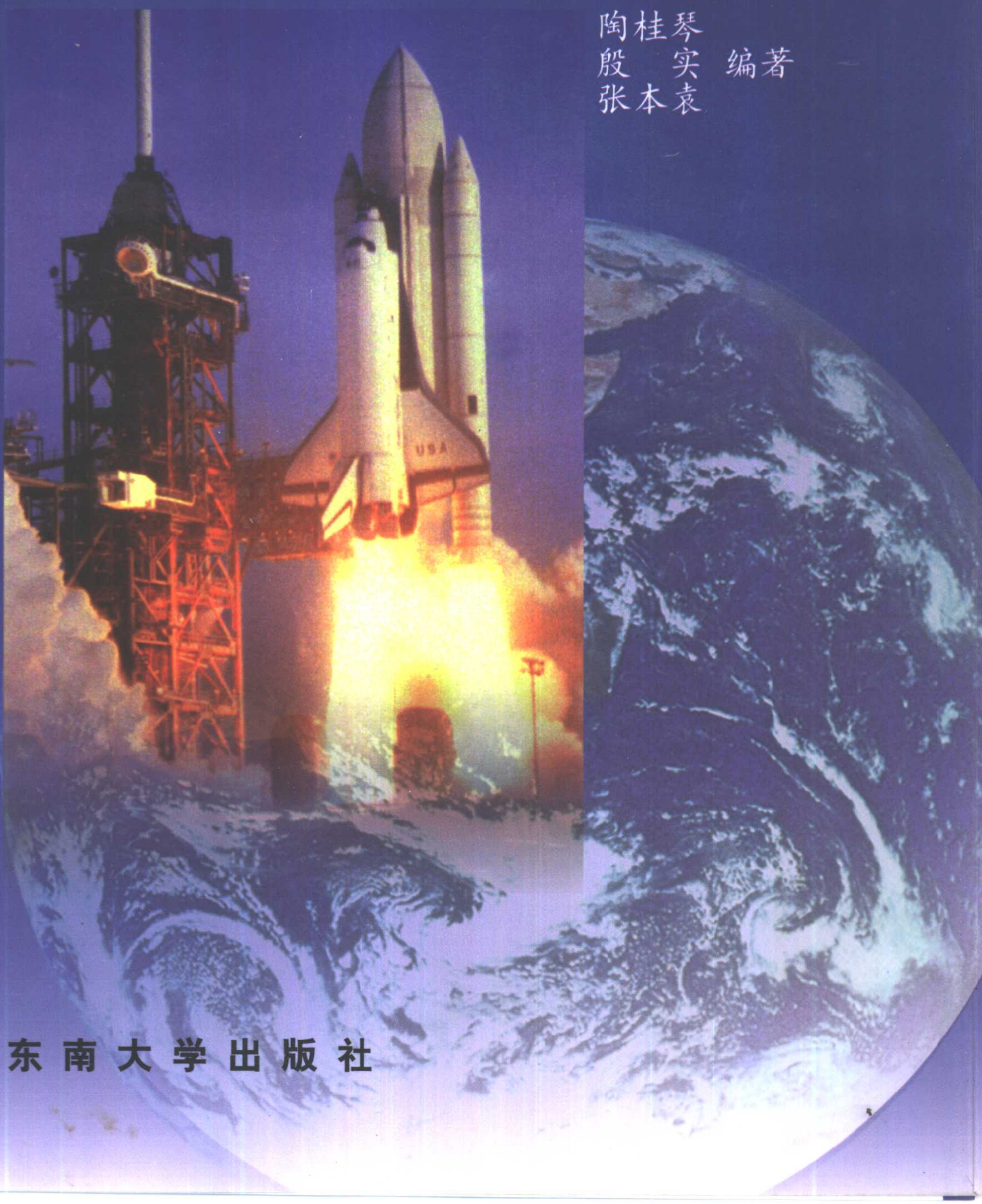
大学物理习题课指导书

陶桂琴
殷　实　编著
张本袁



东南大学出版社

内容提要

本书是一本大学物理课程的辅助性教材，它一方面为习题课提供素材，另一方面也为学生课后复习、提高提供指导。本书按知识块分为七个单元，每一个单元安排四部分内容，即基本内容与要求、解题指导、讨论题和习题。在内容、物理学公式以及符号上尽可能与马文蔚教授主编的面向21世纪课程教材《物理学》(第四版)保持一致。

本书可供学习工科大学物理课程的读者使用，也可供其他有关读者阅读。

图书在版编目(CIP)数据

大学物理习题课指导书/陶桂琴等编著．-南京：东南大学出版社，2001.2

ISBN 7-81050-712-5

Ⅰ.大… Ⅱ.陶…殷…张… Ⅲ.物理学-高等学校-教学参考资料 Ⅳ.04

中国版本图书馆CIP数据核字(2001)第02568号

东南大学出版社出版发行

(南京四牌楼2号 邮编210096)

出版人：宋增民

江苏省新华书店经销 溧阳市印刷厂印刷

开本：787mm×1092mm 1/16 印张：8.5 字数：212千字

2001年2月第1版 2001年2月第1次印刷

印数：1-7000册 定价：12.70元

(凡因印装质量问题，可直接向发行科调换。电话：025-3792327)

序

同学们在学习大学物理课程时,应十分重视基本概念和规律的理解,对物理学的科学研究方法的认识,并注重分析问题和解决问题能力的提高。习题讨论课是达到这一要求的较好形式。它可以使同学们在比较宽松活泼的环境下,交流学习体会,检验自己运用物理学原理解决问题的能力,纠正自己所出现的偏差。

东南大学从事大学物理教学的老师们,在多年习题讨论课的教学实践中,一方面精选了一批好的题目,总结出了上好习题讨论课的方法;另一方面注意不断汲取国内外成功的经验,从而使之不断完善。在此基础上,他们编写的《大学物理习题课指导书》终于正式出版了。这是一件有意义的工作。

书中对一些有典型意义的题目作了深入细致的分析,富于启发性,这对加深同学们对物理概念及规律的理解和掌握很有帮助;此外,还选一些适度地拓宽和加深的题目,这对扩充同学们的知识面是会有所帮助的;特别值得指出的是,书中还选编了一些与工程实际和生活实际相联系的题目,这些题目有利于培养同学们综合运用所学知识来解决实际问题的能力和创新能力,而且通过对某些工程实际问题的处理,也可启迪同学们学习大学物理的工程意识,提高学习物理的兴趣。

愿编者在教学实践中不断总结提高,使《大学物理习题课指导书》更加完善,为提高我国工科大学物理教学质量作出更大的贡献。

马文蔚

2001年元月于兰园

前　言

习题讨论课是学好大学物理课程的一种方法，也是提高物理课程教学质量的一种有效途径。当学生学完一部分物理内容后，针对物理课中的重点和难点以及对物理学方法的领会，在教师指导下，习题讨论课可给学生提供一个自由讨论的机会。通过讨论，澄清头脑中一些模糊认识，加深对物理学中基本概念、定律、定理的理解，提高分析问题、解决问题和综合应用物理学基本概念、定律、定理的能力。

本书就是为了适用这一学习形式而编写的。书中所选例题、讨论题和习题除了注重物理知识的覆盖面以及对基本概念和规律的理解外，还较多地强调了物理学研究方法的运用、物理学各部分知识的融合以及物理学基本原理在工程技术中的应用，以期培养学生的创新能力和工程意识。

本书是以90年代初东南大学物理系组织编写的《大学物理习题讨论课指导书》讲义为雏形，后经过三次较大规模的补充修改而成书的。本书的初稿讲义也已在我校使用了五届，取得了良好的教学效果。

本书的第一单元、第三单元和第七单元由陶桂琴编写，第五单元和第六单元由殷实编写，第二单元和第四单元由张本袁编写；全书由陶桂琴统稿。东南大学谈漱梅副教授曾审阅了本书的初稿，叶善专教授、解希顺教授曾对本书修改稿提出了若干中肯的修改意见，其他物理同仁（主要有蒋福明、解希顺、谈漱梅等）曾为本书做了不少前期工作，编者在此一并表示诚挚的感谢。

由于编者水平有限，书中难免有缺点和错误，敬请读者不吝指正。

编　者

于东南大学

2000年10月

目 录

0 绪论……（1）
第一单元 力学……（5）
第一部分 质点力学……（5）
一、基本内容与要求……（5）
二、解题指导……（7）
三、讨论题……（12）
四、习题……（13）
第二部分 刚体的转动……（15）
一、基本内容与要求……（15）
二、解题指导……（16）
三、讨论题……（22）
四、习题……（23）
第三部分 狭义相对论……（24）
一、基本内容与要求……（24）
二、解题指导……（26）
三、讨论题……（29）
四、习题……（30）
第二单元 静电学……（32）
一、基本内容与要求……（32）
二、解题指导……（34）
三、讨论题……（41）
四、习题……（43）
第三单元 （电）磁学……（46）
一、基本内容与要求……（46）
二、解题指导……（49）
三、讨论题……（58）
四、习题……（60）
第四单元 气体动理论与热力学……（65）
一、基本内容与要求……（65）
二、解题指导……（67）
三、讨论题……（74）
四、习题……（76）
第五单元 机械振动和机械波……（78）
一、基本内容与要求……（78）
二、解题指导……（80）

三、讨论题 ……………………………………………………………………………………………… (88)
四、习题 ……………………………………………………………………………………………… (90)
第六单元　波动光学 ……………………………………………………………………………… (94)
一、基本内容与要求 ……………………………………………………………………………… (94)
二、解题指导 ……………………………………………………………………………………… (97)
三、讨论题 ………………………………………………………………………………………… (106)
四、习题 …………………………………………………………………………………………… (109)
第七单元　近代物理基础 ……………………………………………………………………… (112)
一、基本内容与要求 ……………………………………………………………………………… (112)
二、解题指导 ……………………………………………………………………………………… (114)
三、讨论题 ………………………………………………………………………………………… (117)
四、习题 …………………………………………………………………………………………… (119)
习题参考答案 …………………………………………………………………………………… (120)
参考文献 ………………………………………………………………………………………… (124)
附　录　工科大学物理课程(本科)教学基本要求 ……………………………………………… (125)

0 绪 论

《大学物理》是高校工科各专业学生的一门十分重要的必修基础课。在大学物理的教学过程中，开设大学物理习题讨论课的目的在于提高教学质量。为了使讨论课达到预期的效果，上讨论课的时间应安排在学生对所学的内容有了较深刻的了解，能够提出问题和看法的时候。这就要求学生在上讨论课之前，阅读和复习有关的教材和课堂笔记及参考书，并做一定量的习题，通过复习和做题发现自己对物理学中的基本概念、定律、定理的理解等方面所存在的问题，然后带着问题参加讨论，做到有的放矢。

必须指出，学生在学习《大学物理》的过程中，做习题是一个重要的学习环节。学生通过认真完成作业题以及讨论题，不但可以达到复习、巩固所学的知识，加深对教学内容的理解，检查自己对知识掌握的程度，以及提高运用所学的物理知识解决实际问题能力的目的，而且有助于培养严谨求实的科学作风。

为了帮助同学高标准地完成物理作业，现提出如下要求：

(1)认真复习　做物理作业之前，必须先复习有关的物理内容，如看课堂笔记、教科书及参考书，对这些内容作一番认真的钻研，在复习好的基础上再做习题，切不可不复习就急于赶作业，更不能抄袭他人作业。

(2)搞清题意　做题前一定要仔细审题，在搞清题意后，简要地写出该题的已知条件和要求的物理量。

(3)画示意图　要认真地用有关的作图工具(如直尺、圆规等)画出必要的示意图。如解力学题时要画出示力图，建立合适的坐标系等。

(4)明确根据　做作业时要根据物理概念、定律、定理作出必要的分析说明，思路要清晰，论证要严谨，列方程要有根据。

(5)先求文字解　对给出数据的计算题，一定要养成先求文字解的习惯。对文字解一定要作量纲检查及合理性分析，最后再代入数据算出数值结果，并注明单位。数值结果一般取三位有效数字。

(6)讨论结果　对结果进行必要的讨论，常常可以加深对同类物理问题的理解，起到举一反三的作用。

下面举两例作为示范，供参考。

【例 0-1】 质量 $M = 10\text{kg}$，半径 $R = 0.20\text{m}$ 的匀质圆柱体与质量 $m = 4\text{kg}$，半径 $r = 0.10\text{m}$ 的匀质圆柱体固定在一起，可以绕水平光滑几何轴 OO' 转动，现分别绕以足够长的轻绳，绳的一端固定在圆柱体上，另一端系一质量分别为 m_1 和 m_2 的物体，且 $m_1 = m_2 = 2\text{kg}$，它们挂在圆柱体的两侧(如例 0-1 图 a)，若开始时 m_1 与 m_2 离地高度均为 h，$h = 2.0\text{m}$，并由静止释放，求：

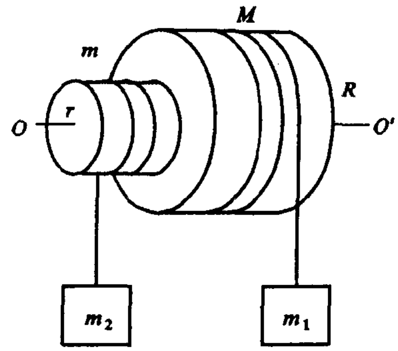
(1)圆柱体转动的角加速度；

(2)两侧轻绳的张力；

(3)经过多长时间一物体着地。

解:(1)隔离物体,画出联合圆柱体、m_1、m_2 的受力图,如例 0-1 图(b),设各物体的加速度如图所示,m_1 物体作平动,选向下为坐标轴正向,据运动定律有

$$m_1 g - T_1 = m_1 a_1 \qquad (1)$$



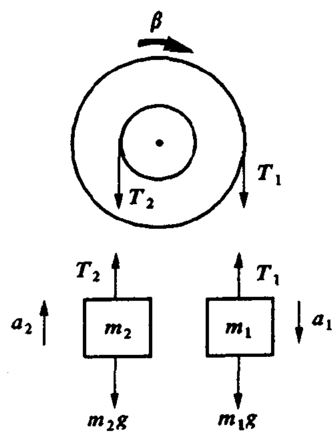
例 0-1 图(a)

联合圆柱体作定轴转动,设顺时针向为转动正方向,据转动定律有

$$T_1 R - T_2 r = J\alpha = \left(\frac{1}{2}MR^2 + \frac{1}{2}mr^2\right)\cdot\alpha \qquad (2)$$

m_2 物体作平动,设向上加速度为 a_2,据运动定律有

$$T_2 - m_2 g = m_2 a_2 \qquad (3)$$



例 0-1 图(b)

根据运动之间关系有

$$\left.\begin{aligned} a_1 &= R\cdot\alpha \\ a_2 &= r\cdot\alpha \end{aligned}\right\} \qquad (4)$$

式(1)$\cdot R$ + 式(2) + 式(3)$\cdot r$,并代入式(4)可解得

$$\alpha = \frac{m_1 gR - m_2 gr}{m_1R^2 + m_2r^2 + \frac{1}{2}MR^2 + \frac{1}{2}mr^2}$$

$$= \frac{2\times 9.8\times 0.20 - 2\times 9.8\times 0.10}{2\times 0.20^2 + 2\times 0.10^2 + \frac{1}{2}10\times 0.20^2 + \frac{1}{2}4\times 0.10^2}$$

$$= 6.13/\mathrm{s}^2$$

(2)由式(1)及式(4)得

$$T_1 = m_1 g - m_1 a_1 = m_1(g - R\alpha)$$
$$= 2\times(9.8 - 0.20\times 6.13) = 17.1\mathrm{N}$$

由式(3)及式(4)得

$$T_2 = m_2 g + m_2 a_2 = m_2(g + r\alpha)$$
$$= 2\times(9.8 + 0.10\times 6.13) = 20.8\ \mathrm{N}$$

(3)因为 $\alpha > 0$ 表示联合圆柱体顺时针转动,$a_1 > 0$ 表示 m_1 向下平动,$a_2 > 0$ 表示 m_2 向上平动,所以 m_1 物体先着地,对 m_1,$h = \frac{1}{2}a_1 t^2$,所以

$$t = \sqrt{\frac{2h}{a_1}} = \sqrt{\frac{2\times 2}{0.20\times 6.13}} = 1.81\mathrm{s}$$

讨论:当 m_1 着地后,与它相联系的绳中张力 T_1 消失,m_2 及联合圆柱体依靠惯性继续运动,但其加速度及角加速度数值和方向都发生变化,作减速运动及减速转动,直至速度及角速度为零,然后改变运动、转动方向……。

【例 0-2】 长 $l=0.20\text{m}$ 的绝缘线 AB 上均匀带电，线电荷密度 $\lambda=0.5\times10^{-8}\text{C/m}$（如例 0-2 图(a)），求：

(1)在 AB 延长线上，离 B 点 $d_1=0.10\text{m}$ 的 P 点场强；

(2)在 AB 垂直平分线上，距垂足 $d_2=0.10\text{m}$ 的 Q 点场强。

解：以 AB 中点为坐标原点，沿 AB 方向为 x 轴正方向，与它垂直方向为 y 轴正方向，P 点在 x 轴上，Q 点在 y 轴上。

(1)把 AB 带电体看作由许多点电荷组成，其中位于 $x\rightarrow x+\mathrm{d}x$ 的电荷元带电量 $\mathrm{d}q=\lambda\mathrm{d}x$，它在 P 点产生的场强 $\mathrm{d}E=\dfrac{\lambda\mathrm{d}x}{4\pi\varepsilon_0\left(d_1+\dfrac{l}{2}-x\right)^2}$，沿 x 轴方向，如例 0-2 图(b)，其余各点电荷在 P 点场强也都沿 x 轴方向。

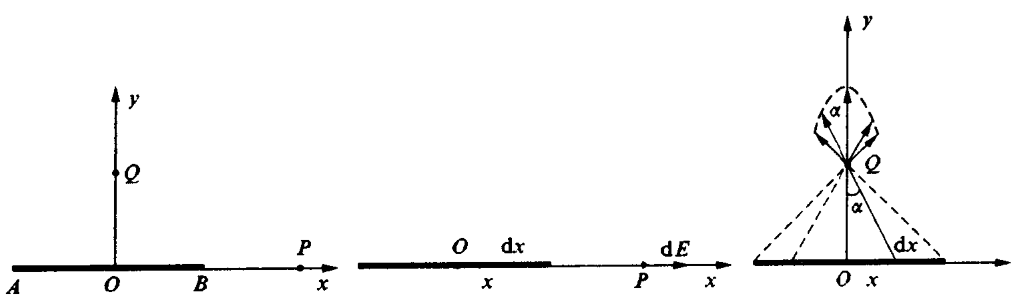
由叠加原理得

$$E=\int\mathrm{d}E=\int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}}\frac{\lambda\mathrm{d}x}{4\pi\varepsilon_0\left(d_1+\dfrac{l}{2}-x\right)^2}$$

$$=\frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{(d_1+l/2-x)}\Bigg|_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}}=\frac{\lambda l}{4\pi\varepsilon_0 d_1(d_1+l)}$$

$$=9\times10^9\,\frac{0.5\times10^{-8}\times0.20}{0.10\times(0.10+0.20)}=300\ \text{N/C}$$

方向沿 x 轴正方向。



例 0-2 图(a)　　例 0-2 图(b)　　例 0-2 图(c)

(2)位于 $x\rightarrow x+\mathrm{d}x$ 的点电荷在 Q 点产生的场强 $\mathrm{d}E=\dfrac{\lambda\mathrm{d}x}{4\pi\varepsilon_0(x^2+d_2^2)}$，沿 Q 点相对电荷元径矢方向如例 0-2 图(c)，其余电荷在 Q 点产生的场强方向分布也如例 0-2 图(c)，因电荷分布对称于 y 轴，故电场分布也对称于 y 轴，合场强在 x 方向分量为零，下面仅将电场向 y 方向投影叠加。

$$\mathrm{d}E_y=\mathrm{d}E\cos\alpha,\qquad \cos\alpha=\frac{d_2}{\sqrt{x^2+d_2^2}}$$

$$E_y = \int \mathrm{d}E_y = \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} \frac{\lambda \mathrm{d}x}{4\pi\varepsilon_0(x^2 + d_2^2)} \cdot \frac{d_2}{\sqrt{x^2 + d_2^2}}$$

$$= \frac{\lambda d_2}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{x}{d_2^2\sqrt{x^2 + d_2^2}} \Bigg|_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}}$$

$$= \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 d_2} \cdot \frac{l}{\sqrt{\frac{l^2}{4} + d_2^2}}$$

$$= 9 \times 10^9 \times 0.5 \times 10^{-8} \times \frac{0.20}{0.10 \times \sqrt{\frac{0.20^2}{4} + 0.10^2}}$$

$$= 6.36 \times 10^2 \ \mathrm{N/C}$$

方向沿 y 轴正方向。

第一单元　力　学

第一部分　质点力学

一、基本内容与要求

1. 基本概念

(1)描写质点运动的四个物理量

(a)位置矢量$\vec{r}$(又称径矢)　在质点运动过程中它随时间而变化,其函数关系 $\vec{r}(t)$称为运动方程。

(b)位移 Δr　Δr是从初始位置指向终点位置的有向线段。

(c)速度 $\vec{v}$　$\vec{v}=\frac{d\vec{r}}{dt}$。在直角坐标系内,$\vec{v}=\frac{dx}{dt}\vec{i}+\frac{dy}{dt}\vec{j}+\frac{dz}{dt}\vec{k}$;在自然坐标系内 $v=\frac{dS}{dt}$,S 是路程,方向沿曲线的切向。速度的大小称为速率。

(d)加速度$\vec{a}$　$\vec{a}=\frac{d\vec{v}}{dt}$。

在直角坐标系内$\vec{a}=\frac{dv_x}{dt}\vec{i}+\frac{dv_y}{dt}\vec{j}+\frac{dv_z}{dt}\vec{k}$;

在自然坐标系或圆周运动中$\vec{a}=\frac{v^2}{\rho}\vec{n}_0+\frac{dv}{dt}\vec{\tau}_0$,$\rho$ 是曲率半径。

要求在平面曲线运动中,能用直角坐标系或自然坐标系,根据具体问题求运动方程;并能由运动方向求质点的位移、速度、加速度;由速度(或加速度)和已知条件求运动方程(或速度)。

(2)功和能

(a)功　功是力对空间的累积作用,变力作功 $W=\int\vec{F}\cdot d\vec{r}$,作功总是涉及状态变化,它不仅与始末状态有关,还和过程有关。

(b)能量　是状态的单值函数,一旦状态确定,能量数值就可以确定,可以通过作功来计算能量变化。

动能　质点动能 $E_k=\frac{1}{2}mv^2$。

势能　具有相对性,其值与势能零点选取有关,若分别选地面、弹簧未伸长时及无限远处为势能零点,则系统重力势能、弹性势能、引力势能分别为 mgh、$\frac{1}{2}kx^2$、$-G\frac{Mm}{r}$。

要求会计算在直线运动情况下变力所作之功和在曲线运动情况下不复杂的变力所作

之功,会计算重力势能、弹性势能和引力势能。

(3)动量和冲量

(a)动量　质点动量$\vec{P}=m\vec{v}$,是状态量,是矢量,质点系动量就是各质点动量的矢量和。

(b)冲量　是力对时间的累积作用,是矢量。力的冲量$\vec{I}=\int\vec{F}\cdot dt$

要求会计算动量、动量变化,会计算一维变力的冲量。

(4)质点的角动量

质点对某参考点的角动量$\vec{L}=\vec{r}\times m\vec{v}$,$\vec{r}$为质点对该点的径矢,其大小为$L=mvr\sin\alpha$。要求能够计算质点作平面运动时的角动量。

2. 基本定律

(1)牛顿运动定律　　$\vec{F}=m\vec{a}$

可写成分量式:

$$\begin{cases}F_x=ma_x\\F_y=ma_y\end{cases}\quad\text{或}\quad\begin{cases}F_\tau=m\dfrac{dv}{dt}\\F_n=m\dfrac{v^2}{R}\end{cases}$$

要求能在直角坐标系或自然坐标系(圆周运动)中应用微积分方法求解平面运动中一维变力作用下的质点动力学问题。

(2)动能定理　功能原理　机械能守恒定律

(a)动能定理

$$W=\frac{1}{2}mv^2-\frac{1}{2}mv_0^2$$

(b)功能原理

$$W(\vec{F}_{外})+W(\vec{f}_{非内})=E-E_0=(E_k+E_p)-(E_{k0}+E_{p0})$$

(c)机械能守恒定律　若$W(\vec{F}_{外})+W(\vec{f}_{非内})=0$,则$E=E_0$,系统机械能守恒。

要求掌握动能定理、功能原理及机械能守恒定律并用它们正确分析解决质点在平面内运动的简单力学问题。

(3)动量原理　动量守恒定律　质点角动量守恒定律

(a)动量原理

$$\vec{I}=m\vec{v}-m\vec{v}_0\qquad(\text{对质点})$$

$$\vec{I}=\sum_i m_i\vec{v}_i-\sum_i m_i\vec{v}_{io}\qquad(\text{对质点系})$$

它是矢量式,在平面上运动可以写成两个分量式如下:

$$\begin{cases}\int F_{合x}dt=\sum_i m_iv_{ix}-\sum_i m_iv_{iox}\\\int F_{合y}dt=\sum_i m_iv_{iy}-\sum_i m_iv_{ioy}\end{cases}$$

(b)动量守恒定律　若系统不受外力作用或所受外力矢量和为零,则系统动量守恒

$$\sum_i m_i \vec{v}_i = \sum_i m_i \vec{v}_{io}$$

也可以写成分量式(略)。

若系统在某一方向不受外力作用或合外力在某方向分量为零,则在该方向动量守恒。

(c)质点角动量守恒定律　作用在质点上的力对某参考点的合外力矩为零,则质点对该参考点角动量守恒。

质点仅受有心力作用,则质点对力心的角动量守恒。

要求掌握动量原理、动量守恒定律及角动量守恒定律,能正确分析并应用它们处理简单系统在平面内运动的动力学问题。

3. 质点力学问题解题步骤

(1)首先明确物理现象的过程特点,如遇比较复杂的问题应明确整个物理过程是由几个物理过程组成的,找出相邻过程的联系点,再分别研究每一个物理过程。

(2)根据问题要求和计算方便确定研究对象(可以是质点,也可以是质点系)。

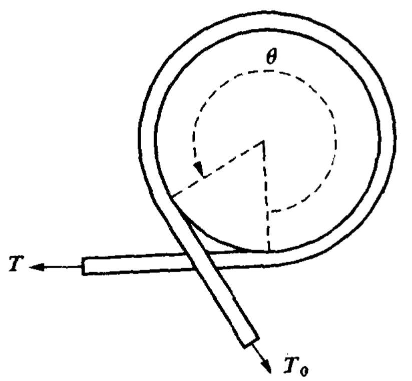
(3)把质点(或质点系)从周围物体中隔离出来进行受力分析,并画出受力图。

(4)选定坐标系,分析研究对象的运动状态及其变化。

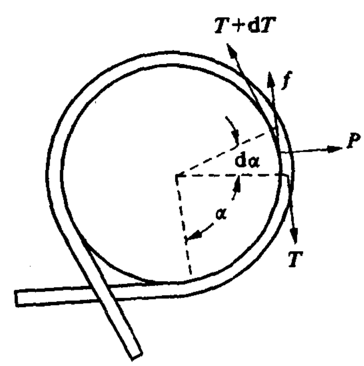
(5)根据运动基本定律列出方程,进行求解。

二、解题指导

【例 1-1】　绳子绕在一固定圆柱上而不打滑,当绳子承受负载巨大的拉力 T 时,人可以用小得多的拉力 T_0 拽住绳子。绳子与圆柱间的静摩擦系数为 μ,绳子绕圆柱的张角为 θ(如例 1-1 图(a)),求 T_0 与 T 之间的关系式。



例 1-1 图(a)



例 1-1 图(b)

解:(1)研究对象:取绳上的一小段,长为 Δl,位于 $\alpha \to \alpha + \mathrm{d}\alpha$ 位置;该段绳所受之力:绳之张力分别为 T 与 $T+\mathrm{d}T$;圆柱体给予支承力 P;因负载拉力巨大,忽略重力;绳索有顺时针滑动趋向,故在该段绳索上受有沿逆时针向的摩擦力 f:

$$f=\mu P \tag{1}$$

(2)对该段绳列平衡方程

法向 $(T+\mathrm{d}T)\sin\frac{\mathrm{d}\alpha}{2}+T\sin\frac{\mathrm{d}\alpha}{2}-P=0$

因 $\mathrm{d}\alpha$ 很小，$\sin\frac{\mathrm{d}\alpha}{2}\approx\frac{\mathrm{d}\alpha}{2}$，忽略 $\mathrm{d}T\mathrm{d}\alpha$ 项，有

$$P=T\mathrm{d}\alpha \tag{2}$$

切向 $(T+\mathrm{d}T)\cos\frac{\mathrm{d}\alpha}{2}-T\cos\frac{\mathrm{d}\alpha}{2}+f=0$

因 $\mathrm{d}\alpha$ 很小，$\cos\frac{\mathrm{d}\alpha}{2}\approx1$，上式简化为

$$\mathrm{d}T+f=0 \tag{3}$$

(3)将式(1)、式(2)代入式(3)，有

$$\mathrm{d}T+\mu T\mathrm{d}\alpha=0$$

分离变量

$$\frac{\mathrm{d}T}{T}=-\mu\mathrm{d}\alpha$$

两边积分，当 $\alpha=0$ 时 $T=T$，$\alpha=\theta$ 时 $T=T_0$，

$$\ln T\Big|_{T}^{T_0}=-\mu\alpha\Big|_0^{\theta}$$

所以
$$T_0=Te^{-\mu\theta}$$

【例 1-2】 一物体在 5s 内由静止下落 108m，如阻力正比于速度的大小，求它的极限速度。

解：取物体初始位置为坐标原点，向下为 x 轴正方向，据运动定律：

$$mg-kv=m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} \tag{1}$$

开始时物体速度为零，阻力最小，加速度最大。但随速度增大，阻力增大，加速度减小。加速度为零时，速度达最大值为极限速度，用 v_{T} 表示，则有

$$mg-kv_{\mathrm{T}}=0$$

所以
$$v_{\mathrm{T}}=\frac{mg}{k} \tag{2}$$

将式(1)分离变量

$$\frac{\mathrm{d}v}{v_{\mathrm{T}}-v}=\frac{k}{m}\mathrm{d}t$$

两边积分并利用条件，当 $t=0$ 时速度为零；时间为 t 时速度为 v，有

$$v=v_{\mathrm{T}}(1-e^{-\frac{k}{m}t}) \tag{3}$$

对式(3)积分可得运动方程

$$x=\int_0^t v\mathrm{d}t=v_{\mathrm{T}}\left(t+\frac{m}{k}e^{-\frac{k}{m}t}\right)\Big|_0^t$$

$$=\frac{mg}{k}\left(t+\frac{m}{k}e^{-\frac{k}{m}t}-\frac{m}{k}\right)$$

代入已知条件，$t=5\text{s}$ 时，$x=108\text{m}$

$$\frac{108}{g}=\frac{m}{k}(5+\frac{m}{k}e^{-\frac{k}{m}\times 5}-\frac{m}{k})$$

令 $\frac{m}{k}=\psi$，有

$$\frac{108}{g}=\psi(5+\psi e^{-\frac{5}{\psi}}-\psi) \tag{4}$$

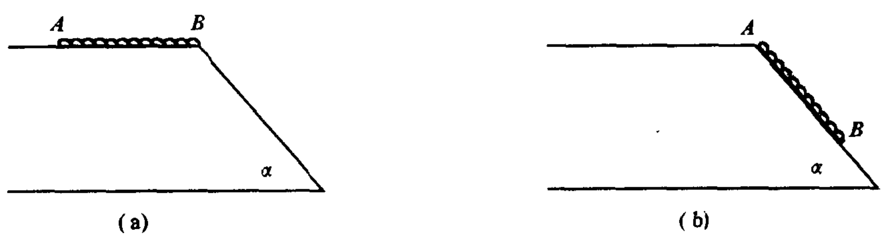
现利用函数 e^x，在 $|x|<1$ 时可以展开，$e^x=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots$将式(4)展开并略去三次以上的项后有

$$\begin{aligned}\frac{108}{g}&=\psi(5+\psi[1-\frac{5}{\psi}+\frac{5^2}{2\psi^2}-\frac{5^3}{6\psi^3}]-\psi)\\&=\psi(5+\psi-5+\frac{12.5}{\psi}-\frac{125}{6\psi^2}-\psi)\\&=12.5-\frac{125}{6\psi}\end{aligned}$$

$$\psi=\frac{125}{(12.5-\frac{108}{g})6}=14.08$$

$$v_T=\frac{mg}{k}=\psi g=14.08\times 9.8=137.99\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1} \tag{5}$$

【例 1-3】 均匀柔软不可伸长的链条 AB 长为 l，其线质量密度为 λ，放在梯形台上，水平台面是光滑的，而斜面是粗糙的，与水平面夹角 α，链在斜面上摩擦系数为 μ，开始时使得链有一初速度 v_0，如例 1-3 图。当 B 端下滑时，链既不会发生堆积现象，也不脱离平面和斜面，试求 A 端至拐点时链的速度。



例 1-3 图

解：

解法Ⅰ 由运动方程求解

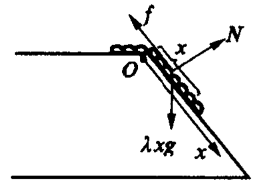
建立例 1-3 图(c)所示坐标系：拐点为原点，沿斜面向下方向为 x 轴正方向。

当在斜面上链条长为 x 时，链受重力 λxg，支承力 N，摩擦力 f，方向沿斜面向上，按质心运动定理可列运动方程

$$\lambda l\frac{d^2x}{dt^2}=\lambda xg\sin\alpha-\mu\lambda xg\cos\alpha \tag{1}$$

又

$$\lambda l\frac{d^2x}{dt^2}=\lambda l\frac{dv}{dt}=\lambda l\frac{dv}{dx}\frac{dx}{dt}=\lambda lv\frac{dv}{dx} \qquad (2)$$



例 1-3 图(c)

将式(2)代入式(1)并分离变量

$$lv\mathrm{d}v=(g\sin a-\mu g\cos a)x\mathrm{d}x$$

两边积分 $$l\frac{1}{2}v^2\Big|_{v_0}^{v}=(g\sin a-\mu g\cos a)\frac{x^2}{2}\Big|_0^l$$

最后有 $$v=\sqrt{gl(\sin a-\mu\cos a)+v_0^2}$$

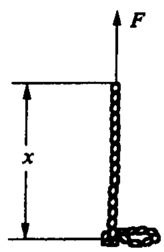
解法Ⅱ 应用质点系动能定理

$$W(\vec{F})=\frac{1}{2}m\,v^2-\frac{1}{2}m\,v_0^2$$

$$mg\frac{l}{2}\sin\alpha-\int_0^l\mu\lambda xg\cos\alpha\mathrm{d}x=\frac{1}{2}m\,v^2-\frac{1}{2}m\,v_0^2$$

所以 $$v=\sqrt{v_0^2+gl(\sin a-\mu\cos a)}$$

【例 1-4】 一长为 l、密度均匀的柔软链条,其单位长度的质量为 λ,将其卷成一堆放在地面上,如例 1-4 图。若手握链条的一端,以匀加速 a 将其上提,当绳端提离地面高度为 x 时,$x<l$,求手的提力。



例 1-4 图

解:以地面为原点,向上为 x 轴正方向。

解法Ⅰ 运动定律

设 t 时刻,链条一端距原点高度为 x,其速率为 v,以整个链条为研究对象,该系统 t 时刻总动量为

$$P=\lambda xv \qquad (1)$$

(其中在地面的那部分速度为零,动量也为零)。

该系统受力如下:拉力 F 方向沿 x 轴正向;重力 $l\lambda g$ 沿 x 轴负方向;与在地面上的链条相对应的支承力 $N=(l-x)\lambda g$,方向向上。

据质点系动量定理

$$F-l\lambda g+(l-x)\lambda g=\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t} \qquad (2)$$

即

$$F-x\lambda g=\lambda\frac{\mathrm{d}(x\,v)}{\mathrm{d}t}=\lambda v^2+\lambda xa$$

又因匀加速提起 $$v^2=2ax$$

所以 $$F=x\lambda g+3x\lambda a$$

解法Ⅱ 变质量问题

研究被拉起的竖直那部分,设 t 时刻链条一端距原点高度为 x,速度为 v,经过 Δt 后距原点的高度为 $x+\Delta x$,速度为 $(v+\Delta v)$。

该段链条,受拉力 F,重力 $x\lambda g$,据质点系动量定理有

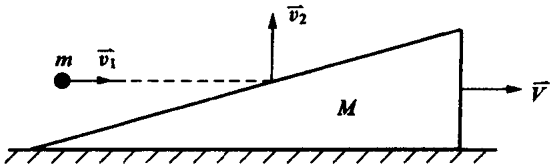
$$(F-xg\lambda)\Delta t=(x+\Delta x)\lambda(v+\Delta v)-x\lambda v$$

两边除以 Δt 并令 $\Delta t\to0$,又 $\lim\limits_{\Delta\to0}\frac{\Delta x}{\Delta t}=v$, $\lim\limits_{\Delta t\to0}\frac{\Delta v}{\Delta t}=a$,忽略高阶小量 $v^2=2ax$,有

$$F - xg\lambda = \lambda v^2 + x\lambda a = 3x\lambda a$$

所以
$$F = 3x\lambda a + x\lambda g$$

【例 1-5】 如例 1-5 图所示，质量为 M 的滑块正沿着光滑水平地面向右滑动，一质量为 m 的小球对地以水平向右速度 v_1 与滑块斜面相碰撞，碰后小球竖直弹起，速率为 v_2（对地），若碰撞时间为 Δt，试计算此过程中，滑块对地的平均作用力和滑块速度增量。



例 1-5 图

解：研究对象：取小球 m 及滑块 M 组成的物体系统。

系统中受之外力有：小球重力 mg、滑块重力 Mg 与地面对滑块支承力 N，这些力都在竖直方向。据质点系动量定理，有

$$(N - mg - Mg)\Delta t = (m v_2 + M0) - (0 + 0)$$

所以
$$N = \frac{mv_2}{\Delta t} + mg + Mg$$

设滑块碰撞前后速度分别为 V 及 V'，在 x 方向（水平方向）系统不受外力作用，故动量守恒，有

$$MV + mv_1 = MV'$$

所以
$$V' - V = \frac{mv_1}{M}$$

【例 1-6】 雨滴在水蒸气中下落，单位时间里有质量 m 的水蒸气凝聚在雨滴上，设雨滴的最初质量为 M，并由静止下落，求下落距离随时间变化的函数关系，假定空气阻力略去不计。

解：雨滴在下落过程中不断有水蒸气凝聚，故水滴质量在变化，其函数式为 $M + m t$，因不计阻力，雨滴下落过程仅受重力 $(M + mt)g$，据运动定律有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[(M + m t)v] = (M + m t)g$$

或
$$\mathrm{d}[(M + m t)v] = (M + m t)g\mathrm{d}t$$

两边积分，代入初始条件，当 $t = 0$ 时，$v = 0$

有
$$(M + m t)v = g(M t + \frac{1}{2}m t^2)$$

将右边配成完全平方式，并化简

可得
$$v = \frac{g}{2m}[(M + m t) - \frac{M^2}{M + m t}]$$

继续分离变量和两边积分，有

$$x - x_0 = \frac{g}{2}[\frac{1}{2}t^2 + \frac{M}{m}t - \frac{M^2}{m^2}\ln(1 + \frac{m}{M}t)]$$