21世纪高等院校选用教材　非数学专业

哈尔滨工业大学工科数学教学丛书

线性代数与解析几何

哈尔滨工业大学数学系　组编

游　宏　吴勃英　董增福　编

科学出版社

21世纪高等院校选用教材(非数学专业)
哈尔滨工业大学工科数学教学丛书

线性代数与解析几何

哈尔滨工业大学数学系 组编
游 宏 吴勃英 董增福 编

科学出版社
2001

内 容 简 介

本书是国家工科数学教学基地之一的哈尔滨工业大学数学系根据近几年数学教学改革的实践而编写的系列教材之一.全书对非数学专业的"线性代数与解析几何"的教学内容进行了更新、整合,加强了代数与几何的联系与融会,用代数的观点来介绍解析几何.全书内容包括:一元多项式、行列式、矩阵、向量与线性空间、直线与平面、线性方程组、线性变换、特性值特征向量及相似矩阵、Jordan标准形,二次型与二次曲面.书中除配有相应的习题外还提出一些供学生深入思考的问题.

本书可作为高等院校理、工、经济、管理等专业的教材或教学参考书,也可供各类专业人员学习参考.

图书在版编目(CIP)数据

线性代数与解析几何/游宏,吴勃英,董增福编.—北京:科学出版社,2001
(21世纪高等院校选用教材(非数学专业))
ISBN 7-03-009593-6

Ⅰ.线… Ⅱ.①游…②吴…③董… Ⅲ.①线性代数-高等学校-教材②解析几何-高等学校-教材 Ⅳ.①O151.2②O182

中国版本图书馆CIP数据核字(2001)第042682号

科学出版社 出版
北京东黄城根北街16号
邮政编码:100717
http://www.sciencep.com
新蕾印刷厂 印刷
科学出版社发行 各地新华书店经销
*
2001年9月第 一 版 开本:720×1000 1/16
2001年9月第一次印刷 印张:16 3/4
印数:1—7 000 字数:301 000

定价:21.00元

(如有印装质量问题,我社负责调换〈环伟〉)

编 者 的 话

本书是为工科院校中对数学基础要求较高的工科专业及非数学的理科专业本科学生编写的“线性代数与解析几何”课程教材.

近两年,哈尔滨工业大学对一些数学基础要求较高的工科专业本科教学实行了新的教学体系.本体系无论在数学教学的内容上,还是在数学各分支间的融会上,都对原有的工科数学教材作了一定程度的改革.本书是在教学实践的基础上,参考部分重点院校工科《线性代数与解析几何》教材,遵循“加强基础、注重应用、培养能力”的指导思想编写而成的.本书的初稿已在哈尔滨工业大学试用1年,学时为75小时左右.本书具有以下几方面的特点:

1. 注重线性代数与解析几何的融合.本书以线性代数为主,用代数的观点介绍解析几何.

2. 增加了一元多项式的内容.这在一般工科线性代数教材中是少见的.编者认为近代许多工程计算问题都要涉及多项式方程组,让工科学生具备一点多项式方面的基础知识有利于今后了解工程中的多元多项式方程组的计算问题.

3. 增添了线性变换的内容.这有利于学生了解矩阵理论的几何背景及如何将向量空间中的(线性)变换用矩阵来表现.

4. 介绍了复域上相似矩阵的Jordan标准形.这可使学生们了解如何用形式最简的矩阵来表示一个线性变换.

本书第一章、第四章、第五章的大部分内容、第六章、第七章、第八章、第九章的首尾由游宏编写,第二章、第三章、第五章第一节及各章大多习题由吴勃英编写,第九章大部分内容由董增福编写.

限于编者水平,书中不当之处在所难免,我们热诚希望使用本教材的教师和同学批评指正.

编 者

2000年8月

目　录

第一章　一元多项式

多项式是代数学研究的古老课题，也是代数学研究的基本对象之一. 近年来，由于用“非线性方法”处理工程和技术问题的增多，多项式方程组的计算与求解在工程计算中显得日趋重要，因此学习和掌握有关多项式的一些基本知识对工科专业的学生来说亦有必要.

在中学代数课程中我们已学习过不少有关多项式的知识，但初等代数以多项式的具体运算为主，而高等代数则以多项式的理论为主，即讨论多项式的一般规律.

多项式理论一般包括一元多项式和多元多项式两部分. 在这本教材中只介绍一元多项式，为读者了解这方面的内容起一个“入门”的作用，也为今后学习相似矩阵的标准形打一个基础.

本章主要介绍以下内容：

(1) 数环与数域；

(2) 一元多项式的带余除法；

(3) 最大公因式及辗转相除法；

(4) 一元多项式的因式分解；

(5) 重因式的判断；

(6) 多项式的根.

1.1　数环与数域

我们知道整数集 $\mathbf{Z}$ 可以进行加、减、乘三种运算，但不能进行除法运算，用代数学的术语来说，整数集 $\mathbf{Z}$ 对加、减、乘三种运算**封闭**，但对除法运算不封闭. 而有理数集 $\mathbf{Q}$，实数集 $\mathbf{R}$，复数集 $\mathbf{C}$ 则对加、减、乘、除这四种运算（也称四则运算，除数不为 0（下同））都封闭.

除了上述熟知的四种数集，是否还有其他数集可以对四则运算中的某几种运算封闭呢？我们来看两个例子.

例 1.1　令

$$F = \{a + b\sqrt{2} \mid \forall a, b \in \mathbf{Q}\}$$

（符号 $\forall$ 表示任意的意思，即 a, b 为 $\mathbf{Q}$ 中任意元素），则 F 对四则运算封闭.

易见，F 中含不为 0 的元素，例如 $a=1, b=0$，那么 $1 \in F$. 下面验证 F 对

四则运算封闭. 令

$$\alpha = a_1 + b_1\sqrt{2}, \beta = a_2 + b_2\sqrt{2}, \text{其中 } a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathbf{Q},$$

于是

$$\alpha \pm \beta = (a_1 \pm a_2) + (b_1 \pm b_2)\sqrt{2},$$

$$\alpha \cdot \beta = (a_1 a_2 + 2b_1 b_2) + (a_1 b_2 + b_1 a_2)\sqrt{2}.$$

现设 $\beta \neq 0$,即 a_2, b_2 不同时为 0,则

$$\begin{aligned}\frac{\alpha}{\beta} = \frac{a_1 + b_1\sqrt{2}}{a_2 + b_2\sqrt{2}} &= \frac{(a_1 + b_1\sqrt{2})(a_2 - b_2\sqrt{2})}{(a_2 + b_2\sqrt{2})(a_2 - b_2\sqrt{2})} \\ &= \frac{a_1 a_2 - 2b_1 b_2}{a_2^2 - 2b_2^2} + \frac{b_1 a_2 - a_1 b_2}{a_2^2 - 2b_2^2}\sqrt{2}.\end{aligned}$$

因 $a_1 \pm a_2, b_1 \pm b_2, a_1 a_2 + 2b_1 b_2, a_1 b_2 + b_1 a_2, \frac{a_1 a_2 - 2b_1 b_2}{a_2^2 - 2b_2^2}, \frac{b_1 a_2 - a_1 b_2}{a_2^2 - 2b_2^2}$(注意 $a_2^2 - 2b_2^2 \neq 0$)都是有理数,所以在 F 中可进行四则运算.

例 1.2　将例 1.1 中的数集 F 作一改动,变为

$$R = \{a + b\sqrt{2} \mid \forall a, b \in \mathbf{Z}\}.$$

由例 1.1 的验证可知,R 对加、减、乘三种运算封闭,但对除法不封闭.

我们可以想象到,按例 1.1 的构造方式我们可以在有理数集与实数集之间得到无穷多个对四则运算封闭的数集;也可以在整数集基础上用例 1.2 的方式得到无穷多个对加、减、乘三种运算封闭的数集. 由此可见,对四则运算中某些运算封闭是很多数集的共性. 下面我们给出反映这种对运算封闭性质的代数学中两个常见的概念.

定义 1.1　令 R 是一非空数集,若 R 对加、减、乘三种运算封闭,即对 R 中任意二个数 a, b,其和、差、积($a + b, a - b, ab$)都在 R 中,则称 R 是一个**数环**.

定义 1.2　令 F 是至少含一个不为 0 的数的数集,若 F 对四则运算封闭,则称 F 是一个**数域**.

现在我们可以说例 1.1 中的数集 F 为一数域,当然,有理数集、实数集、复数集都是数域. 例 1.2 中的数集 R 为一数环,同样,我们称整数集为整数环.

注　(1) 数域都是数环,但数环可能不是数域;

(2) 在数域中做除法时,0 不能做除数;

(3) 数环、数域都是考虑了运算的数集.

命题　任何数域都包含有理数域.

证明 设 F 为数域,那么 F 中有不为 0 的元 a. 于是 $a-a=0\in F$, $\frac{a}{a}=1\in F$,再由 1 通过加法可以得出一切正整数;而 0 减去(一切)正整数就得到(一切)负整数. 因而全体整数在 F 中. 通过除法,可得一切有理数在 F 中.

问题 1. 单独一个数 0 能否构成一个数环? 能否构成一个数域?

2. 任何数环都包含整数环吗?

1.2 一元多项式的运算

1.2.1 一元多项式环

一元多项式的概念及运算大家都有所了解,本节只作一简单介绍.

定义 1.3 设 F 为数域,x 是一符号(也称未定元),形式表达式

$$a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0 = \sum_{i=0}^{n} a_ix^i \tag{1.1}$$

称为 F 上的一个一元多项式,其中 n 为非负整数,$a_0, a_1, \cdots, a_{n-1}, a_n \in F$.

a_ix^i(令 $a_0x^0=a_0$)称为该多项式的 i 次项,a_i 称为 i 次项的系数,a_0 又称为常数项. 当 $a_n\neq 0$ 时,a_nx^n 称为首项,a_n 称为首项系数,n 称为该多项式的次数. 若把(1.1)中的多项式记为 $f(x)$,该多项式的次数常记为 $\deg f(x)$(有时简记为 $\deg f$). 各项系数全为 0 的多项式记为 0,称为零多项式. 零多项式的次数规定为 $-\infty$(也有不规定其次数的).

为书写方便,常约定:

1. 系数为 0 的项可省略不写(自然也可添上一些系数为 0 的项);
2. 系数为 1 的项可把系数 1 略去不写.

数域 F 上一元多项式的集合常用 $F[x]$ 表示,且 $F\subset F[x]$.

定义 1.4 设 $f(x), g(x)\in F[x]$,如果它们同次项的系数都相等,则称 $f(x)$ 与 $g(x)$ 相等,记作 $f(x)=g(x)$.

现设

$$f(x) = a_nx^n + \cdots + a_1x + a_0 = \sum_{i=0}^{n} a_ix^i,$$

$$g(x) = b_mx^m + \cdots + b_1x + b_0 = \sum_{i=0}^{m} b_ix^i.$$

定义 1.5 $F[x]$ 中的多项式 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的和(假定 $n\geqslant m$)定义为

$$h(x) = (a_n + b_n)x^n + \cdots + (a_1 + b_1)x + (a_0 + b_0)$$

(**注** 因 $m\leqslant n$,我们可为 $g(x)$ 添上一些系数为 0 的项),记作 $h(x)=f(x)+g(x)$.

定义 1.6　$F[x]$中多项式 $f(x)$与 $g(x)$的积定义为

$$h(x)=a_nb_mx^{n+m}+(a_{n-1}b_m+a_nb_{m-1})x^{n+m-1}+\cdots$$
$$+(a_0b_i+a_1b_{i-1}+\cdots+a_ib_0)x^i+\cdots+a_0b_0,$$

记为 $h(x)=f(x)g(x)$,其中 $h(x)$的第 i 次项的系数为$c_i=\sum\limits_{j+k=i}a_jb_k$.

由定义可知,对任意多项式 $f(x)$有如下关系式:

$$0+f(x)=f(x),\quad 1\cdot f(x)=f(x),$$
$$0\cdot f(x)=0,\qquad f(x)+(-f(x))=0,$$

其中$-f(x)$是由 $f(x)$的各项系数变号而得到的多项式.

多项式的减法可以由多项式的加法得出

$$g(x)-f(x)=g(x)+(-f(x)).$$

易于验证,多项式的加法、乘法满足以下运算律:

(1) 加法交换律

$$f(x)+g(x)=g(x)+f(x).$$

(2) 加法结合律

$$(f(x)+g(x))+h(x)=f(x)+(g(x)+h(x)).$$

(3) 乘法交换律

$$f(x)g(x)=g(x)f(x).$$

(4) 乘法结合律

$$(f(x)g(x))h(x)=f(x)(g(x)h(x)).$$

事实上,若设 $h(x)=c_tx^t+\cdots+c_1x+c_0$,则

$$(f(x)g(x))h(x)=\sum_{r=0}^{n+m+t}\Big(\sum_{k+l=r}\Big(\sum_{i+j=k}a_ib_j\Big)c_l\Big)x^r=\sum_{r=0}^{n+m+t}\Big(\sum_{i+j+l=r}a_ib_jc_l\Big)x^r$$
$$=\sum_{r=0}^{n+m+t}\Big(\sum_{i+k=r}a_i\Big(\sum_{j+l=k}b_jc_l\Big)\Big)x^r=f(x)(g(x)h(x)).$$

(5) 乘法对加法的分配律

$$f(x)(g(x)+h(x))=f(x)g(x)+f(x)h(x).$$

从上面的论述可以看出 $F[x]$对加、减、乘三种运算封闭,这很像数环,因而我们也把 $F[x]$称为**一元多项式环**(简称多项式环).

易见,多项式的次数与运算之间有如下关系:

$$\deg(f(x)\pm g(x))\leqslant\max(\deg f(x),\deg g(x)),$$
$$\deg(f(x)g(x))=\deg f(x)+\deg g(x).$$

特别地,我们有 $f(x)g(x)=0$ 当且仅当 $f(x)=0$ 或者 $g(x)=0$.

1.2.2　带余除法

两个多项式相除,可能得到一个多项式,也可能得不到一个多项式.我们

有必要研究一下多项式的除法.

定义 1.7 令 $f(x),g(x)\in F[x]$,若存在多项式 $q(x)\in F[x]$,使得 $f(x)=g(x)q(x)$,就说 $g(x)$整除 $f(x)$,记做 $g(x)|f(x)$;否则说 $g(x)$不能整除 $f(x)$,记做 $g(x)\nmid f(x)$.

当 $g(x)|f(x)$时,称 $g(x)$是 $f(x)$的一个因式,而 $f(x)$称为 $g(x)$的倍式.

关于整除有如下一些性质:

(1) 若 $g(x)|f(x),h(x)|g(x)$,则 $h(x)|f(x)$.

(2) 右 $g(x)|f(x),f(x)|g(x)$,那么 $f(x)=cg(x)$,其中 c 是F 中--非零常数.

(3) 若 $h(x)|f(x),h(x)|g(x)$,则 $h(x)|f(x)\pm g(x)$.

(4) 每一多项式可整除零多项式,也可被任一零次多项式整除.

我们只验证(2),其余留给读者验证.

由条件及多项式整除的定义,应有 $q(x)$与 $h(x)$,使得

$$f(x)=g(x)q(x),g(x)=f(x)h(x),$$

于是

$$f(x)=f(x)h(x)q(x),$$
$$f(x)(1-h(x)q(x))=0.$$

因为 $f(x)\neq 0$,所以

$$1-h(x)q(x)=0,\quad h(x)q(x)=1,$$

从而 $\deg h(x)+\deg q(x)=0$,由此得

$$\deg h(x)=0,\quad \deg q(x)=0,$$

即 $q(x)$为一非零常数 c,故 $f(x)=cg(x)$.

一般情况下,我们有:

定理 1.1 设 $f(x),g(x)\in F[x]$,且 $g(x)\neq 0$,那么存在 F 上的多项式$q(x)$与 $r(x)$,使得

$$f(x)=g(x)q(x)+r(x),\tag{1.2}$$

其中,或者 $r(x)=0$ 或者 $\deg r(x)<\deg g(x)$. 满足以上条件的多项式 $q(x)$与 $r(x)$只有惟一的一对.

证明 先证 $q(x)$与 $r(x)$的存在性.

若 $\deg f(x)<\deg g(x)$,可取 $q(x)=0,r(x)=f(x)$.

现假定 $\deg f(x)\geqslant \deg g(x)$,把 $f(x)$与 $g(x)$按 x 的降幂写出:

$$f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0,$$
$$g(x)=b_mx^m+b_{m-1}x^{m-1}+\cdots+b_1x+b_0,$$

其中 $a_n\neq 0,b_m\neq 0$,且 $n\geqslant m$.

令

$$f_1(x) = f(x) - \frac{a_n}{b_m}x^{n-m}g(x),$$

易见，$\deg f_1(x) < \deg f(x)$. 如果 $f_1(x)=0$ 或 $\deg f_1(x) < \deg g(x)$，问题得证. 此时 $r(x)=f_1(x)$，$q(x)=\frac{a_n}{b_m}x^{n-m}$. 否则，我们用同样的方法可得 F 上一多项式

$$f_2(x) = f_1(x) - \frac{a_{n_1}}{b_m}x^{n_1-m}g(x),$$

这里 a_{n_1} 是 $f_1(x)$ 的首项系数，$f_2(x)$ 有以下性质：或者 $f_2(x)=0$ 或者 $\deg f_2(x) < \deg f_1(x)$.

这样作下去，由于 $f_1(x), f_2(x)$ 的次数是递降的，最后一定可以得到多项式

$$f_k(x) = f_{k-1}(x) - \frac{a_{n_{k-1}}}{b_m}x^{n_{k-1}-m}g(x),$$

而 $f_k(x)=0$ 或 $\deg f_k(x) < \deg g(x)$.

归纳上述过程，我们可得

$$f(x) = g(x)\left(\frac{a_n}{b_m}x^{n-m} + \frac{a_{n_1}}{b_m}x^{n_1-m} + \cdots + \frac{a_{n_{k-1}}}{b_m}x^{n_{k-1}-m}\right) + f_k(x),$$

这样 $q(x)=\frac{a_n}{b_m}x^{n-m} + \frac{a_{n_1}}{b_m}x^{n_1-m} + \cdots + \frac{a_{n_{k-1}}}{b_m}x^{n_{k-1}-m}$ 与 $r(x)=f_k(x)$ 满足(1.2)的要求.

再证 $q(x)$ 与 $r(x)$ 的惟一性.

若还有 $q_1(x), r_1(x) \in F[x]$，使得 $f(x)=g(x)q_1(x)+r_1(x)$，且满足 $r_1(x)=0$ 或 $\deg r_1(x) < \deg g(x)$，那么有

$$g(x)q(x) + r(x) = g(x)q_1(x) + r_1(x),$$

$$g(x)(q(x) - q_1(x)) = r_1(x) - r(x). \tag{1.3}$$

若 $r_1(x) - r(x) \neq 0$，那么 $q(x) - q_1(x)$ 也不等于零. 此时 $\deg(r_1(x) - r(x)) < \deg g(x)$，而等式(1.3)左端的次数大于等于 $g(x)$ 的次数，这不可能，故必有

$$r_1(x) = r(x), \quad q_1(x) = q(x). \qquad \square$$

(1.2)中的多项式 $q(x)$ 与 $r(x)$ 分别叫做 $g(x)$ 除 $f(x)$ 所得的商式与余式，而求 $q(x)$ 与 $r(x)$ 的方法称为**带余除法**. 应注意的是定理 1.1 的证明不仅是对结论的证明，而且也给出了求 $q(x)$ 与 $r(x)$ 的具体方法与步骤.

推论 $g(x)|f(x)$当且仅当 $g(x)$除 $f(x)$的余式 $r(x)=0$.

例 1.3 设

$$f(x) = 2x^4 - 3x^3 + 4x^2 - 5x + 6,$$
$$g(x) = x^2 - 3x + 1,$$

求以 $g(x)$除 $f(x)$的商式与余式.

解 我们以如下算式进行运算:

$$\begin{array}{r|l}
 & 2x^2+3x+11 \\
\hline
x^2-3x+1 & 2x^4-3x^3+4x^2-5x+6 \\
 & \underline{2x^4-6x^3+2x^2} \\
 & \quad 3x^3+2x^2-5x+6 \\
 & \quad \underline{3x^3-9x^2+3x} \\
 & \qquad 11x^2-8x+6 \\
 & \qquad \underline{11x^2-33x+11} \\
 & \qquad\qquad 25x-5
\end{array}$$

所以,商式 $q(x)=2x^3+3x+11$,余式 $r(x)=25x-5$.

问题 1. 设 F,F_1 都是数域且 $F\subseteq F_1$,又设 $f(x),g(x)\in F[x]\subseteq F_1[x]$,$g(x)\neq 0$.若 $g(x)$在 $F[x]$中不整除 $f(x)$,那么在 $F_1[x]$中 $g(x)$是否整除 $f(x)$?

2. 平行于定理 1.1,写出整数的带余除法表达式.

1.3 最大公因式

设 F 是一数域,$f(x),g(x),h(x)\in F[x]$.若 $h(x)$既是 $f(x)$的因式,又是 $g(x)$的因式,则称 $h(x)$是 $f(x)$与 $g(x)$的公因式.

定义 1.8 设 $d(x)$是 $f(x)$与 $g(x)$的一个公因式,若 $d(x)$能被 $f(x)$与 $g(x)$的每一个公因式整除,那么称 $d(x)$为 $f(x)$与 $g(x)$的一个**最大公因式**.

例 1.4 $x-\sqrt{2},x+\sqrt{2},x^2-2$ 都是 x^4-4 与 x^4-4x^2+4 的公因式,但 x^2-2 是它们的最大公因式.

注 对于任意多项式 $f(x)$,$f(x)$是 $f(x)$与 0 的一个最大公因式;若 $g(x)|f(x)$,那么 $g(x)$就是 $f(x)$与 $g(x)$的一个最大公因式;若 $d(x)$是 $f(x)$与 $g(x)$的一个最大公因式,那么对任一 $0\neq c\in F$,$cd(x)$也是 $f(x)$与 $g(x)$的一个最大公因式(读者可以根据定义 1.8 自己证明).因此,如果 $f(x)$与 $g(x)$的最大公因式存在,就不是惟一的,但彼此之间差一常数因子,它们之间有惟一的一个首项系数为 1(这样的多项式称为首一多项式)的最大公因式,记为$(f(x),g(x))$.

下面我们将研究最大公因式的存在性.

引理　若对 $f(x)$ 与 $g(x)$ 有等式

$$f(x)=g(x)q(x)+r(x), \tag{1.4}$$

则 $f(x)$ 与 $g(x)$ 和 $g(x)$ 与 $r(x)$ 有相同的公因式. 进而, $(f(x),g(x))=(g(x),r(x))$.

证明　若 $d(x)$ 是 $g(x)$ 与 $r(x)$ 的一个公因式, 即 $d(x)\mid g(x), d(x)\mid r(x)$, 那么由 (1.4), $d(x)\mid f(x)$, 这就是说 $d(x)$ 也是 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的一个公因式.

反之, 若 $d(x)$ 是 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的一个公因式, 即 $d(x)\mid f(x), d(x)\mid g(x)$, 那么由 (1.4), $d(x)\mid r(x)$, 故 $d(x)$ 也是 $g(x)$ 与 $r(x)$ 的一个公因式.

若 $d(x)$ 是 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的一个最大公因式, $d_1(x)$ 是 $g(x)$ 与 $r(x)$ 的一个最大公因式, 由上面的讨论知, 必有 $d_1(x)\mid d(x), d(x)\mid d_1(x)$. 因而, $d(x)=cd_1(x)(c\in F)$. 再由 $(f(x),g(x))$, $(g(x),r(x))$ 的定义知 $(f(x),g(x))=(g(x),r(x))$. □

定理 1.2　对于 $F[x]$ 中两个多项式 $f(x),g(x)$, 最大公因式 $(f(x),g(x))$ 存在, 且存在 $u(x),v(x)\in F[x]$, 使得

$$(f(x),g(x))=f(x)u(x)+g(x)v(x).$$

证明　若 $f(x),g(x)$ 有一个为零, 比如说 $g(x)=0$, 那么 $f(x)$ 就是一个最大公因式, 若其首项系数为 $c\neq 0$, 那么

$$(f(x),0)=c^{-1}\cdot f(x)+1\cdot 0.$$

下面不妨设 $g(x)\neq 0$, 按带余除法有 $f(x)=g(x)q_1(x)+r_1(x)$; 若 $r_1(x)\neq 0$, 又有 $g(x)=r_1(x)q_2(x)+r_2(x)$; 若 $r_2(x)\neq 0$, 再用 $r_2(x)$ 去除 $r_1(x)$, 得商式 $q_3(x)$, 余式 $r_3(x)$; 如此辗转相除下去, 显然所得余式的次数不断降低, 即

$$\deg g(x)>\deg r_1(x)>\deg r_2(x)>\cdots$$

因此在有限次之后, 必然有余式为零, 于是我们有一串等式:

$$\begin{aligned}
f(x)&=g(x)q_1(x)+r_1(x),\\
g(x)&=r_1(x)q_2(x)+r_2(x).\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\\
r_{i-2}(x)&=r_{i-1}(x)q_i(x)+r_i(x)-\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\\
r_{k-2}(x)&=r_{k-1}(x)q_k(x)+r_k(x),\\
r_{k-1}(x)&=r_k(x)q_{k+1}(x)+0,
\end{aligned}$$

$r_k(x)$ 与 0 的最大公因式是 $r_k(x)$. 根据以上说明, $r_k(x)$ 也就是 $r_k(x)$ 与

$r_{k-1}(x)$的一个最大公因式;同样的理由,逐步推上去,$r_k(x)$就是 $f(x)$与 $g(x)$的一个最大公因式.

由以上等式的倒数第二个,我们有

$$r_k(x) = r_{k-2}(x) - r_{k-1}(x)q_k(x),$$

然后用上面的等式逐个地消去 $r_{k-1}(x),\cdots,r_1(x)$,再并项就得到

$$r_k(x) = f(x)u(x) + g(x)v(x).$$

若 $r_k(x)$首项系数为 $c\neq 0$,则

$$c^{-1}r_k(x) = (f(x),g(x)) = f(x)(c^{-1}u(x)) + g(x)(c^{-1}v(x)). \quad \square$$

上面我们不仅证明了任意两个多项式的最大公因式的存在性,也获得了求出最大公因式的实际方法,这种方法叫做**辗转相除法**.一般可用下面形式表示:

$$\begin{array}{c|c|c|c}
q_2(x) & g(x) & f(x) & q_1(x) \\
 & r_1(x)q_2(x) & g(x)q_1(x) & \\
\hline
 & r_2(x) & r_1(x) & q_3(x) \\
 & \vdots & \vdots &
\end{array}$$

例 1.5 求$(f(x),g(x))$及 $u(x),v(x)$,使得

$$(f(x),g(x)) = f(x)u(x) + g(x)v(x),$$

其中 $f(x)=x^3+2x^2-5x-6, g(x)=x^2+x-2$.

解 用辗转相除法,有

$$\begin{array}{c|r|r|c}
-\frac{1}{4}x & x^2+x-2 & x^3+2x^2-5x-6 & x+1 \\
 & x^2+x & x^3+x^2-2x & \\
\hline
 & -2 & x^2-3x-6 & \\
 & & x^2+x-2 & \\
\hline
 & & -4x-4 & 2x+2 \\
 & & -4x-4 & \\
\hline
 & & 0 &
\end{array}$$

这里 $r_1(x)=-4x-4, r_2(x)=-2, r_3(x)=0$,故

$$(f(x),g(x)) = 1,$$

且由

$$f(x) = g(x)(x+1) + (-4x-4),$$

$$g(x) = (-4x-4)\left(-\frac{1}{4}x\right) + (-2),$$

得

$$
\begin{aligned}
1 &= -\frac{1}{2}(-2) = -\frac{1}{2}\left(g(x) - r_1(x)\left(-\frac{1}{4}x\right)\right) \\
&= -\frac{1}{2}\left(g(x) - (f(x) - g(x)(x+1))\frac{-x}{4}\right) \\
&= -\frac{x}{8}f(x) + \left(\frac{x^2}{8} + \frac{x}{8} - \frac{1}{2}\right)g(x).
\end{aligned}
$$

即可取 $u(x) = -\frac{x}{8}, v(x) = \frac{1}{8}(x^2 + x - 4)$.

定义 1.9　设 $f(x), g(x) \in F[x]$,如果

$$(f(x), g(x)) = 1,$$

则称 $f(x)$ 与 $g(x)$ **互素**.

如果 $f(x), g(x)$ 互素,则 $f(x), g(x)$ 的任何公因式都是非零常数,反之也是对的.

定理 1.3　设 $f(x), g(x) \in F[x]$,则 $f(x)$ 与 $g(x)$ 互素的充分必要条件是存在 $u(x), v(x) \in F[x]$,使得

$$f(x)u(x) + g(x)v(x) = 1.$$

证明　必要性由定理 1.2 得到.所之,若

$$f(x)u(x) + g(x)v(x) = 1,$$

由 $(f(x),g(x)) \mid f(x)$, $(f(x),g(x)) \mid g(x)$,知 $(f(x),g(x)) \mid 1$,这样 $(f(x),g(x))$ 为一非零常数,又 $(f(x),g(x))$ 首项系数为 1,故 $(f(x), g(x)) = 1$. □

由这个定理可推出关于互素多项式如下两个重要性质:

性质 1.1　若 $f(x) \mid g(x)h(x)$,且 $(f(x),g(x)) = 1$,则 $f(x) \mid h(x)$.

事实上,由 $(f(x),g(x)) = 1$ 可知,有 $u(x), v(x)$,使得

$$f(x)u(x) + g(x)v(x) = 1,$$

等式两边乘以 $h(x)$,得

$$f(x)u(x)h(x) + g(x)v(x)h(x) = h(x),$$

因 $f(x) \mid g(x)h(x)$,故 $f(x)$ 整除等式左端,于是 $h(x)$ 也能被 $f(x)$ 整除.

性质 1.2　若 $f_1(x) \mid g(x)$, $f_2(x) \mid g(x)$,且 $(f_1(x), f_2(x)) = 1$,则 $f_1(x)f_2(x) \mid g(x)$.

事实上,由 $f_1(x) \mid g(x)$ 有

$$g(x) = f_1(x)h_1(x). \tag{1.5}$$

因 $f_2(x) \mid g(x)$,即 $f_2(x) \mid f_1(x)h_1(x)$,又 $(f_1(x), f_2(x)) = 1$,由性质 1.1 有 $f_2(x) \mid h_1(x)$,即

$$h_1(x) = f_2(x)h_2(x). \tag{1.6}$$

将式(1.6)代入式(1.5),得

$$g(x) = f_1(x)f_2(x)h_2(x),$$

亦即 $f_1(x)f_2(x) \mid g(x)$.

关于两个多项式的公因式、最大公因式的概念及讨论可以推广到 n 个多项式的情形.

如果 $\varphi(x)$是 $f_1(x),f_2(x),\cdots,f_n(x)$中每一个多项式的因式,则称 $\varphi(x)$是 $f_1(x),f_2(x),\cdots,f_n(x)$的一个公因式.进而,若 $\varphi(x)$能被 $f_1(x)$,$f_2(x),\cdots,f_n(x)$的任一公因式整除,则称 $\varphi(x)$是 $f_1(x),f_2(x),\cdots,f_n(x)$的一个最大公因式.

我们仍用符号$(f_1(x),\cdots,f_n(x))$表示 $f_1(x),\cdots,f_n(x)$的首项系数为 1 的最大公因式.

对于 n 个多项式$f_1(x),\cdots,f_n(x)$,我们可以得出平行于定理 1.2 和定理 1.3 的结论,读者试自己写出.

最后明确一个问题,两个多项式的公因式会因系数域的扩大而不同,如例 1.4 中的多项式 x^4-4 与 x^4-4x^2+4 在实数域上 $x-\sqrt{2}$及 $x+\sqrt{2}$都是它们的公因式,但在有理数域上这两个一次多项式不能认为是它们的公因式;但两个多项式的最大公因式却不因系数域的扩大而改变.读者们可作为一个问题来思考,为什么会是这样的呢?

例 1.6 若$(f(x),g(x))=1$,则$(f(x)g(x),f(x)+g(x))=1$.

证明 因$(f(x),g(x))=1$,存在 $u(x),v(x)\in F[x]$,使得

$$f(x)u(x) + g(x)v(x) = 1. \tag{1.7}$$

我们有

$$f(x)u(x) + g(x)u(x) - g(x)u(x) + g(x)v(x) = 1,$$

$$(f(x) + g(x))u(x) + g(x)(v(x) - u(x)) = 1, \tag{1.8}$$

即$(f(x)+g(x),g(x))=1$.同理$(f(x)+g(x),f(x))=1$,即存在 $u_1(x)$,$v_1(x)\in F[x]$,使得

$$(f(x) + g(x))u_1(x) + f(x)v_1(x) = 1. \tag{1.9}$$

将(1.9)的两边乘以 $g(x)$并将 $g(x)=f(x)g(x)v_1(x)+(f(x)+g(x))$. $g(x)u_1(x)$代入(1.8),合并同类项后可得

$$(f(x) + g(x))u_2(x) + f(x)g(x)v_2(x) = 1,$$

即

$$(f(x) + g(x),f(x)g(x)) = 1.$$

证明 1. 两个整数的最大公因数及整数互素的概念在中、小学教材中已介绍,试写出并证明平行于定理 1.2 和定理 1.3 的结论.

2. 设 $f(x),g(x),d(x)\in F[x]$,且有