^2}} \end{aligned} \quad (1 \cdot 22)$$

实际的情况一般是  $\alpha$  很小，故式(1·22)即可近似简化为

$$\beta \approx 2\pi\alpha \quad (1 \cdot 23)$$

显然， $\alpha$  越小，欲精确测定两相邻最大值之比就越难，因为此时的比值近似等于 1。因此，较好的方法是测量相隔几个整周期的两响应最大值之比，由此可得

$$\ln \frac{x_p}{x_{p+q}} = q\alpha\omega T \approx 2\pi\alpha q \quad (1 \cdot 24)$$

所以阻尼比为

$$\alpha \approx \frac{1}{2\pi q} \ln \frac{x_p}{x_{p+q}} \quad (1 \cdot 25)$$

## 二、 $\alpha = 1$ (临界阻尼) 的情形

这种情况在实际的机械系统中很少遇到。此时特征方程有一对重根

$$r_{1,2} = -\omega \quad (1.26)$$

就临界阻尼而言, 响应是非周期的, 并由下式给出

$$\begin{aligned} x &= A_1 e^{-\omega t} + A_2 t e^{-\omega t} \\ &= e^{-\omega t} (A_1 + A_2 t) \end{aligned} \quad (1.27)$$

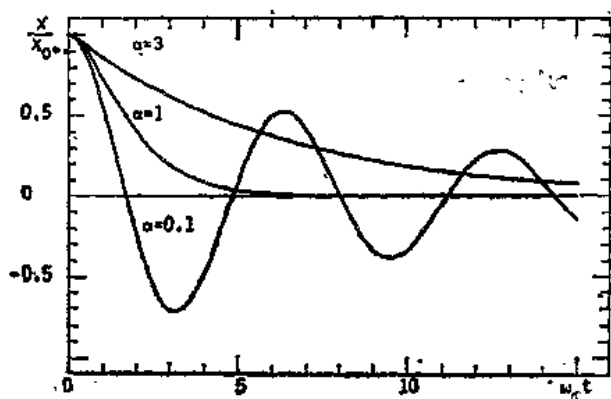


图 1.2 不同阻尼时的单自由度系统自由运动曲线

## 三、 $\alpha > 1$ (过阻尼) 的情形

在机械系统中, 这种情况也是极少见的。此时自由响应有如下的形式

$$\begin{aligned} x &= A_1 \exp [-\alpha \omega t + \omega \sqrt{\alpha^2 - 1} t] + A_2 \exp \\ &\quad [-\alpha \omega t - \omega \sqrt{\alpha^2 - 1} t] \end{aligned} \quad (1.28)$$

图1·2给出了图1·1所示系统在各种不同阻尼情况下的自由振动时间历程，其初始条件为：当  $t_0 = 0$  时， $x = x_0$ ， $\dot{x} = 0$ ；阻尼比  $\alpha$  分别取为 0.1、1 和 3。其结果分别表示如下

$$\begin{aligned} \alpha = 0.1: \quad x &= 1.005x_0 e^{-0.1\omega t} \sin(0.995\omega t + 1.471) \\ \alpha = 1: \quad x &= x_0 (1 + \omega t) e^{-\omega t} \\ \alpha = 3: \quad x &= 1.030x_0 e^{-0.1716\omega t} - 0.030x_0 e^{-5.828\omega t} \end{aligned} \quad (1.29)$$

上面三种自由响应结果随时间增长均趋于零，由此得到启示：当时间很长时，可以忽略强迫响应的瞬态部分。由图1·2还可看出，当  $\alpha = 1$  时，系统很快地恢复到静止状态。

## § 1·2 强迫振动

方程 (1·1) 的通解是齐次方程 (1·2) 的解与方程 (1·1) 的特解之和。对于  $\alpha < 1$  这种最常见的情况，有

$$\begin{aligned} x &= A e^{-\alpha\omega t} \sin(\omega\sqrt{1-\alpha^2}t + \psi) \\ &+ \text{方程(1·1)的特解} \end{aligned} \quad (1·30)$$

通常，我们仅仅对稳态运动感兴趣，这是因为，经过相当长的时间后，系统的初始瞬态运动（与自由振动的形式类似）可予以忽略。这样，系统保留下来的运动仅是稳态运动。下面将集中讨论三种激振情况：简谐激振、周期激振和一般时间力函数激振。其中简谐与周期激振这两种情况，均限于讨论其稳态运动。

### 1·2·1 简谐激振

令

$$F(t) = F \sin \Omega t \quad (1.31)$$

其中 $F$ 为激振力幅值， $\Omega$ 为激振圆频率（单位：弧度/秒）。使用符号 $\Omega$ 作为激振圆频率，以便区别于系统的圆频率 $\omega$ 。以后，我们简称 $\Omega$ 为激振频率。

方程(1.1)变为

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = F \sin \Omega t \quad (1.32)$$

其稳态解有如下形式

$$x = X \sin(\Omega t - \phi) \quad (1.33)$$

其中 $X$ 是稳态解的幅值，而 $\phi$ 为相位角。将式(1.33)代入式(1.32)得到

$$(k - m\Omega^2) X \sin(\Omega t - \phi) + c\Omega X \cos(\Omega t - \phi) = F \sin \Omega t \quad (1.34)$$

上式可写成

$$\begin{aligned} & [c\Omega \cos \phi - (k - m\Omega^2) \sin \phi] X \cos \Omega t + [(k - m\Omega^2) X \cos \phi + c\Omega X \sin \phi - F] \sin \Omega t = 0 \end{aligned} \quad (1.35)$$

式(1.35)对任何时刻 $t$ 都成立，因此得到

$$c\Omega \cos \phi - (k - m\Omega^2) \sin \phi = 0 \quad (1.36)$$

$$[(k - m\Omega^2) \cos \phi + c\Omega \sin \phi] X - F = 0 \quad (1.37)$$

借助于式(1.36)，可用 $\cos \phi$ 来表示 $\sin \phi$

$$\sin \phi = \frac{c\Omega \cos \phi}{k - m\Omega^2} \quad (1.38)$$

将式(1.38)代入到式(1.37)，便得到

$$\cos\phi = \frac{F}{X} \frac{k - m\Omega^2}{(k - m\Omega^2)^2 + c^2\Omega^2} \quad (1\cdot39)$$

上式中,  $F$ ,  $X$  和  $(k - m\Omega^2)^2 + c^2\Omega^2$  均为正值。

综合式(1·38)和(1·39), 我们得到: 当  $\Omega < \sqrt{k/m}$  时, 有

$$\sin\phi > 0$$

$$\cos\phi > 0$$

因此

$$0 < \phi < \frac{\pi}{2} \quad (1\cdot40)$$

而当  $\Omega > \sqrt{k/m}$  时,

$$\sin\phi > 0$$

$$\cos\phi < 0$$

因此

$$\frac{\pi}{2} < \phi < \pi \quad (1\cdot41)$$

由于  $0 < \phi < \pi$ , 故相位角可以由式(1·38)所得到的正切函数唯一地确定, 即

$$\begin{aligned} \tan\phi &= \frac{c\Omega}{k - m\Omega^2} \\ &= \frac{2\alpha(\Omega/\omega)}{1 - (\Omega/\omega)^2} \end{aligned} \quad (1\cdot42)$$

利用恒等式

$$\cos^2\phi + \sin^2\phi = 1$$

以及式(1·38)和式(1·39), 我们得到



$$X = \frac{F}{\sqrt{(k - m\Omega^2)^2 + c^2\Omega^2}} \quad (1.43)$$

$$= \frac{X_{st}}{\sqrt{[1 - (\Omega/\omega)^2]^2 + [2\alpha(\Omega/\omega)]^2}} \quad (1.44)$$

其中  $X_{st} = F/k$  为系统在静力  $F$  作用下的位移。

当

$$\frac{\Omega}{\omega} = \sqrt{1 - 2\alpha^2} \quad (1.45)$$

时，幅值  $X$  取得极大值，为

$$X_r = \frac{X_{st}}{2\alpha\sqrt{1 - \alpha^2}} \quad (1.46)$$

在极大值处，相位角的正切是

$$\tan\phi = \frac{\sqrt{1 - 2\alpha^2}}{\alpha} \quad (1.47)$$

这就是幅值共振（即位移共振）的定义。值得注意的是：当  $\alpha > 1/\sqrt{2}$  时，最大幅值发生在频率  $\Omega = 0$  处。

另外，如果取  $\Omega/\omega = 1$ ，那么  $\tan\phi$  为无穷大，即  $\phi = \pi/2$  而  $X_r = X_{st}/2\alpha$ 。这便是相位共振的定义。

对于大多数常见的系统，其阻尼比较小，即  $\alpha < 0.1$ ，故式 (1.45)、(1.46) 和 (1.47) 可近似表为

$$\frac{\Omega}{\omega} \approx 1 - \alpha^2 \approx 1 \quad (1.48)$$

$$X_r = \frac{X_{st}}{2\alpha} \left( 1 + \frac{\alpha^2}{2} \right) \approx \frac{X_{st}}{2\alpha} = Q \cdot X_{st} \quad (1.49)$$