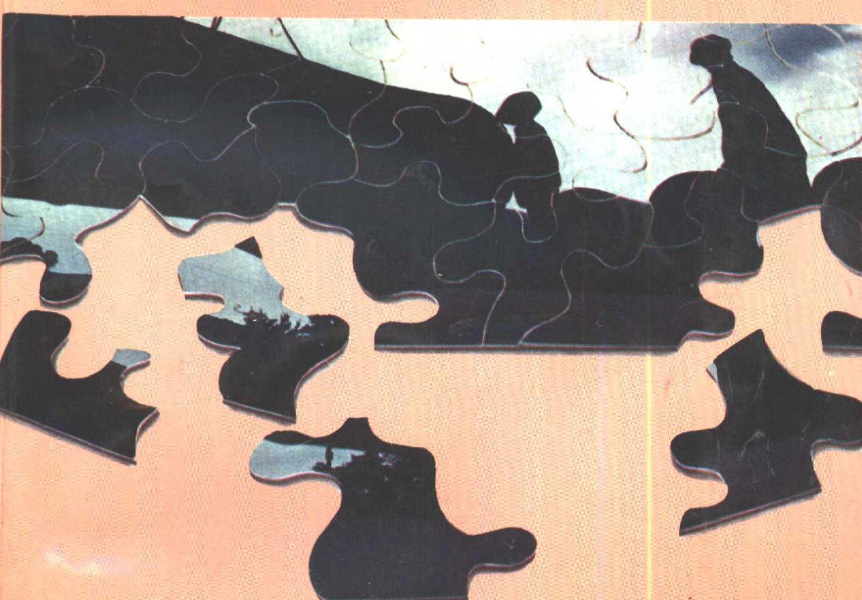
微分方程可积性的群分析理论

暨南学人丛书

杨恩浩　编著



暨南大学出版社

·暨南学人丛书·

微分方程可积性的群分析理论

杨恩浩　　编著

暨南大学出版社

粤新登字 1…

微分方程可积性的群分析理论

杨恩浩 编著

*

暨南大学出版社出版

（广州 石牌）

广 东 省 新 华 书 店 经 销

岭南文化发展公司电脑排版

暨 南 大 学 印 刷 厂 印 刷

*

开本:850×1168 1/32 印张:11.625 字数:29 万字

1993 年 12 月第 1 版 1995 年 6 月第 1 次印刷

印数:1—1000 册

ISBN7—81029—258—7

O·14 定价:28.00 元

·暨南学人丛书·

总前言

“朔南暨，声教讫于四海。”——语出《尚书》。

以传扬华夏“声教”为己任的暨南大学，是我中华第一间国立华侨大学。自清光绪三十二年建校始，经历沧桑已近一个世纪，泽育之暨南学人学子数以万计，有如千川百汇，流布海内外，传承华夏之文化灵慧，续我炎黄之魂魄命脉。暨南学人骄子，不负祖先厚望，不负母校育爱，在彼司职之岗位，勤奋耕耘，多有卓著奉献。有跻身于世界名人名流之行列者；有潜心于学术科技，摘得丹峰桂冠者；亦有投身于各行各业宏达，绘展祖先希冀之蓝图者。为人类之文明进步、华夏之昌盛振兴，献出了殷殷赤子之情。为母校暨南大学赢得了美好的社会声誉。母校为此而感到光荣、骄傲。

值此母校出版社创立三周年之际，我们推出“暨

南学人丛书”系列图书，旨在汇结暨南学人之有价值、有影响的学术研究成果，弘彰暨南校友的卓著声名、成功业绩，以增添祖国和母校的文明库藏和学术文化积累，沟通和系结海内外学人学子之心灵和情怀，铺设“龙的传人”的汇接桥梁。

《暨南学人丛书》乃为暨南大学历届学人自己的一套永续不断的书列。举凡功成名就、贡献突出者列入本丛书传记系列出版；在学术上有高水准建树，并有重大价值和影响的论著，则列入本丛书学术专著出版。

《暨南学人丛书》之出版计划，深得我校师生、校友及校董事会董事们的热情关注和真诚支持。或献智献策，或惠寄书稿，或解囊资助，令我们感到无限欣慰与鼓舞。谨愿五洲四海之暨南学子，以心系故国推动科技文化进步之情怀，支持《暨南学人丛书》的出版工作，俾使我们不负历史与时代之重托，不负历届学人之厚望。

暨南大学出版社

一九九三年三月

序　言

19世纪后期，在代数学中群论所取得的划时代的辉煌成就的巨大影响下，人们开始把群论的观点和方法广泛地应用到当时数学研究的各个重要的领域中去。在几何学的研究方面，Klein创造性地从几何形体在各种变换群作用下保持不变性的观点出发，对以前的浩繁的几何学成果作出了完整而科学的分类，为几何学的发展作出了不可磨灭的贡献。受群论在代数学和几何学中获得巨大突破的启示，挪威数学家Sophus Lie(1842～1899)首先把群论的方法引进到微分方程的研究工作中来。在他本人及其学生的努力下，在微分方程的研究中同样取得了极其卓越的成就。Lie关于微分方程的可积性理论已成为微分方程研究史上的一个重要的里程碑。由于他的这一研究开创了近代李群、李代数和拓扑群论等新学科分支，对其后数学研究的发展起了很大的推动作用。

在Lie开始应用群论于微分方程的研究之时，微分方程的理论正处在这样的一种状况之中：一方面，自从17世纪以来经过许多杰出的数学家们的不断努力，人们不仅对于一系列重要而特殊的微分方程类型找到了求解的具体办法，并且已经严格地论证了如像微分方程解的存在性、唯一性，以及对参数和初值的连续依赖性等理论问题。但是另一方面，早在1841年著名的法国数学家Liouville就已经发现和证实，形状很简单的Riccati微分方程除了那些Bernoulli已指出的特别情形外都是不能封闭求积的，尽管它的解根据当时已知的严格理论毫无疑问应当是存在的。这里所说

的不能封闭求积或不能初等积分是指不能只用初等函数、指数函数与对数函数，经过代数运算和函数的复合，以求不定积分的方式把所论微分方程的通解明显地表示出来。于是研究一个微分方程是否封闭可积的内在原因何在，就作为一个紧迫而重要的课题被提了出来。与之相关的还有这样的几个问题和任务：找出封闭可积性的准则和在准则被满足情况下求积方程的具体方法；估计不可封闭求积的微分方程类型的多寡；及尽可能多地找出微分方程的各种可积类型。

Lie 对上述各问题进行了极为深入的研究，在微分方程的研究中首创地引入了单参数连续变换群及无穷小变换等重要概念。从而把过去已知的各种特殊形式的微分方程的求积方法统一了起来，同时又极深刻地揭示出可初等求积方程类型的特征以及局限性，指明不可求积的微分方程并不是罕见的例外，远比可积类型众多的微分方程都是不能封闭积出的。

限于 Lie 所处时代微分方程理论的发展水平，他关于问题的回答并不都是十分完整的。对于一二阶显式方程的工作最为完备，而对于一阶隐式方程、高阶方程及方程组则更多是从寻求出更多的封闭可积类型着眼的，对在已给群作用之下的所谓最广微分不变式的寻求给予了更多的注意。Lie 和他的学生 Engel Scheffers 等还用同一观点研究某些偏微分方程和微分几何学的问题。虽然从现代的眼光看来 Lie 的可积性理论还有不完备之处，尤其是由于迄今尚无切实可行的方法来判断任给的一个微分方程是否会被某个单参连续变换群所许可，从而把它具体积分出来。致使 Lie 的工作在实际应用中未能发挥更充分的作用。但他的这一贡献仍然是伟大的，它从理论的高度清理、总结并基本结束了从 17 世纪以来在微分方程研究中占主导地位的关于可积性的探讨，为微分方程以后的发展提供了重要的理论背景。

我们强调指出：如同其他一切首创性的工作一样，Lie 的可积

性理论蕴涵着一位卓绝天才的智慧光辉，不仅使人们至今在读到它的时候受到启迪而感到由衷的敬佩，更重要的是它还具有久远的生命力对数学研究的进步不断地发挥其影响力。虽然 Lie 及其后继人的进一步工作已离开微分方程而转到了代数拓扑的领域，用群论研究微分方程的工作有过长期的中断。但是自本世纪 60 年代以来，不断显示的迹象表明：Lie 群很有可能在最近的将来再次成为微分方程理论研究中的强有力的工具。这些迹象出现在下述的一些工作中：

（一）在二维定常组极限环个数估计中发表了 МЛЪЧаНОВ 有争议的工作（其中一个引理已知不一定成立）。МЛЪЧаНОВ 还发表了关于高维方程组的解析积分因子存在性的工作；

（二）在非线性的周期系统的可约性方面，日本数学家 Urabe 等进行了发人深思的工作；

（三）在力学系统的研究中，出现了德国数学家 Schmeidler 的有趣结果，他用群论的方法讨论当已指定某种性质时，系统具有满足此性质的特解的准则，并把它应用于特殊三体问题，从而导出一些新奇的结论；

（四）本世纪 80 年代，在美国发表了 Steeb 的立足于近代物理学应用的几篇论文，他用李群和李代数写出具有某些极限环的高维微分系统；

（五）在许多新近发表的论文和专著中，称许可某个单参连续变换群的常（偏）微分方程为具备广义的“对称性”(Symmetry)，由此发展出较系统的理论，即微分方程的“对称性”或“相似性”的方法。例如，G. W. Bluman 和 J. D. Cole 的，以及苏联学者 L. V. Ovsiannikov的专著等；

（六）由于核反应堆工程理论探讨的每一步骤都必须尽可能是绝对可靠和精确的。R. A. Axford 关于由这类问题产生的非线性微分方程准确解的一系列研究，最能说明 Lie 氏积分理论的客观

需要性。由本书所列文献看出，微分方程的 Lie 群研究方法已被广泛应用于各种不同科技问题之中，并且取得了很大的成功。

鉴于国内尚缺乏探讨这一理论的专著和教材，且由于教学工作的需要，笔者编写了这份教材。它可供微分方程专业的研究生和本科高年级学生作为选修课的教材。读者需要学过大学的数学分析、高等代数及常微分方程等课程。只有少数章节将会用到曲面论或其他知识。若读者不熟悉有关知识，不妨略过，不会影响对 Lie 积分理论的掌握。在写作中笔者除主要参加 Lie 及其学生的原著及有关文献外，还参考了 Cohen、小松勇作、J. M. Hill 等人的专著。本书中有些章节是作者及合作者的新研究成果。此教材在暨南大学数学系对研究生试用过两遍，前几章节曾作为本科生选修课内容使用过一次。但误漏不当之处想必还不少，敬希同行专家和读者惠予指正。

作　者

1991 年 12 月 10 日

于暨南大学苏州苑

作者介绍

杨恩浩，男，浙江绍兴人，1933 年生于武汉。1952 年成都石室中学毕业，1956 年四川大学数学系毕业后免试成为该系微分方程专业四年制副博士研究生，1961 年研究生毕业分配北京中国科学院数学所工作，1962 年调到广东任教于暨南大学及华南师范大学数学系，1980 年任暨南大学数学系副教授，1985 年晋升教授。曾任教研室及系主任，校学术委员，1980 年加入东南亚地区数学学会，1985 年加入美国工业与应用数学学会(SIAM)，现任中国数学会广东分会副理事长，为《暨南大学学报》及《微分方程年刊》(英文)编委，1985 年起任德国《数学文摘》(Zbl)评论员，他被列入《世界数学家人名录》(1986 年版)，英国剑桥国际传记中心编《世界知识份子名人录》(第 8 版)等多种国内外传记出版物，1982 年曾公派赴美国明尼苏达大学进修访问一年，1985 年曾出席在美国 Texal 州 Edinberg 市召开的国际微分方程学术会议，1989 年 9 月应邀赴美国洛杉矶市加州州立 Northridge 大学执教半年。

责任编辑：吕葆华
装帧设计：山　内
ISBN7－81029－258－7
O·14　定价：28.00 元

目　录

第一章　预备知识(一阶拟线性偏微分方程)

§1. 基本概念

含有多变元的未知函数和它的某些偏导数的方程称为偏微分方程。本章讨论 n 元一阶偏微分方程

$$F(x_1,\cdots,x_n;u,\frac{\partial u}{\partial x_1},\cdots,\frac{\partial u}{\partial x_n})=0$$

的被称为拟线性的特殊情形的解法，这里 $x_1,\cdots,x_n$ 是自变元，$u=u(x_1,\cdots,x_n)$ 为未知函数，而 F 是 $2n+1$ 个变元的函数。拟线性方程的定义将在下文中给出。

首先通过几个简单例子的讨论以观察偏微分方程解的某些特点。

例 1.

$$\frac{\partial}{\partial x_1}z(x_1,\cdots,x_n)=\sum_{i=1}^{n}a_ix_i,\qquad a_i\text{ 为实数。}$$

将 $x_2,\cdots,x_n$ 视为任意的固定数组，上式对变元 x_1 积分即得通解

$$z(x_1,\cdots,x_n)=\frac{1}{2}a_1x_1^2+x_1\sum_{j=2}^{n}a_ix_i+c(x_2,\cdots,x_n),$$

其中 c 是变元 $x_2,\cdots,x_n$ 的任意函数。

例 2.

$$\frac{\partial u(x,y)}{\partial x}-\frac{\partial u(x,y)}{\partial y}=0$$

利用变量代换 $x+y=\xi, x-y=\eta, u(x,y)=v(\xi,\eta)$ 可将此方程化为

$$\frac{\partial v(\xi,\eta)}{\partial \eta} = 0$$

由例 1 可知上面方程的解是 $v(\xi,\eta)=\omega(\xi)$，ω 为 ξ 的任意函数。所以原方程的通解为

$u(x,y)=\omega(x+y)$，ω 为任意函数。

例 3.

$$\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} z(x,y) = 1$$

上式对 x 积分解出

$$\frac{\partial}{\partial y} z(x,y) = x + \varphi(y),$$

这里 φ 为变元 y 的任意函数。再视 x 为参数将上式对 y 积分则得

$$z(x,y) = xy + \int \varphi(y) \mathrm{d}y + \psi(x)$$

或

$$z(x,y) = xy + \psi(x) + \xi(y),$$

其中 ξ 及 ψ 为任意函数。

例 4.

$$\frac{\partial^3}{\partial x^2 \partial y} u(x,y) = 0.$$

对 x 积分一次得

$$\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} u(x,y) = \varphi(y),$$

其中 φ 为任意函数。

再对 x 积分可得

$$\frac{\partial u(x,y)}{\partial y} = x\varphi(y) + \psi(y),$$