柏均和 著

数学思维方法

柏均和高中数学指导

本书教你数学思维的方法。
本书将教材、教辅、素质教育融为一体。
题型千变万化，万变不离其宗。
仔细阅读本书，高考逍遥自如。

2

學苑出版社

2

数学思维方法

柏均和高中数学指导

第二册

柏均和　著

學苑出版社

图书在版编目(CIP)数据

数学思维方法:柏均和高中数学指导(第二册)/柏均和著.
-北京:学苑出版社,2002.3
ISBN 7-5077-0307-X

Ⅰ.数… Ⅱ.柏… Ⅲ.数学课-高中-教学参考资料
Ⅳ.G633

中国版本图书馆CIP数据核字(2000)第07521号

学苑出版社出版发行
北京市万寿路西街11号 100036
永清县印刷厂印刷 新华书店经销
787×960 16开本 11.5印张 210千字
2002年3月北京第2版 2002年3月北京第1次印刷
印数:5000册
定价:12.00元

序　言

该书是高中学生学习数学的一部有特色的实用参考书。

该书对高中数学知识进行了颇有新意的梳理，揭示了知识要素之间的内在的、系统的联系，使学生站在一个逻辑体系上去认识、理解和记忆数学知识。

该书对高中数学中的重点、难点进行了深入的剖析，不就题论题，而是教其知，授其法，以法述知，揭示规律，由例及类，举一反三，这对于促使高中学生建立数学思想，提高学生的数学能力，培养学生的数学素养具有重要的作用。

该书还对学生的学习策略，结合高中数学各章的具体内容进行了深入的论述，这对于帮助高中学生建立正确的学习方法很有启发。

该书还配备了经过精选的练习题，这些习题主要是经过重点学校学生反复实练后的主客观复习题，同时还对二十多年我国高考题进行了按章的分类介绍，这对于学生深刻认识高中数学考点的要求，提高学习数学的实效性，具有特殊作用。

该书不是以某一版本的数学教材为准，而是兼顾了现行的数学通用教材和一些实验教材。既适合于学生参加高考的毕业复习，更适合日常教学参考。因为作者认为，掌握知识比应考更重要。而真正掌握了知识，应考也就成了知识的运用而已。因此，将该书选为学习数学的重要参考书，使学生在学习过程中，不仅知其然，更知其所以然，对磨练学生智力、提高学生能力均有很大帮助。

在本书编写过程中，作者将自己四十年中学数学教学的经验，特别是在近二十年来，运用该书成果，指导学生参加数学高考取得优异成绩和突出效果上所积累的经验，均无保留地介绍了出来。在当前全面实施素质教育的过程中，在对数学高考内容进行改革的过程中，数学做为高中的一个基础学科，任务十分艰巨，而该书的实践与探索均有一定的参考价值。

在本书编辑过程中，天津第一中学的优秀青年老师王悦、何智理、袁爽等同志参加了书中热点训练题的选编和做答，并对高考题进行了抄写，特别是王悦绘制了该书的全部图形，并以原稿为本，进行了认真的校对。对此，本书作者表示衷心的感谢。

目　录

§3 排列、组合、二项式定理

§1 数列、极限、数学归纳法

一、要点梳理

1 数列

〈1〉数列

(1)定义:按照一定的顺序排列着的一列数叫数列,简记$\{a_n\}$.

可以用函数的观点认识数列,其定义域为自然数集或它的有限子集,当自变量从小到大依次取自然数时,相应的函数值按顺序排列即为数列,其图象是一群孤立的点.

(2)表示法:列举法、解析法、图象法.

注意:i 通项公式是认识和表示许多数列的重要形式.其意义是,数列的第n项常称为数列的通项,将通项a_n与项数n之间的函数关系用一公式表示,该公式叫通项公式.

ii 并非所有的数列都能写出其通项公式.

(3)分类:

按定义域:有穷数列、无穷数列;

按值域:有界数列、无界数列;

按单调性:递增数列、递减数列,另有摆动数列.

(4)公式:$a_1=s_1, a_n=s_n-s_{n-1}(n\geqslant 2, n\in N)$.

〈2〉等差数列

(1)定义:从第2项起,每一项与其前一项的差都是同一个常数的数列.

(2)公式:$(n\in N)$

i $a_{n+1}-a_n=d$,

ii $a_{n+1}=\frac{1}{2}(a_n+a_{n+2})$,

iii $a_n=a_1+(n-1)d=d\cdot n+(a_1-d)$,

iv $s_n=\frac{n(a_1+a_n)}{2}=na_1+\frac{n(n-1)}{2}d=n(a_1+\frac{n-1}{2}d)$

$=c_n^1a_1+c_n^2d=\frac{d}{2}n^2+(a_1-\frac{d}{2})n$.

(3)规律:

i 一般地,差等数列的通项公式是自变量为n的一次函数式,图象是一条射线上的一群孤立的点,射线的斜率为公差d.

ii 一般地,等差数列的前n项和公式是自变量为n的二次函数式,其图象是一条抛物线上的一群孤立的点,通式为

$s_n=an^2+bn$,这里$a=\frac{d}{2}, b=a_1-\frac{d}{2}$.

iii 任意两项:$a_n=a_m+(n-m)d$,

ⅳ 有限个等差数列的线性组合仍是等差数列,即若$\{a_n\}$、$\{b_n\}$均为 AP,若 $c_n = ma_n + pb_n + q$(m, p, q 为常量),则$\{c_n\}$也成 AP,

ⅴ 距首末两项等远项之和等,若 $l + m = n + k$,($l, m, n, k \in N$),则 $a_l + a_m = a_n + a_k$.

ⅵ 五个量 a_1、a_n、n、d、s_n 中每知其三可求余二.

〈3〉等比数列

(1)定义:从第 2 项起,每一项与其前一项的比都是同一个常数的数列.

注意:ⅰ 等比数列的任何一项均不为零,定义中的常数比也不为零.

ⅱ 满足 $a_{n+1} = qa_n$ 或 $a_{n+1}^2 = a_n \cdot a_{n+2}$ 的数列$\{a_n\}$不一定是等比数列,例如数列 1,0,0,0,….

(2)公式:($n \in N$).

ⅰ $\dfrac{a_n}{a_{n-1}} = q(n \geqslant 2)$,

ⅱ $a_n = a_1 q^{n-1}$,

ⅲ $s_n = \dfrac{a_1(1 - q^n)}{1 - q} = \dfrac{a_1 - a_n q}{1 - q}(q \neq 1)$,

$s_n = na_1(q = 1)$.

(3)规律:

ⅰ 任意两项:$a_n = a_m q^{n-m}(m, n \in N)$.

ⅱ 两数列$\{a_n\}$、$\{b_n\}$均为 GP,则$\{a_n^p \cdot b_n^q\}$或$\left\{\dfrac{a_n^p}{b_n^q}\right\}$也成 GP,($p, q \in Q$ 且均使上述数列有意义).

ⅲ 距首末两项等远项之积等,若 $l + m = n + k(l, m, n, k \in N)$,则 $a_1 \cdot a_m = a_n \cdot a_k$.

ⅳ 如$\{a_n\}$是 $\mathbf{R}^+$ 的 GP,则$\{\log_a a_n\}$成 AP.

ⅴ 如$\{a_n\}$是 AP,则$\{m^{a_n}\}$成 GP,($m > 0, m \neq 1$).

ⅵ 非零常数组成的数列,既成 AP,也成 GP.

ⅶ 两等比数列相加或相减不一定是等比数列.

ⅷ 五个量 a_1、a_n、n、q、s_n 中每知其三可求余二.

2 极限

〈1〉数列的极限

(1)定义:一般地,对于一个无穷数列

$a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots$,即$\{a_n\}$,

如果存在这样一个常数 A,

无论预先指定多么小的正数 ε,

都能在数列中找到某一项 a_N,

使得这一项后边的所有项与 A 的差的绝对值都小于 ε,

即当 $n > N$ 时,总有$|a_n - A| < \varepsilon$,

这时把常数 A 叫数列$\{a_n\}$的极限,

简记为 $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = A$.

注意:ⅰ 数列$\{a_n\}$的无限性,数列$\{a_n\}$必须是一个无穷数列,$a_1, a_2, a_3 \cdots a_n$ 后还应有…,

ⅱ “如果存在这样的一个常数 A,…,则 A 是$\{a_n\}$的极限”,这里必须具备存在极限的条件,才有极限,并不是每一个无穷数列都有极限,

ⅲ 数列$\{a_n\}$有极限 A 的条件:

正数 ε 有任意性、无限性、相对确定性;

a_N 有对应性、纯粹性、适当灵活性.例如 $\lim\limits_{n \to \infty}\left(1 - \dfrac{1}{2^n}\right) = 1$,取定 $\varepsilon = 0.001$,存在自然数 N

$=9$，当 $n>N=9$ 时，不等式 $|(1-\frac{1}{2^n})-1|<0.001$ 恒成立，但取比 9 大的任意一个自然数都能起到 N 的作用，例如取 $N=20$，当 $n>N=20$ 时，不等式 $|(1-\frac{1}{2^n})-1|<0.001$ 也恒成立，定义中强调 N 的存在性，而不在于 N 的大小、一般地，ε 越小，相应 N 越大 .

ⅳ 任何常数数列的极限是 A，设数列 $A,A,A,\cdots,A,\cdots$ 对任意小的 $\varepsilon>0$，任取自然数 N，当 $n>N$ 时，不等式 $|a_n-A|=|A-A|=0<\varepsilon$ 恒成立，即常数列 $\{a_n=A\}$ 的极限是 A.

(2)证解无穷数列 $\{a_n\}$ 的极限是 A 的步骤：

ⅰ 写出 $\{a_n\}$ 的通项公式，

ⅱ 设任意小的 $\varepsilon>0$，

ⅲ 证明总存在自然数 N，当 $n>N$ 时，不等式 $|a_n-A|<\varepsilon$ 恒成立 .

①解 $|a_n-A|<\varepsilon$，求 n.

②其 n 解是自然数集的无限子集；

③上数集中任何一个自然数都可取为 N，通常取较小者，为某数的整数部分 .

ⅳ 根据数列极限的定义得出结论 .

〈2〉数列极限的运算法则

(1)法则

如果 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=A$，$\lim\limits_{n\to\infty}b_n=B$，那么

ⅰ $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n\pm b_n)=A\pm B$(其和可推广)，

ⅱ $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n\cdot b_n)=A\cdot B$(可推广)，

ⅲ $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\frac{A}{B}(B\neq0)$，

ⅳ 如 c 为常数，$\lim\limits_{n\to\infty}(c\cdot a_n)=\lim\limits_{n\to\infty}c\cdot\lim\limits_{n\to\infty}a_n=C\cdot A$.

注意：

ⅰ 运用数列极限的运算法则求数列的极限必须具备两个条件，一是各局部极限的存在性，二是实质的无限性与形式上有限性的统一，

ⅱ 不能以实数运算法则去理解数列极限运算法则的公式，错认为 lim 与 a_n 间是相乘关系 .

(2)无穷递缩等比数列

ⅰ 定义：一个无穷等比数列，如其公比的绝对值小于 1(广义递缩)，那这样的数列叫无穷递缩等比数列 .

注意：

(ⅰ)公比 $|q|<1$，实为 $(-1,0)\cup(0,1)$，$\because q\neq0$，

(ⅱ)当 $|q|<1$ 时，$\lim\limits_{n\to\infty}q^n=0$.

ⅱ 各项的和：无穷递缩等比数列前 n 项的和，当 n 无限增大时的极限，叫这数列各项的和，以 s 表示，$s=\lim\limits_{n\to\infty}s_n$.

注意：应理解以下区分 .

设无穷递缩等比数列

$a_1,a_1q,a_1q^2,\cdots,a_1q^{n-1},\cdots|q|<1$ 且 $q\neq0$，

则 $a_n=a_1q^{n-1}$，

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}a_1q^{n-1}=\lim_{n\to\infty}a_1\cdot\lim_{n\to\infty}q^{n-1}$$
$$=a_1\cdot0=0,$$

则 $s_n=\sum\limits_{n=1}^{n}a_n=\dfrac{a_1(1-q^n)}{1-q}$,

$$\lim_{n\to\infty}s_n=\lim_{n\to\infty}\frac{a_1(1-q^n)}{1-q}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{a_1}{1-q}\cdot\lim_{n\to\infty}(1-q^n)$$

$$=\frac{a_1}{1-q}.$$

则 $s=\lim\limits_{n\to\infty}s_n$.

这里数列$\{a_n\}$的前 n 项的和 s_n,也构成一个数列$\{s_n\}$,即 $s_1,s_2,s_3,\cdots,s_n,\cdots$,

这数列的通项 s_n 的极限是 s.

(3)循环小数化分数:这是无穷递缩等比数列的应用之一,其法则为:

i　纯循环小数化分数

分母——由若干个9组成,其9的个数为一个循环节的位数,

分子——一个循环节的数字.

ii　混循环小数化分数

分母——由若干个9其后由若干个零组成,其9的个数为一个循环节的位数,其零的个数为不循环的位数.

分子——小数点后到第一个循环节完结的数字减去不循环数字所得的差.

3　数学归纳法

〈1〉证明方法小结

(1)演绎法——是一般到特殊的推理方法,只要推理不发生错误,则从已知出发所做的新判断是正确的.

例　证明方程 $x^2+x+1=0$ 无实数根.

证明:$\because$ 对方程 $ax^2+bx+c=0(a\neq0)$,

当 $\Delta=b^2-4ac<0$ 时,方程无实数根.

$\because$ 方程 $x^2+x+1=0$ 的 $a\neq0,\Delta=-3<0$,

$\therefore$ 方程 $x^2+x+1=0$ 无实数根.

(2)完全归纳法——考察了某类事物的所有的每个对象,而得出一般结论,叫完全归纳法,该结论显然可靠.

(3)不完全归纳法——只是考察了某事件的部分对象,就得出一般结论,叫不完全归纳法,这结论不一定可靠.

例　某一数列的通项公式为 $a_n=(n^2-5n+5)^2$ 这里 $a_1=1,a_2=1,a_3=1,a_4=1$,

由此得出结论对任何 $n\in N$,均有

$a_n=(n^2-5n+5)^2=1$,就错了!

事实上,当 $n=5$ 时,$a_5=25\neq1$.

(4)数学归纳法

〈2〉数学归纳法

(1)适用范围:对于由归纳法得到的某些与自然数有关的数学命题,常采用数学归纳法证之,又常与不完全归纳法、猜想结论联合使用.

(2)思想方法:

i　先验证 n 取第一个值时,命题成立,——传递的基础.

ⅱ 假设 $n=k$ 时命题成立，证明 $n=k+1$ 时，命题也成立——传递的依据．

这样，如验证 $n=1$ 时，命题成立，由传递的依据，可知 $n=2$ 时，命题也成立．如 $n=2$ 时，命题成立，则由传递的依据，可知 $n=3$ 时，命题亦成立，由于有了传递的基础与传递的依据，可知当 $n=4,5,6,\cdots$，均成立．这样的证明方法就是数学归纳法．

二、难点剖析

1 关于等差数列与等比数列基本公式的应用例析与注意事项

〈1〉等差数列计算公式综合使用的规律

等差数列中共有五个基本量，即

a_1、q、n、a_n、s_n，

有以下三个基本公式，分别编号如下：

$$a_n = a_1 + (n-1)d \quad ①$$

$$s_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2} \quad ②,$$

$$s_n = na_1 + \frac{n(n-1)}{2}d \quad ③$$

每个计算公式中均有四个量，

这五个基本量中，任知其三而求余二，则共有以下十种不同情况

已知			求		公式选择	
a_1	a_n	s_n	n	d	②	①
a_1	a_n	n	s_n	d	②	①
a_1	a_n	d	n	s_n	①	②
a_1	s_n	n	a_n	d	③	①
a_1	s_n	d	a_n	n	③	①
a_1	n	d	a_n	s_n	①	②
a_n	s_n	n	a_1	d	③	①
a_n	s_n	d	a_1	n	联	立
a_n	n	d	a_1	s_n	①	②
s_n	n	d	a_1	a_n	③	①

从以上分析可以看出，十种情况有九种情况，可使已知的三个量集中出现在一个基本公式中，即解一元方程算出第四量，再选择适当公式将第五个量计算出来．但有一种情况即已知 a_n、s_n、d，求 a_1、n 时，对上述三个基本公式，均只已知两个量，因此必须解二元联立方程组将所求的未知量解出，掌握了这个规律，可以增强公式选择的主动性．

〈2〉等比数列计算公式综合使用的规律

等比数列中共有五个基本量，即

$$a_n = a_1 q^{n-1} \quad ①$$

$$s_n = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q} \quad ②、$$

$s_n = \dfrac{a_1 - a_n q}{1 - q}$ ③

每个计算公式中均有四个量，

这五个基本量中，任知其三而求余二，则 $c_5^3 = c_5^2 = 10$，共有以下十种不同情况

已知			求		公式选择	
a_1	q	n	a_n	s_n	①	②
a_1	q	a_n	n	s_n	①	③
a_1	q	s_n	n	a_n	③	①
a_1	n	a_n	q	s_n	①	②
a_1	n	s_n	q	a_n	②	①
a_1	a_n	s_n	q	n	③	①
q	n	a_n	a_1	s_n	①	②
q	n	s_n	a_1	a_n	②	①
q	a_n	s_n	a_1	n	③	①
n	a_n	s_n	a_1	q	联	立

由以上分析同样可看出，十种情况中有九种情况，可使已知的三个量集中出现在一个基本公式中，即解一元方程求出第四量，再选择适当公式将第五个量计算出来，且唯有一种情况，即已知 n、a_n、s_n，求 a_1、q 时，对上述三个基本公式，均只已知两个量，则必须解二元联立方程组将所求的未知量解出．

〈3〉关于等比中项问题

如果在 a 与 b 中间插入一个数 G，使 a、G、b 成等比数列，那么 G 叫 a 与 b 的等比中项，则 $\dfrac{G}{a} = \dfrac{b}{G}$，即 $G^2 = ab$，因此 $G = \pm\sqrt{ab}$.

但将此公式应用到一个等比数列中，其正负号的选择就要注意了．

例如某等比数列的首项为 1，公比为 ±2，合写在一起，其前十项分别为 1，±2，4，±8，16，±32，64，±128，256，±512，

如计算中间的一项，

对 1 与 4，应为 ±2，

对 1 与 16，应为 ±4，

对 1 与 64，应为 ±8，

对 1 与 256，应为 16.

显然，一个等比数列从第 2 项起，每一项(有穷等比数列的末项除外)是它的前一项与后一项的等比中项．

如利用 $G = \pm\sqrt{ab}$ 计算一个等比数列中某两项的中间项，凡间隔为插偶数个项的，应有正负号，凡间隔为插入奇数个项的，应选正号或负号，且与首末项同号．

〈4〉等比数列前 n 项和公式的推导深化

设一等比数列的首项为 a_1，公比为 q，前 n 项和为 s_n，则此等比数列为 $a_1, a_1 q, a_1 q^2, \cdots, a_1 q^{n-1}, \cdots$，

(1)由等比数列定义得

$\dfrac{a_2}{a_1} = \dfrac{a_3}{a_2} = \cdots = \dfrac{a_n}{a_{n-1}} = q$，

$\therefore \dfrac{a_2 + a_3 + \cdots + a_n}{a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1}} = q$(等比定理)

$\therefore \dfrac{s_n - a_1}{s_{n-1}} = q$,

$\therefore s_n - a_1 = qs_{n-1}$,即 $s_n - a_1 = q(s_n - a_n)$,

$\therefore s_n = \dfrac{a_1(1-q^n)}{1-q}(q \neq 1)$.

(2)由 $s_n = a_1 + a_1 q + a_1 q^2 + \cdots + a_1 q^{n-1}$

$= a_1 + q(a_1 + a_1 q + \cdots + a_1 q^{n-2})$

$= a_1 + qs_{n-1} = a_1 + q(s_n - a_n)$,

$\therefore s_n = \dfrac{a_1 - a_n q}{1-q} = \dfrac{a_1(1-q^n)}{1-q}(q \neq 1)$.

(3)由 $s_{n+1} = s_n + a_{n+1} = s_n + a_1 q^n = a_1 + a_1 q + a_1 q^2 + \cdots + a_1 q^{n-1} + a_1 q^n$

$= a_1 + q(a_1 + a_1 q + \cdots + a_1 q^{n-1}) = a_1 + qs_n$,

$\therefore s_n = \dfrac{a_1(1-q^n)}{1-q}(q \neq 1)$.

(4)由公式 $a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \cdots + ab^{n-2} + b^{n-1})$,上式中令 $a=1, b=q$,则得 $1 - q^n = (1-q)(1 + q + q^2 + \cdots + q^{n-1})$,

$\therefore 1 + q + q^2 + \cdots + q^{n-1} = \dfrac{1-q^n}{1-q}$,

$\because s_n = a_1 + a_1 q + a_1 q^2 + \cdots + a_1 q^{n-1} = a_1(1 + q + q^2 + \cdots + q^{n-1})$

$= a_1 \cdot \dfrac{1-q^n}{1-q} = \dfrac{a_1(1-q^n)}{1-q}(q \neq 1)$.

熟悉上述推导,可以提高变形能力,深入了解等比数列的内在规律.

〈5〉关于设的技巧

已知三个数成等差数列,常设为 $a-d, a, a+d$;

已知四个数成等差数列,常设为 $a-3d, a-d, a+d, a+3d$.

上面设法在已知其和时,显出优越性.

已知三个数成等比数列,常设为$\dfrac{a}{q}, a, aq$;

已知四个数成等比数列,常设为 $aq^{-3}, aq^{-1}, aq, aq^3$.

上面设法在已知其积时,显出优越性.

〈6〉应用例析

例 1 在等差数列$\{a_n\}$中,如 $a_1 + a_8 + a_{10} + a_{17} = 4 + 8i$, $s_{34} = 45 + 80i$,求 $a_{35} + a_{36} + a_{37} + \cdots + a_{51}$.

解:$\because \{a_n\}$成等差数列,

$\therefore s_n, s_{2n} - s_n, s_{3n} - s_{2n}$也成等差数列.

$\therefore s_n + (s_{3n} - s_{2n}) = 2(s_{2n} - s_n)$,

$\because a_1 + a_8 + a_{10} + a_{17} = 4 + 8i$,

$\therefore a_1 + a_{17} = a_8 + a_{10} = 2 + 4i$,

$\because s_{17} = \dfrac{17(a_1 + a_{17})}{2} = \dfrac{17(2+4i)}{2} = 17 + 34i$,

$\because s_{34} = 45 + 80i$,

$\therefore s_{34} - s_{17} = 28 + 46i$,

$\because s_{35} + a_{36} + \cdots + a_{51} = s_{51} - s_{34}$.

$\because s_{3n} - s_{2n} = 2s_{2n} - 3s_n = 2(s_{2n} - s_n) - s_n$,

$\therefore a_{35}+a_{36}+\cdots+a_{51}=2(28+46i)-17+34i=39+58i$.

例 2　在等比数列$\{a_n\}$中,第 $m+n$ 项为A,第 $m-n$ 项为B,又 A、$B\in R$,求 a_m.

解:$\because a_n$ 为a_{m+n}与a_{m-n}的中项,

$\therefore a_m^2=a_{m+n}\cdot a_{m-n}=A\cdot B$,

$\because m+n$ 与 $m-n$ 同奇偶,$A,B\in R$,A 与 B 同号,

$\therefore a_m=\pm\sqrt{AB}$.

例 3　已知两个等差数列的前 n 项和的比是$(7n+2):(n+4)$,求它们的第 m 项之比.

解:$\because$这两个数列都是等差数列.

$$s_{n_1}=na_1+\frac{n(n-1)}{2}d_1=n\left(a_1+\frac{n-1}{2}d_1\right),$$

$$s_{n_2}=na_2+\frac{n(n-1)}{2}d_2=n\left(a_2+\frac{n-1}{2}d_2\right),$$

$$\because \frac{s_{n_1}}{s_{n_2}}=\frac{7n+2}{n+4},$$

$$\therefore \frac{a_1+\frac{n-1}{2}d_1}{a_2+\frac{n-1}{2}d_2}=\frac{7n+2}{n+4},$$

令$\dfrac{n-1}{2}=m-1$,得 $n=2m-1$,

$\therefore$第 m 项之比为$\dfrac{14m-5}{2m+3}$.

例 4　在等差数列中,$s_m=s_n(m\neq n)$,求 s_{m+n}.

解:$\because s_m=ma_1+\dfrac{m(m-1)}{2}d$,

$\because s_n=na_1+\dfrac{n(n-1)}{2}d$,

$\because s_m=s_n$,

$$\therefore ma_1+\frac{m(m-1)}{2}d=na_1+\frac{n(n-1)}{2}d,$$

$$\therefore a_1(m-n)=d\left[\frac{n(n-1)}{2}-\frac{m(m-1)}{2}\right],$$

$\therefore 2a_1(m-n)=d(n^2-n-m^2+m)$,

$\therefore 2a_1(m-n)=-d(m-n)(m+n-1)$,

由 $m\neq n$,得 $m+n-1=-\dfrac{2a_1}{d}$,

又 $s_{m+n}=[2a_1+(m+n-1)d]\cdot\dfrac{m+n}{2}$.

$\therefore s_{m+n}=0$.

由以上例题可以看出,在深入分析题目内在联系的基础上,施以技巧,寻求捷径,能正确迅速地将题目解出.

例 5　已知数列$\{a_n\}$是首项为 23、公差为整数的等差数列,且前 6 项为正,从第 7 项起为负,

(1)求此等差数列的公差 d.

(2)设前 n 项的和为 s_n,求 s_n 的最大值,

(3)当 s_n 是正数时,求 n 的最大值.

解:(1)由题意得

$a_6=23+5d>0$,

$a_7=23+6d<0$,

$\therefore -4.6<d<-3.8$,

$\because d\in Z,\therefore d=-4$.

(2)$\because$ 从第7项起开始为负数,

$\therefore$ 前6项和 s_6 值最大,$s_6=78$.

(3)由 $s_n>0$,

$\therefore 23n+\frac{n(n-1)}{2}\cdot(-4)>0$,

$\therefore \frac{46n+n(n-1)\cdot(-4)}{2}>0$,

$\therefore \frac{46n-4n(n-1)}{2}>0$,

$\therefore n(4n-50)<0$,

$\therefore 0<n<12.5$,

$\therefore n=12$ 为最大值.

例6 已知正数 $a_1,a_2,a_3,\cdots$ 成等差数列,求证

$$\frac{1}{\sqrt{a_1}+\sqrt{a_2}}+\frac{1}{\sqrt{a_2}+\sqrt{a_3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{a_{n-1}}+\sqrt{a_n}}=\frac{n-1}{\sqrt{a_1}+\sqrt{a_n}}.$$

证明:

$\because a_1,a_2,a_3,\cdots,a_n$ 成等差数列,

$\therefore d=a_2-a_1=a_3-a_2=\cdots=a_n-a_{n-1}$,

$\because a_n=a_1+(n-1)d$,

$\therefore d=\frac{a_n-a_1}{n-1}$,

$$\therefore \frac{1}{\sqrt{a_1}+\sqrt{a_2}}+\frac{1}{\sqrt{a_2}+\sqrt{a_3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{a_{n-1}}+\sqrt{a_n}}$$

$$=\frac{\sqrt{a_2}-\sqrt{a_1}}{a_2-a_1}+\frac{\sqrt{a_3}-\sqrt{a_2}}{a_3-a_2}+\cdots+\frac{\sqrt{a_n}-\sqrt{a_{n-1}}}{a_n-a_{n-1}}$$

$$=\frac{\sqrt{a_2}-\sqrt{a_1}}{d}+\frac{\sqrt{a_3}-\sqrt{a_2}}{d}+\cdots+\frac{\sqrt{a_n}-\sqrt{a_{n-1}}}{d}$$

$$=\frac{\sqrt{a_n}-\sqrt{a_1}}{d}=\frac{\sqrt{a_n}-\sqrt{a_1}}{\frac{a_n-a_1}{n-1}}=\frac{(n-1)(\sqrt{a_n}-\sqrt{a_1})}{a_n-a_1}=\frac{n-1}{\sqrt{a_1}+\sqrt{a_n}}.$$

例7 已知△ABC 的三个内角 A、B、C 成等差数列,且最大角与最小角的对边之比为$(\sqrt{3}+1):2$,试求这三角形三个内角的度数.

解:设最大角为 A,最小角为 C,

$\because A+B+C=180°$,

$\because A,B,C$ 成等差数列,即 $2B=A+C$,

$\therefore B=60°,\therefore A=120°-C$,

$\therefore \sin A=\sin(120°-C)=\frac{\sqrt{3}}{2}\cos C+\frac{1}{2}\sin C$,

数列、极限、数学归纳法·难点剖析