

21 世纪工程技术新型教程系列

信号处理

〔日〕酒井英昭 编著

本系列为日本名牌大学面向 21 世纪教育改革成果

科学出版社

OHM社

薄

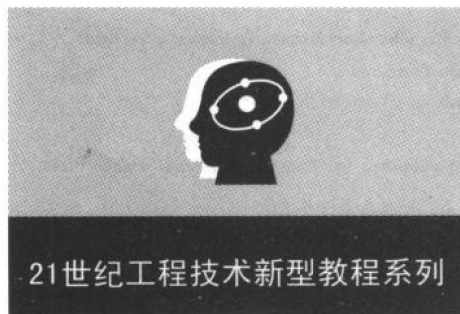
最薄的大学专业系列教材。**易于讲授**

精

内容充实精要，结构紧凑。**易于学习**

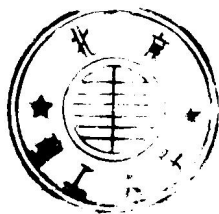
新

反映理论与实用技术的最新发展。**易于成才**



信号处理

〔日〕酒井英昭 编著
白玉林 译



991900

科学出版社 OHM 社
2001

991900

图字:01-2000-1513 号

Original Japanese edition

Shinsedai Kougaku; Shingou Shori

Edited by Hideaki Sakai, Seihaku Higuchi, Isao Mizoshiri, Masuzou Yanagida,

Takuya Nishimura and Toshihiro Furukawa

Copyright © 1998 by Hideaki Sakai

Published by Ohmsha, Ltd.

This Chinese language edition is co-published by Ohmsha, Ltd. and Science Press.

Copyright © 2001

All rights reserved.

本书中文版权为科学出版社和 OHM 社所共有

新世代工学シリーズ

信号処理

酒井英昭 オーム社 1998 第1版 第1刷

图书在版编目(CIP)数据

信号处理/[日]酒井英昭编著;白玉林译.-北京:科学出版社,2001.1

(21世纪工程技术新型教程系列)

ISBN 7-03-008762-3

I. 信… II. ①酒…②白… III. 信号处理-教材 IV. TN911.7

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2000)第 68310 号

北京东方科龙电脑图文制作有限公司 制作

科学出版社 OHM 社 出版

北京东黄城根北街 16 号 邮政编码:100717

中国科学院印刷厂 印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

2001 年 1 月第 一 版 开本:787×1092 1/16

2001 年 1 月第一次印刷 印张:9 1/2

印数:1—5 000 字数:152 000

定 价:20.00 元

(如有印装质量问题,我社负责调换〈新欣〉)

丛 书 序

主编 樱井良文

现在,很多大学正在进行学部、学科的重组,以研究生培养为重点,引入学期制,采用新的课程体系和不断深入的教育计划改革,特别是由于学期制教育的引入,使得原来以分册编写的教材在一个学期的教学中很难消化。因此,各学校对“易教”、“易学”的教材需求越来越迫切。

《21世纪工程技术新型教程系列》是面向通信、信息,电子、材料,电力、能源,以及系统、控制等多学科领域的新型教程系列。这些教程均由活跃在各学科领域第一线的教授任主编,由年轻有为的学者执笔,内容丰富,有利于对学科基础的理解。版面设计时为学生留出了写笔记的空间,是一种可以兼作笔记,风格别致的教科书。

希望肩负新世纪工程技术领域发展重任的青年读者们,通过本教程系列的学习,建立扎实的学科基础,在实践中充分发挥自己的应用能力。

21世纪工程技术新型教程系列编辑委员会

主 编

樱井良文 大阪工业大学校长
大阪大学名誉教授

副主编

西川 祯一 大阪工业大学信息科学部学部长
京都大学名誉教授

编委(按姓氏笔画顺序)

广濑全孝	广岛大学教授	井口征士	大阪大学教授
木村磐根	大阪工业大学教授 京都大学名誉教授	仁田旦三	东京大学教授
白井良明	大阪大学教授	西原 浩	大阪大学教授
池田克夫	京都大学教授	滨川圭弘	立命馆大学副校长 大阪大学名誉教授

前言

本书可作为大学本科信号处理课程的一学期用教材。信号处理,过去是信号理论、传送工程学、控制工程学等课程的一部分,并在大学工科的电子系、系统工程系或信息工程系中把它传授给学生。但是,近年来计算机技术,尤其是 LSI 技术的飞速发展,我们常听到“数字信号处理”这样的名词,并把信号处理当作一门独立的学科来进行研究。

传统的模拟电路领域中,存在着物理上的实现问题,但在数字信号处理中,以数学式的运算操作为中心,并通过编程序把它装配起来。另外,对连续时间信号成立的现象,在类似情况下对离散时间有限长的信号也有不成立的时候。因此,在数字信号处理过程中,要进行深入谨慎的计算。

1975 年,由奥本海姆(A. V. Oppenheim)与谢弗(R. W. Schaffer)合编的《Digital Signal Processing》(Prentice-Hall, Inc)一书¹⁾,在美国出版。随后,美国乃至全世界的大学都把它作为教科书使用。这本著作的特点是:除了把包含复变函数论的初步知识,以及拉普拉斯变换、傅里叶变换的连续时间线性系统的基础知识作为前提之外,其他内容均由自己编写。另外,还精心准备了 250 道练习题作为对正文内容的补充说明,并把它们当作熟悉数字信号处理不可或缺的数学式运算操作的手段。

本书至少遵照了奥本海姆和谢弗两位作者的创作精神,但因为书中提到了作为出发点的连续时间线性系统,所以本书书名定为《信号处理》。在编写本教科书时,还收入了学科的最新进展、发展状况作为最新的讨论点。

本书各章执笔者分别为:

第 1 章与全书的编审 酒井英昭(编著)

第 2 章 樋口清伯

第 3 章 沟尻 勋

第 4 章 柳田益造

第 5 章 西村卓也

第 6 章 古川利博

最后,对给予了本书出版机会的本教程系列主编樱井良文先生,编辑干事木村磐根先生、池田克夫先生谨致敬意,同时也向 OHM 社有关部门的各位深表感谢。

酒井英昭

1) 中译本《数字信号处理》,董士嘉、杨耀增译,茅于海等校,科学出版社,1980 年出版。——译者注

编者、著者简历

酒井 英昭

1972 年 京都大学工学部数理
工学毕业
1981 年 工学博士
现 在 京都大学研究生院信
息学研究专业系统科
学教授

柳田 益造

1978 年 大阪大学研究生院工
学研究专业博士毕业
1978 年 工学博士
现 在 同志社大学工学部知
识工学专业教授

樋口 清伯

1960 年 神戸大学工学部电气
工学专业毕业
1971 年 工学博士
现 在 大阪产业大学工学部
信息系统工学教授

西村 卓也

1965 年 近畿大学工学部电气
工学专业毕业
1986 年 工学博士
现 在 近畿大学工学部电子
工学副教授

沟尻 勲

1972 年 大阪府立大学研究生
院工学专业博士毕业
1972 年 工学博士
现 在 立命馆大学理工学电
子电气工学专业教授

古川 利博

1980 年 东京工业大学部信息
工学专业毕业
1989 年 工学博士
现 在 福岡工业大学信息工
学部信息系统工学专
业教授

译者简历

白玉林

1970 年 毕业于北京大学数学力学系计算数学专业
1984 年 毕业于北方交通大学计算机网络专业硕士研究生,获工学硕士
现 在 铁道科学院通信信号研究所、电子计算技术研究所,副研究员

目 录

第 1 章 信号处理简介	1
1.1 信号处理的概念	1
1.2 信号处理的发展	1
1.3 本书的构成	3
第 2 章 连续时间信号的变换	5
2.1 周期函数的频率分解	5
2.1.1 傅里叶级数	5
2.1.2 傅里叶系数的性质与例题	9
2.2 傅里叶级数到傅里叶变换	12
2.2.1 傅里叶变换的推导	13
2.2.2 变换的性质与例题	14
2.3 傅里叶变换到拉普拉斯变换	16
2.3.1 拉普拉斯变换的推导	16
2.3.2 变换的性质与例题	17
2.4 信号处理与微分方程式	20
2.4.1 用微分方程式来表示电路的作用	20
2.4.2 利用拉普拉斯变换的解法	21
2.4.3 解的稳定性	23
2.4.4 研究电路特性	24
练习题	29
第 3 章 取样与 z 变换	31
3.1 模拟信号与数字信号	31
3.2 取样定理	33
3.3 量化与量化误差	36
3.3.1 用二进制数来表示量化	36
3.3.2 量化误差	38
3.4 z 变换	40
3.4.1 基本的离散信号	40
3.4.2 z 变换	41

3.4.3 z 逆变换	43
3.5 线性离散系统	46
3.5.1 线性常系数差分方程式表示的系统	48
3.5.2 系统函数与 z 变换	49
3.5.3 系统函数与稳定性	50
3.5.4 系统的频率响应	51
3.5.5 z 变换与离散时间傅里叶变换	52
练习题	52
第 4 章 FFT 及其应用	55
4.1 DFT	55
4.1.1 傅里叶级数与傅里叶变换、 z 变换的相互关系	55
4.1.2 DFT	57
4.2 FFT	58
4.2.1 对 FFT 的讨论	58
4.2.2 定位计算与反向位数组	62
4.2.3 逆 FFT	64
4.3 FFT 使用时的注意事项	65
4.3.1 奈奎斯特条件与重叠	65
4.3.2 波形的截取与窗口函数	65
4.3.3 样本个数的决定方法	67
4.4 FFT 的应用	68
4.4.1 频谱分析	68
4.4.2 卷积	69
4.4.3 连续滤波	71
4.4.4 脉冲响应与传递函数	73
4.4.5 相关函数	73
4.4.6 倒频谱分析	74
练习题	76
第 5 章 模拟滤波器与数字滤波器	77
5.1 模拟滤波器	77
5.1.1 滤波的原理	77
5.1.2 低通蝶形滤波器	81
5.1.3 低通切比雪夫滤波器	84
5.1.4 通带的变换	88
5.2 数字滤波器	88

5.2.1 数字滤波器的特征	88
5.2.2 FIR 数字滤波器	89
5.2.3 FIR 滤波器的相位特性	96
5.2.4 IIR 数字滤波器	97
练习题	103
第 6 章 自适应滤波器	105
6.1 自适应信号处理与参数推定	105
6.2 LMS 算法与学习鉴定法	112
6.2.1 LMS 算法	112
6.2.2 学习鉴定法	113
6.3 RLS 算法	115
6.4 使用有限数据的自适应算法	119
6.5 自适应算法的应用	124
6.5.1 回声消除器	124
6.5.2 自动均衡器	125
练习题	127
练习题简答	129
参考文献	137

第 1 章

信号处理简介

1.1 信号处理的概念

在我们的周围存在着为数众多的“信号”。例如：从茫茫宇宙中的天体发出的微弱电波信号，移动电话发出的数字信号等，这些都属于我们直接感觉不到的信号，还有诸如交通噪音、人们的说话声以及电视图像等人们能感觉到的各种各样的信号。这些众多的信号中，有的是含有有用信息的信号 (signal)，有的只有应当除掉的噪音 (noise)。所谓**信号处理** (signal processing)，就是要把记录在某种媒体上的信号进行处理 (process)，以便抽取有用信息的过程，其过程如图 1.1 所示。



图 1.1 信号处理的概念图

以前对模拟信号用模拟加工方法进行处理时，对“信号处理”技术没有太深刻的认识。因为在过去信号处理和信息抽取是个整体，所以从物理制约角度来看，满足信息抽取的模拟处理受到了很大的限制。

如果到了把数字化信号用计算机进行数字处理时代，在我们面前就会出现不受物理制约的数学加工，即算法 (algorithm)，并确立信号处理的领域。现在常说的所谓**数字信号处理** (digital signal processing, DSP)，在通信或控制等领域中，作为模拟信号有必要作用于现实世界，并且必须经常考虑到其背后的模拟信号世界。

1.2 信号处理的发展

先回顾一下信号处理 (尤其是 DSP) 的发展历程。DSP 的历史可以追溯到 1936 年 PCM (pulse code modulation) 技术的发明，还有达德利

(Dudley)发明的声音编码器(voice coder)也在这一时期。它堪称是声音分析与合成法先驱研究的重要成果。另外,因其数学难度而闻名遐迩的维纳(Wiener)的预测理论黄皮书,也早在1942年在麻省理工学院(MIT)开始应用于天气预报项目。那时人们就感到有必要把原来的连续时间理论改进为离散时间理论,而承担此项重任的正是维纳的得意门生列文森(Levinson)。当时因计算机技术尚未十分发达,致使列文森的算法未能被广泛应用,到了20世纪50年代的后半期,随着计算机的发展终于应用到石油的地震探查领域中。到了20世纪60年代,在取样值控制领域中开发的 z 变换成了描述线性离散时间系统的基本工具,也开始开发各种数字滤波器的设计方法。

到了20世纪70年代,推出了声音的线性预测编码法(linear predictive coding, LPC),它是以列文森算法为中心制造出来的,特别是对于由板仓推出的PARCOR声音合成用数字滤波器来说,更是不可或缺的,而PARCOR滤波器,无非就是以正交多项式理论为基础的数学关系式,并且用线路形式表现而已。1978年美国德州仪器公司(TI),将此滤波器作为合成声音用LSI芯片开发,并在市场上推出了取名为“Speak & Spell”的产品,到那时候PARCOR滤波器作为数学理论与电子学相结合的范例引起了人们的关注。从此正式拉开了VLSI时代的大幕。

当时,作为VLSI芯片化的另一个范例还有由贝尔实验室开发的回声消除器(echo canceller)。在长途电话中经常出现说话人的回声现象,以致影响通话质量。为了解决这一问题,须研制出信号的统计量未知时,由数据推定出最佳滤波器系数的自适应滤波器。1960年前后,由Widrow提出了LMS算法,并应用到回声消除器的开发中。自适应滤波器,还能应用在通信线路均衡器、电视图像的重影(ghost)消除器以及抑制有源噪声等方面,现在作为重要的研究课题备受人们的关注。

另外一个很有意义的是,作为DSP另一支柱理论的快速傅里叶变换(fast Fourier transform, FFT)的历史。FFT的理论是由Cooley与Tukey,于1965年最先发表的。但实际上其历史可追溯到高斯(Gauss)时代,到目前为止已先后由多名学者反复发现并提出。据Cooley说,Lanzos在1942年也发现过,并论述了当数据(N)为8、16、32、64时的计算量。假设, N 大小为数十万时¹⁾,其算法的真正价值更应该好好地被认识到。到了Cooley与Tukey的时代,FFT的性质也许可能被当作一个纯数学上的发现而被埋没掉,但是MIT林肯实验室的Rader和Stockham等研究人员,在1967年发表的当今众所周知的FFT性质为契机,广泛应用FFT信号流程图的解释、bit位变换分析、定位计算、 $N\log N$ 的计算量等FFT的性质。

1) 这在使用手摇计算机的时代,简直是不可思议的。

作为 DSP 的其他成功例子,还有医用 CT 断层成像扫描仪的发明。它是利用生物体的各个部位对 X 射线吸收率不同的现象,并利用各个方向扫描的投影数据和 Radon 变换的反转公式再构造出检测体剖面图的仪器,这种仪器中 FFT 起到快速计算的作用。以后相继研制出的有:采用正电子(positron)的 CT 机和基于核磁共振(nuclear magnetic resonance, NMR)的 CT 机等仪器,它们对医学领域作出了很大贡献。为此,Cormack 与 Hounsfield 两位科学家荣获了 1979 年度的诺贝尔医学·生理学奖。

另外,还可以举出 Bellman 的动态规划法(dynamic programming, DP)在声音识别中的应用。DP 作为控制论和运筹学领域中最佳控制方法,一直是热门研究课题,如迫江的 DP 匹配法用于声音识别。以后,这种方法作为模式识别的基本技术,广泛用于文字识别和图像处理等领域。

可见,当把看似无关的数学理论适当地引进到 DSP 领域,并使其发挥本质的作用后,它就能成为产生出新技术的源泉,而成为引人注目的焦点。现在,基于超取样法(over sampling)的 CD 播放机、利用声音编码的移动电话、利用图像压缩技术的多媒体通信等领域中,DSP 理论正在起着越来越重要的作用。

1.3 本书的构成

第 2 章,学习与傅里叶级数、傅里叶变换和拉普拉斯变换等有关的基本数学知识。这些内容在数学或控制论等横向联系的讲义中也会涉及,因为它们是分析连续时间信号必须的工具,故本书也将其包含在内。

第 3 章,学习取样与 z 变换。把随时间连续变化的信号,经过取样变换为离散的时间信号的操作,这是 DSP 的第一步。伴随着取样出现的区域效应(areaing)是在日常生活中也常见到的现象。例如,在电影中快速旋转的车轮看起来似乎慢慢旋转,这是因为在电影中,1 秒内取样 24 帧画面所产生的效果。

第 4 章,学习 FFT 及其应用。先引入离散傅里叶变换(discrete Fourier transform, DFT),再推导出 FFT 快速计算方法。正如 1.2 节所叙述的那样,FFT 是在 DSP 中使用最频繁的算法,因此深入了解其各种性质是很重要的。然后研究卷积计算与频谱分析是怎样被应用的。

第 5 章,学习模拟滤波器与数字滤波器。滤波是信号处理中最常用的运算,滤波器的设计是基本的课题。本章中作为具有有限长、无限长的脉冲响应能力的数字滤波器的设计方法,把各种有关傅里叶级数与窗口函数等知识和有关模拟滤波器的知识,通过丰富的例子进行介绍。

第 6 章,学习自适应滤波器。它可以通过调节脉冲响应来适应周围环境的变化。这个课题在过去的大学信号处理教科书中很少涉及,如在

1.2 节中所叙述的那样,现在已应用到各技术领域。本章以 LMS 算法为中心,对其基本知识进行讲解。

以上就是本书的构成。其中第2章、第3章为基础部分;第4章、第5章、第6章相对比较独立。关于在上节中所述的话题,本书中多数都未深入探讨。有兴趣的读者,可进一步阅读更专业的著作(参考文献[1~3])。在本书中角频率是用 ω 来表示,而不是用 $2\pi f$ 来表示,虚数单位也按照电气工程学的习惯用符号 j 来表示,而不是用 i 来表示,以免与电流表示符号混淆。

另外,作为数字信号处理的入门书,大家可参阅书末给出的参考文献中的《信号处理入门》一书,它用简明通俗的语言阐述了读懂信号处理所必须掌握的、扎实的数学知识。

第2章

连续时间信号的变换

我们所碰到的各种各样信号波,都是通过观测物理现象所得到的。在观测过程中,把离散时间信号看成连续时间信号也无妨。这样的信号处理方法用在频率领域中,会得到较好的评论。因为这种信号处理先把信号分解成频率成分,再对其中相应的成分进行处理。进行这种分解的理论依据就是傅里叶分析法。

但是,不能成为傅里叶分析对象的信号也很多,比如:不具有周期性的信号,不衰减的无限延续的信号等。分析这样的信号使用拉普拉斯变换才能有效。在以上的各种变换中,当把信号移动到变换区域,并进行定型化处理时,具体的实现方式须依赖于电子电路。

本章中要说明的是傅里叶分析、拉普拉斯变换以及电路工作分析。

2.1 周期函数的频率分解

周期信号,是由振动、旋转等物理现象产生的。当然,当说到信号的周期性,是以无限、持续的波形为对象的。虽然这种理想状况在现实中几乎不存在,但周期性是分析信号波的基础,并且傅里叶级数是众所周知的有力手段。

为此,首先讲述傅里叶级数展开式的实数形式和复数形式,接着讨论展开系数的性质。

2.1.1 傅里叶级数

假设信号 $x(t)$ 的周期为 P ,那么下式对任意的 t 均成立。

$$x(t) = x(t + P) \quad (2.1)$$

若存在一个数 P 满足(2.1)式时,则 P 的整数倍也是它的周期,而其中的最小正值,则称为**基本周期**。由这个 P 所定义的基本频率、基本角频率分别表示为

$$f_0 = \frac{1}{P}, \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{P}$$

若设信号 $x(t)$ 的周期为 P , 可将式子按周期为 P 的三角函数展开, 则

$$x(t) = \frac{a_0}{2} + a_1 \cos \omega_0 t + b_1 \sin \omega_0 t + a_2 \cos 2\omega_0 t + b_2 \sin 2\omega_0 t + \cdots \\ + a_n \cos n\omega_0 t + b_n \sin n\omega_0 t + \cdots \quad (2.2)$$

将此式的右边各项, 由以下数学式确定时, 就把它称为 $x(t)$ 的傅里叶级数。

于是确定了使(2.2)式成立的各项系数 $|a_i|$ 和 $|b_i|$, 将必要的数学式归纳如下

$$\left. \begin{aligned} \int_{-\frac{P}{2}}^{\frac{P}{2}} \cos n\omega_0 t dt &= 0 \quad (n \neq 0) \\ \int_{-\frac{P}{2}}^{\frac{P}{2}} \sin n\omega_0 t dt &= 0 \\ \frac{1}{P} \int_{-\frac{P}{2}}^{\frac{P}{2}} \cos m\omega_0 t \cos n\omega_0 t dt &= \frac{1}{2} \delta_{mn} \quad (m = n \neq 0) \\ \frac{1}{P} \int_{-\frac{P}{2}}^{\frac{P}{2}} \sin m\omega_0 t \cos n\omega_0 t dt &= \frac{1}{2} \delta_{mn} \\ \int_{-\frac{P}{2}}^{\frac{P}{2}} \sin m\omega_0 t \sin n\omega_0 t dt &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (2.3)$$

式中, $\omega_0 = 2\pi/P$, 并且 δ_{mn} 为克罗内克的 δ 符号, 则

$$\delta_{mn} = \begin{cases} 1 & (m = n) \\ 0 & (m \neq n) \end{cases} \quad (2.4)$$

把(2.2)式的两边同时用 $\cos n\omega_0 t$ 相乘后一积分, 则

$$\begin{aligned} \text{左边} &= \frac{1}{P} \int_{-\frac{P}{2}}^{\frac{P}{2}} x(t) \cos n\omega_0 t dt \\ \text{右边} &= \frac{1}{P} \int_{-\frac{P}{2}}^{\frac{P}{2}} \left(\frac{a_0}{2} + a_1 \cos \omega_0 t + b_1 \sin \omega_0 t + a_2 \cos 2\omega_0 t + b_2 \sin 2\omega_0 t \right. \\ &\quad \left. + \cdots + a_n \cos n\omega_0 t + b_n \sin n\omega_0 t + \cdots \right) \cos n\omega_0 t dt \\ &= \frac{a_n}{2} \end{aligned}$$

因此, 可得

$$a_n = \frac{2}{P} \int_{-\frac{P}{2}}^{\frac{P}{2}} x(t) \cos n\omega_0 t dt \quad (n = 0, 1, 2, 3, \cdots) \quad (2.5)$$

同样(2.2)式的两边同时用 $\sin n\omega_0 t$ 相乘后一积分, 则

$$b_n = \frac{2}{P} \int_{-\frac{P}{2}}^{\frac{P}{2}} x(t) \sin n\omega_0 t dt \quad (n = 1, 2, 3, \dots) \quad (2.6)$$

这样, (2.2) 式的所有系数均已求出, 将其称为**傅里叶展开系数**, 或者简称为**展开系数**。

把这个级数按照称为实数形式的傅里叶级数展开, 为了更好地进行有关展开系数的讨论, 也为了进一步向傅里叶级数过渡, 再改写成复数形式。

改写前先复习一下复数的表示方法。设

$$z = x + jy, \quad j^2 = -1, \text{ 则}$$

- (1) 实数部 $\operatorname{Re}(z) = x$
- (2) 虚数部 $\operatorname{Im}(z) = y$
- (3) 共轭复数 $z^* = x - jy$
- (4) 绝对值 $|z| = (x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}}$
绝对值的平方 $|z|^2 = zz^*$
- (5) 幅角 $\angle z = \tan^{-1} \frac{y}{x}$

把以上的关系, 可在复平面上如图 2.1 所示。

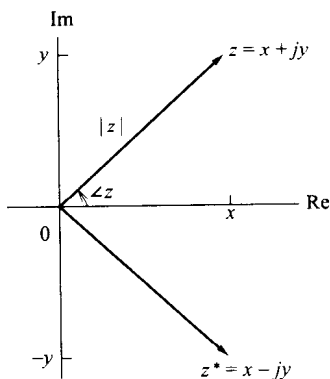


图 2.1 复数的平面表示法

下面所表示的是欧拉公式

$$e^{j\omega t} = \cos \omega t + j \sin \omega t \quad (2.7)$$

利用此公式, 并令 $\theta = \angle z$, 则

$$z = |z| e^{j\theta} \quad (2.8)$$

由 (2.7) 式, 可得

$$\cos\omega t = \frac{e^{j\omega t} + e^{-j\omega t}}{2}, \quad \sin\omega t = \frac{e^{j\omega t} - e^{-j\omega t}}{2j} \quad (2.9)$$

现在,把(2.9)式代入(2.2)式的二个通项中,则

$$\begin{aligned} a_n \cos n\omega_0 t + b_n \sin n\omega_0 t &= a_n \frac{e^{jn\omega_0 t} + e^{-jn\omega_0 t}}{2} + b_n \frac{e^{jn\omega_0 t} - e^{-jn\omega_0 t}}{2j} \\ &= \frac{a_n - jb_n}{2} e^{jn\omega_0 t} + \frac{a_{-n} - jb_{-n}}{2} e^{-jn\omega_0 t} \end{aligned} \quad (2.10)$$

由(2.5)式、(2.6)式所示的性质,可得

$$a_n = a_{-n}, b_n = -b_{-n} \quad (2.11)$$

若令复系数为

$$c_n = \frac{a_n - jb_n}{2} \quad (2.12)$$

则(2.10)式变为

$$a_n \cos n\omega_0 t + b_n \sin n\omega_0 t = c_n e^{jn\omega_0 t} + c_{-n} e^{-jn\omega_0 t} \quad (2.13)$$

将其用于(2.2)式,则

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{jn\omega_0 t} \quad (2.14)$$

进一步,把(2.5)式、(2.6)式代入(2.12)式后,再引用欧拉公式,则系数变为

$$c_n = \frac{1}{P} \int_{-\frac{P}{2}}^{\frac{P}{2}} x(t) e^{-jn\omega_0 t} dt \quad (2.15)$$

这样,就推导出了(2.14)式和(2.15)式的复数形式,并相应于实数形式的(2.3)式,下式成立。

$$\frac{1}{P} \int_{-\frac{P}{2}}^{\frac{P}{2}} e^{jm\omega_0 t} e^{-jn\omega_0 t} dt = \delta_{mn} \quad (2.16)$$

一般 c_n 是由(2.12)式所定义的复数,称为 $x(t)$ 的**频谱**。 c_n 可表示为

$$c_n = |c_n| e^{j\theta_n} \quad (2.17)$$

且有

$$\theta_n = \angle c_n = \tan^{-1} \frac{b_n}{a_n}, |c_n| = \left\{ \left(\frac{a_n}{2} \right)^2 + \left(\frac{b_n}{2} \right)^2 \right\}^{\frac{1}{2}}$$

式中, $|c_n|$ 称为**振幅频谱**, θ_n 为**幅角**,若把它看作为 n 的函数,则可称为**相位频谱**。因为 n 为整数,所以相位频谱是离散的,或称**离散频谱**。