机械动力学

王鸿恩 主编

JIXIE DONGLI XUE

重庆大学出版社

机 械 动 力 学

王鸿恩 主编

重庆大学出版社

内容简介

本书阐述了机械系统动力学的基本理论、机械振动分析基础、机构平衡和机构动力学的分析方法，并在书末附有相应的计算机程序。

本书可作为高等工科院校机械类各专业的教学用书，也可作为有关专业研究生、教师和学生的教学参考书，同时也可供从事机械振动、机械设计的工程技术人员参考。

机械动力学

王鸿恩　主编

责任编辑　程明亮

·

重庆大学出版社出版发行

新华书店经销

重庆大学出版社印刷厂印刷

·

开本：787×1092　1/16　印张：　20　字数：　499　千

1989年　5　月第　1　版　　　1989年　5　月第　1　次印刷

印数：1—3200

标准书号：ISBN 7-5624-0145-4 / TH·12（课）　定　价：3.97元

前　言

设计和制造高效率、高速度、高精度、高自动化及高可靠性的机器和设备是机械工业的重要任务之一，而这类机械产品的关键技术之一经常是动力学问题。因此，研究和解决机械系统的动态分析和动态设计，是从事机械工程研究和设计人员面临的迫切任务。

另一方面，大量的设计和生产实践，尤其是电子计算机的发展和广泛采用，加速了机械系统动力学的研究，并取得了十分显著的成果。由于目前有关动力学的书籍较少，我们在和工程界的研究、设计人员的广泛接触中，尤其是在机械设计及制造专业的助教进修班和工程师提高班的教学中，深感需有一本系统地全面反映现代机械动力学的书籍。本书就是在这种背景下编写的。

我们知道，科学与技术皆有继承性，脱离现有经验和实例，进行所谓“纯理论”的设计是不存在的；但是随着科学与技术的发展，现在不仅用“理论设计”替代“经验设计”或所谓“类比设计”，并用动态分析计算替代静态分析计算。机械系统动力学的研究，大体上可分为理论研究和实验研究两方面，二者是相辅相成的。本书阐述的是理论研究成果。全书的大部分章节，系由编者们多年从事机械动力学课程教学的讲稿改编而成的。改编时我们作了以下努力：

力求反映近代动力学的新成果和新方法，力求理论联系实际。书中很多例子直接引自生产实际的工程问题，而且不少动力学问题的研究由分析研究工程实例开始，使复杂的动力学问题变得相对地简单、直观，大大缩短了理论和工程实际的距离。

力求适应目前各学科广泛使用计算机的趋势。全书以解析法和数值计算法为主，并在附录中给出了书中部分例题的计算机程序。

力求适应广大读者的需要。书中内容较为广泛，包括机械动力学理论基础、机械振动和机构平衡、机构动力学，各章末均附有习题。

力求方便自学。各种概念的引出较为自然，理论阐述由浅入深，公式的引证既注意理论上的严密性，也注意了推导过程的简洁性。

全书共分六章和四个附录。

参加本书编写的有：重庆大学王鸿恩（第一、二、三章）、重庆建筑工程学院王炳乐、宋立权（第四章）、武汉工学院陈雷、黄兴胜（第五章）、陈雷（第六章、附录Ⅱ-1～5、附录Ⅲ、Ⅳ）、唐山工程技术学院孙新民（第六章）、青海大学翟晓勋（第二章）、重庆大学龙宇光（第五章8节、附录Ⅰ、Ⅱ-6）。全书由王鸿恩主编；重庆建筑工程学院喻志刚教授和重庆大学江裕金教授主审。

本书成稿后，经有关同志仔细审阅，并提出了许多宝贵意见，编者表示衷心的谢意。

由于水平和经验所限，书中的缺点和不足之处深望读者批评指正。

编　者

1988年2月

目　　录

第一章 机械动力学的理论基础

单自由度机械系统进行动力学分析计算时，可采用等效构件法。将机械系统的某一构件作为等效构件，并将该等效构件以外的其它构件的质量和转动惯量、力和力矩按动力等效原则转化到等效构件上，这就构成了一个与原机械系统动力等效的力学模型——等效构件，然后建立它的运动方程，求解其动力响应。这样求得的运动参数变化规律是机械系统的等效构件的运动规律。若需了解系统其它构件的运动规律，可以应用机械原理中关于机构运动分析的方法求得。

多自由度机械系统通常应用拉格朗日方程建立系统的运动方程式。

本章讨论建立机械系统的等效力学模型及其运动微分方程式。

§1-1 作用于机械上的力

一、作用于机械上的力

任何一台完整的机器都包括三个基本的组成部分：动力装置、传动装置和工作装置（即执行机构）。机器运转时其上面作用有驱动力、工作阻力、运动副的摩擦力、构件的重力及介质阻力等，其中驱动力和工作阻力是决定机器运动的主要外力。下面讨论这些力的工作特性。

1． 驱动力 通常由原动机发出，作用在机械的主动构件上，做正功。

2． 工作阻力 作用在从动的工作构件上，做负功。

3． 摩擦阻力 由于机器运转时，各相邻构件发生相对运动，同时各构件又受到力的作用，因此在运动副中产生摩擦阻力，它做负功。

4． 介质阻力 构件在空气中或在其它介质中运动时受到的力。例如：通用减速箱中齿轮运转搅动箱中润滑油的阻力，它做负功。

5． 重力 作用在构件的重心上，随构件运动方向而变化，它既可能做正功，又可能做负功或者不做功。

6． 惯性力 一般情况下构件都会因处于非匀速运动而产生惯性力。当构件做加速运动时，惯性力与运动方向相反，做负功；反之，做正功。

显然，在一个运动循环周期中，重力之功为零。

二、惯性力

机构的构件根据其运动的形式可分为直线运动、旋转运动以及直线运动和旋转运动同时存在的复合运动。

1． 平面复合运动，具有平行于运动平面对称面的构件，它的全部惯性力可以简化为一个加于构件重心S的惯性力$\mathbf{F}$和一个惯性力矩$\mathbf{M}$。它们由下式确定。

$$\mathbf{F}=-m\mathbf{a}_s \tag{1-1}$$

$$\mathbf{M}=-\boldsymbol{\varepsilon}I_s \tag{1-2}$$

式中 m——构件质量；

a_s——重心S的加速度；

ε——角加速度

I_s——构件对于重心轴的转动惯量。

另外，上式中的“－”号表明，F和V分别与a_s和ε的方向相反。若用力F′替代惯性力F和惯性力偶M，则该力的大小和方向与F相同，但偏离一距离ρ，其值为

$$\rho=\frac{M}{F} \qquad (1\text{-}3)$$

2.若构件作直线运动（如活塞等），则角加速度为零，因而构件各质点的惯性力仅为一惯性力F，又若为匀速直线运动，则F为零。

3.若构件绕重心轴转动（如飞轮、滚筒等），其重心加速度为零，故该构件的惯性力仅为一惯性力矩M。又若为匀速转动，则M为零。

4.若构件绕不通过重心的轴转动时，惯性力F和惯性力矩M的替代力F′位于OS延长线的K点上，其距离ρ（SK）（图1-1）由下式确定

$$\rho=\frac{I_s}{MR_s} \qquad (1\text{-}4)$$

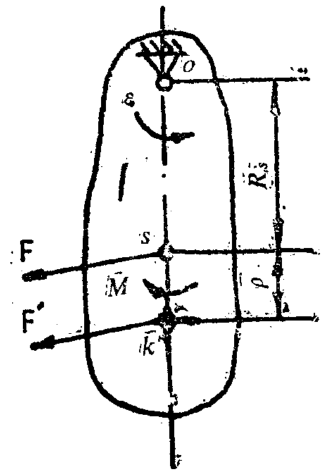

图1-1

对O点到K点的距离l为

$$l=R_s+\rho=R_s+\frac{I_s}{mR_s}=\frac{mR_s^2+I_s}{mR_s}=\frac{I_o}{mR_s} \qquad (1\text{-}5)$$

上式表明，K点是复摆（物理摆）的摆动中心。因此，该类构件的惯性力F′作用在构件摆动中心K上，如果构件的全部质量集中在该点上，则将得到数学摆，其摆动周期等于以转动中心O为悬点的构件的摆动周期。

§1－2　驱动装置的机械特性

机器驱动装置的机械特性(或工作特性)是指原动机的力参数和运动参数（位移、速度、时间等）之间的函数关系。一般可以用图形的形式将特性表示出来，故又称为特性曲线。它可由理论分析或实验的方法得到。机器上使用的原动机主要有内燃机和电动机两大类。内燃机主要用于交通运输机械和一些移动式机械上，除此而外，绝大多数机械都以电动机为驱动装置。图1-2绘出了各种原动机的特性曲线((*a*)内燃机，(*b*)直流并激电动机，(*c*)直流串激电动机，(*d*)三相异步电动机，(*e*)起重机用三相异步电动机)。

评价特性曲线的指标是“刚度”和“过载性能”。特性曲线的刚度可以用特性曲线上某一个特定点的切线和横坐标间的夹角的正切值来表示。刚度越大表示在给定的工况范围内载荷发生变化时，原动机的角速度变化越小。由图1-2可知，直流并激电动机特性曲线的刚度

比内燃机大。由于内燃机特性曲线刚度不足，因此内燃机只能在载荷变化不大的工况下工作，所以在用内燃机驱动的车辆上安装变速箱，利用变速箱可以在一定程度上做到在车辆变速范围内使转化到内燃机主轴上的阻力扭矩基本上保持不变，使内燃机能正常工作。

原动机过载性能是其最大扭矩与额定扭矩的比值。它表示原动机克服过载的能力。在选用原动机时应当根据机器的工况对原动机的过载性能提出一定的要求。

通常用力（或扭矩）与速度（或转速）的函数关系来表示特性曲线。但是实际的情况要复杂得多。例如，电动机的扭矩不仅与转子的角速度有关，而且还和转子的角加速度有关。但为简化起见，往往将后者忽略不计。

当用解析法研讨机械动力学问题时，应将机械特性曲线用一个较简单的数学表达式表示。这时将机械的运动微分方程式进行求解并得到其通解，即为机构参数的变化规律。如果机械特性是一个复杂的函数或以表格形式给出，就应用图解法或数值解法来求解。这时就只能得到一个具有局限性的解答，而无法据此作出一般性的结论。当在实际的工作条件下不需要使用全部的特性曲线时，可用一条直线或一段抛物线来表示使用的那一段特性曲线。例如，异步电动机在额定转速附近的特性曲线，可简化为过 B C 点的斜直线（图1-3（a），（b）），即

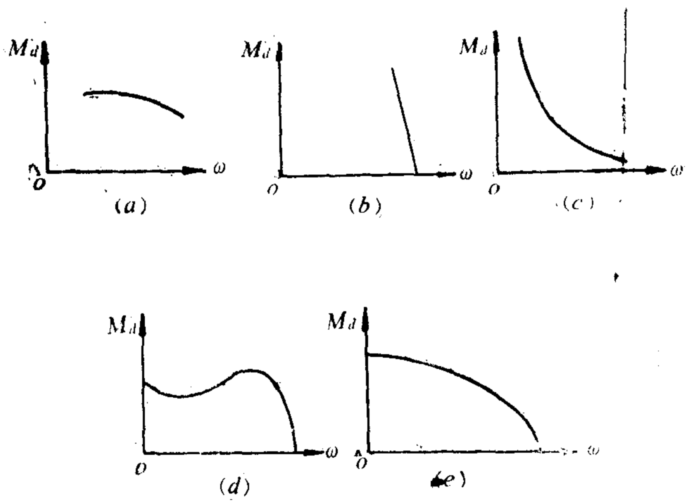

图1-2

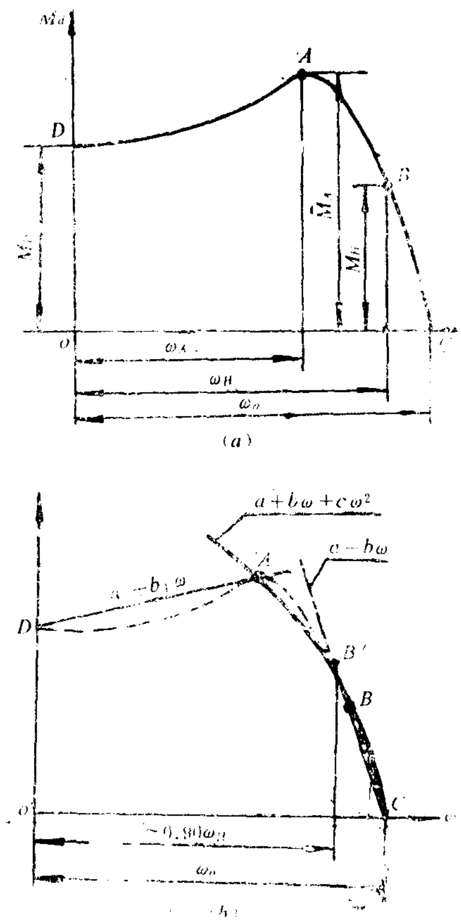

图1-3

$$M_d = a - b\omega \qquad (1\text{-}6)$$

这里系数a、b可通过B、C点的坐标B（ω_H，M_H），C（ω_o，0）代入上式求解。若在稳定工作区，特性曲线可简化为过A、B、C三点的抛物线，即

$$M_d = a + b\omega + c\omega^2 \qquad (1\text{-}7)$$

这里系数a、b、c可以通过A、B、C三点的坐标代入上式求出。若A点的横坐标ω_A值未知时，可用下式近似计算ω_A值。

$$\omega_A = \omega_o - (\omega_o - \omega_H)\left(\frac{M_A}{M_H} + \sqrt{\left(\frac{M_A}{M_H}\right)^2 - 1}\right) \qquad (1\text{-}8)$$

例1-1 图1-4为串激直流电动机的机械特性，设工作时电机转子的角速度不超出角速度 $\omega_{min}=64\left(\frac{1}{s}\right)$ 及 $\omega_{max}=160\left(\frac{1}{s}\right)$ 的范围，这时可用式（1-7）抛物线代替已知的特性曲线。试写出特性曲线方程式。

解 根据三个点（图1-4）得

$$M_1=13.5\,(\mathrm{N\cdot m}) \qquad \omega_1=64\left(\frac{1}{s}\right)$$

$$M_2=4.5\,(\mathrm{N\cdot m}) \qquad \omega_2=100\left(\frac{1}{s}\right)$$

$$M_3=0.72\,(\mathrm{N\cdot m}) \qquad \omega_3=160\left(\frac{1}{s}\right)$$

将以上数值代入式（1-7）得

$$13.5=a+64b+4100c$$

$$4.5=a+100b+10000c$$

$$0.72=a+160b+25600c$$

解之得 $a=42.3$，$b=-0.57$，$c=0.00192$

故 $M_d=42.3-0.57\omega+0.00192\omega^2$

由图1-4得到，当 $\omega_1=80\left(\frac{1}{s}\right)$ 时，电机的力矩 $M_1=9(\mathrm{N\cdot m})$；当 $\omega_2=130\left(\frac{1}{s}\right)$ 时，$M_2=1.26(\mathrm{N\cdot m})$。

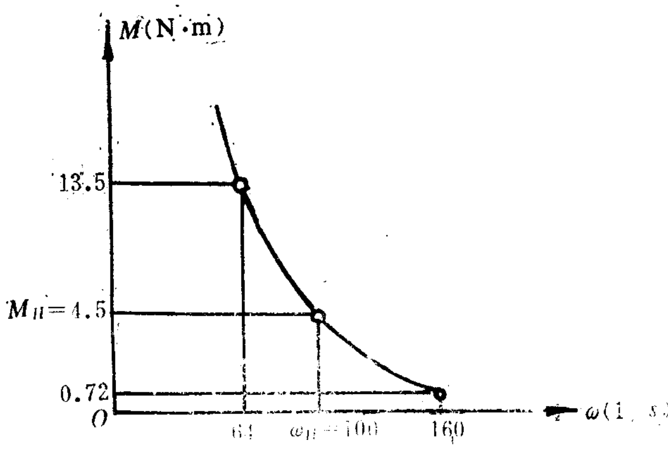

图1-4

由此得 $M_1=42.3-0.57\times80+0.00192\times6400=8.95\,(\mathrm{N\cdot m})$

$M_2=42.3-0.57\times130+0.00192\times16900=0.8\,(\mathrm{N\cdot m})$

由此可见，近似曲线与已知曲线相吻合。虽然在第二种情况下，相对误差较大，但数值本身较小，故误差绝对数值并不大。

§1-3 等效力学模型

每一台机器都可视为一个用各种分布参数和集中参数表征的复杂力学系统。这些参数为构件的质量、转动惯量、刚度、运动副中的摩擦力、驱动力和工作阻力等等。原则上，可以对机器的每一个构件列出一组相应的运动方程式，然后求解，但这种解法相当繁杂。通常为了便于分析计算，可根据一定的原则将复杂的机械系统进行转化。这种转化实质上就是设法求解一个和所研究的系统“等效”的系统——力学模型。

一、等效模型

对于单自由度机械系统可将作用在机构上所有的外力和各构件的质量转化到某一选定的构件上，并保持选定的构件与机构中该构件的真实运动相同，该构件称为等效构件。换言之，等效构件具有机构的等效质量，其上作用有机构的等效力，同时等效构件的运动与机构

中该构件的运动一致。这样就通过等效构件将复杂的单自由度机械系统简化为一个构件的力学模型。将机械系统动力学的研究转化为一个等效构件的分析研究。

为了便于分析计算，一般选择只作直线移动或绕定轴转动的构件作为等效构件。若等效构件只作直线移动，这时，等效构件的质量为机构的等效质量，其上作用有机构的等效力。若等效构件为绕定轴转动的构件时，等效构件具有机构的等效转动惯量，其上作用有等效力矩。

对于多自由度系统而言，不可将整个机构简化为几个独立的互不相关的单自由度等效构件，可以选取数目等于系统自由度数的独立参量（广义坐标）来代替等效构件，应用拉格朗日方程来建立系统的运动微分方程。

二、等效力和等效力矩

因为机械系统的动能变化量等于外力和外力矩作的功。因此，在同一时间间隔内，等效构件具有的动能变化量与整个机构的动能变化量相同，作用在等效构件上的力（或力矩）所作的功与作用在机构上所有外力和外力矩作的功相等。这样可根据等效力（或等效力矩）所作元功与所有外力和外力矩作的元功和相等来确定等效力(或等效力矩)。为便于计算，可利用作用在机构上所有外力和外力矩在某瞬时的功率总和与等效力(或等效力矩)在同一瞬时的功率相等来计算等效力（或等效力矩）。若平面机构的外作用力为F_i（$i=1, 2\cdots n$）；外力矩为M_j（$j=1, 2\cdots m$）；外力F_i作用点的速度为v_i； F_i与v_i的夹角为α_i；在力矩M_j作用下的构件 j 的角速度为ω_j。若等效构件为直线运动，设等效力为F_e， 其作用点的速度为V。通常为了简化计算，设F_e的方向线与V的方向线重合。于是有

$$F_eV=\sum_{i=1}^{n}F_iv_i\cos\alpha_i+\sum_{j=1}^{m}\pm M_j\omega_j \tag{1-9}$$

式中当M_j与ω_j同方向时取“+”号，否则取“-”号。若按上式计算出的F_e为正，表示F_e与V方向一致，否则方向相反。

若等效构件为绕定轴转动的构件，其角速度为ω，等效力矩为M_e，于是有

$$M_e\omega=\sum_{i=1}^{n}F_iv_i\cos\alpha_i+\sum_{j=1}^{m}\pm M_j\omega_j \tag{1-10}$$

若计算得出M_e为正则表示M_e与ω同方向，否则方向相反。

式（1-9）、（1-10）亦可写为

$$F_e=\sum_{i=1}^{n}F_i\frac{v_i\cos\alpha_i}{V}+\sum_{j=1}^{m}\pm M_j\frac{\omega_j}{V} \tag{1-11}$$

$$M_e=\sum_{i=1}^{n}F_i\frac{v_i\cos\alpha_i}{\omega}+\sum_{j=1}^{m}\pm M_j\frac{\omega_j}{\omega} \tag{1-12}$$

由以上二式可知，等效力（或等效力矩）不仅与机构的外作用力F_i和外力矩 M_j 有关，亦和各力作用点的速度、各构件的角速度与等效力（或等效力矩）作用点的速度（或角速度）的比值有关。在单自由度机构中，这些速比可能是不变的，也可能是构件位置的函数。这个单自由度机构的性质能使在不知构件真实的运动规律条件下完成力和力矩等效转化。然

后可用等效力（等效力矩）来确定机构运动的规律。

例1-2 将图1-5中提升的吊重G等效转化到电动机轴上，减速箱的传动比为i。吊重提升速度为v。

解 提升吊重所需的功率为

$$N = Gv\cos 180^{\circ} = -Gv \qquad (\mathrm{Nm/s})$$

被换算到电动机轴上的等效力矩的功率为

$$N = -M_e\omega_1 \qquad (\mathrm{Nm/s})$$

这里ω_1为电动机转子的角速度，由以上二式得等效力矩

$$M_e = G\frac{v}{\omega_1} = GR\frac{\omega_4}{\omega_1} = GR/i \qquad (\mathrm{N\cdot m})$$

这里ω_4为卷筒的角速度；R为卷筒的半径。

由于被提升吊重的重量是常数，减速箱传动比不变，故等效力矩亦为常数。

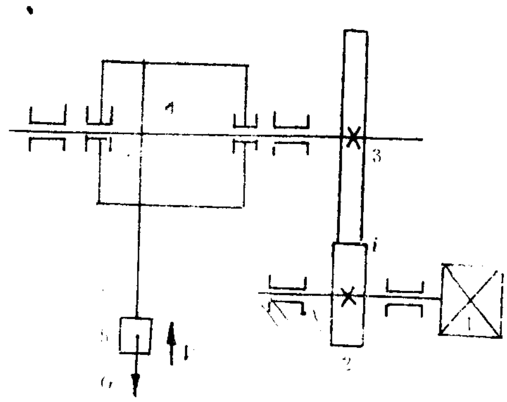

图1－5

三、等效质量和等效转动惯量

等效质量（或等效转动惯量）是根据动能守恒原则进行换算的，即根据等效构件所具有的动能与机构中所有构件所具有的动能之和相等来计算等效构件所具有的质量（或转动惯量）——等效质量（或等效转动惯量）。

在平面机构中，作平面复合运动的构件i具有的动能为

$$T_i = \frac{1}{2}m_i v_{si}^2 + \frac{1}{2}I_{si}\omega_i^2 \qquad (1\text{-}13)$$

式中 m_i及I_{si}——构件i的质量及对其质心S_i的转动惯量；

ω_i及v_{si}——构件i的角速度及其质心S_i的速度。

若构件i绕定轴转动，构件i对转轴O_i的转动惯量为I_{oi}，则$I_{oi} = I_{si} + m(\overline{O_iS_i})^2$，这时动能$T_i = \frac{1}{2}I_{oi}\omega_i^2$。

若构件i作直线运动，$\omega_i = 0$，设速度为v_i，则其动能为$T_i = \frac{1}{2}m_i v_i^2$。

若等效构件作直线运动，等效质量为M_e，速度为V，由等效构件的动能等于机构各构件动能之和得

$$\frac{1}{2}M_eV^2 = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{2}m_iv_{si}^2 + \frac{1}{2}I_{si}\omega_i^2\right)$$

或

$$M_e = \sum_{i=1}^{n}\left[m_i\left(\frac{v_{si}}{V}\right)^2 + I_{si}\left(\frac{\omega_i}{V}\right)^2\right] \qquad (1\text{-}14)$$

式中 n为运动构件数目。

若等效构件为绕定轴转动构件，设其角速度为ω，等效构件对轴O的等效转动惯量为I_e，于是有

$$\frac{1}{2} I_e \omega^2 = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{1}{2} m_i v_{s i}^2 + \frac{1}{2} I_{s i} \omega_i^2 \right)$$

或
$$I_e = \sum_{i=1}^{n} \left[m_i \left(\frac{v_{s i}}{\omega} \right)^2 + I_{s i} \left(\frac{\omega_i}{\omega} \right)^2 \right] \tag{1-15}$$

由式（1-14）及（1-15）知，等效质量M_e和等效转动惯量I_e均大于零。另外，等效质量和等效转动惯量与传动比有关，高速运动构件的质量比低速运动构件的质量对等效质量（或等效转动惯量）的影响要大得多。例如，通用起重机传动系统的等效转动惯量约为高速轴上各元件的转动惯量的1.10～1.40倍。

例1-3 已知图1-6所示曲柄滑块机构的l_{AB}、l_{BC}、l_{BS_2}、I_{1A}、I_{s2}及m_2、m_3。试求将构件1、2、3的质量转化到构件1上的等效转动惯量。

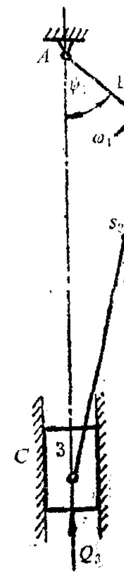

图1-6

解 曲柄1作旋转运动，其动能为

$$T_1 = \frac{I_{1A}\omega_1^2}{2} \qquad (\text{kgm}^2/\text{s}^2)$$

连杆2的动能为

$$T_2 = \frac{I_{s2}\omega_2^2}{2} + \frac{m_2 v_{s2}^2}{2} \qquad (\text{kgm}^2/\text{s}^2)$$

滑块3的动能为

$$T_3 = \frac{m_3 v_c^2}{2} \qquad (\text{kgm}^2/\text{s}^2)$$

整个系统的动能为

$$T = T_1 + T_2 + T_3 = \frac{I_{1A}\omega_1^2}{2} + \frac{I_{s2}\omega_2^2}{2} + \frac{m_2 v_{s2}^2}{2} + \frac{m_3 v_c^2}{2} \qquad (\text{kgm}^2/\text{s}^2)$$

等效构件的动能为

$$T = \frac{I_e \omega_1^2}{2} \qquad (\text{kgm}^2/\text{s}^2)$$

由上二式联解得

$$I_e = I_{1A} + I_{s2}\left(\frac{\omega_2}{\omega_1}\right)^2 + m_2\left(\frac{v_{s2}}{\omega_1}\right)^2 + m_3\left(\frac{v_c}{\omega_1}\right)^2 \qquad (\text{kgm}^2)$$

或写为

$$I_e = I_{1A} + I_{s2}\frac{l_{AB}^2}{l_{BC}^2}\left(\frac{v_C}{v_B}\right)^2 + m_2 l_{AB}^2\left(\frac{v_{s2}}{v_B}\right)^2 + m_3 l_{AB}^2\left(\frac{v_C}{v_B}\right)^2 \qquad (\text{kgm}^2)$$

上式表明等效转动惯量取决于机构的位置。因上式有机构各点线速度的比值，这些线速

度可由速度图确定。在此机构中等效转动惯量为机构位置的周期函数，曲柄每转一圈，ψ由0变至2π，所有的速度重复前值。

例1-4 已知行星齿轮传动机构（图1-7）的中心轮、行星轮、系杆的转动惯量分别为I_1、I_2、I_H，其半径相应为R_1、R_2，系杆质量为m_2，试求转化到中心轮1上的等效转动惯量。

解 整个机构的动能等于各个构件动能之和。构件1作旋转运动，其动能为

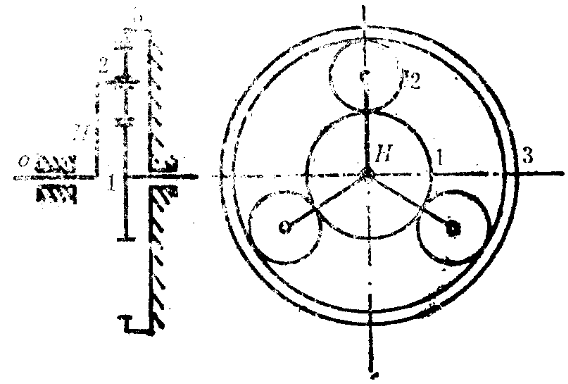

图1—7

$$T_1=\frac{I_1\omega_1^2}{2} \qquad (\text{kgm}^2/\text{s}^2)$$

构件2作平面复合运动，其动能为

$$T_2=\frac{I_2\omega_2{}^2}{2}+\frac{m_2 v_{s2}{}^2}{2} \qquad (\text{kgm}^2/\text{s}^2)$$

构件2重心的速度等于

$$v_{s2}=(R_1+R_2)\omega_H \qquad (m/s)$$

这里R_1及R_2为齿轮1及2的节圆半径；ω_H为系杆H的角速度。故T_2又可写为

$$T_2=\frac{I_2\omega_2{}^2}{2}+\frac{m_2(R_1+R_2)^2}{2}\omega_H{}^2 \qquad (\text{kgm}^2/\text{s}^2)$$

系杆H作旋转运动，其动能为 $T_H=\dfrac{I_H\omega^2{}_H}{2}$ （kgm^2/s^2）

系统构件的总动能T为

$$T=T_1+3T_2+T_H$$

$$=\frac{I_1\omega_1^2}{2}+3\left[\frac{I_2\omega_2^2}{2}+\frac{m_2(R_1+R_2)^2\omega_H^2}{2}\right]+\frac{I_H\omega_H^2}{2} \qquad (\text{kgm}^2/\text{s}^2)$$

等效构件的动能为

$$T=\frac{I_e\omega_1^2}{2} \qquad (\text{kgm}^2/\text{s}^2)$$

令上二式相等，并整理后得

$$I_e=I_1+3I_2\left(\frac{\omega_2}{\omega_1}\right)^2+3m_2(R_1+R_2)^2\left(\frac{\omega_H}{\omega_1}\right)^2+I_H\left(\frac{\omega_H}{\omega_1}\right)^2 \qquad (\text{kgm}^2)$$

由于所研究机构的传动比是不变的，所以等效转动惯量I_e为常量。

四、等效刚度

在作机械动力学分析研究时，某些构件（钢丝绳、弹性联轴节、细长传动轴、支架等等）由于在工作中变形较大而应考虑其弹性。弹性构件的变形使机构的运动准确性受到一定的影

响，而更重要的是当有变化的力或扭矩作用在这些构件上面时，就会激起弹性振动。从另一方面看，弹性构件在一般情况下又有吸收冲击和振动的缓冲作用。振动使构件承受变化的动力载荷，而缓冲作用却又能使动力载荷减轻。因此对构件弹性影响的研究十分重要。

弹性元件的刚度是使该元件产生单位变形（线位移或角位移）的力或力矩。显然，弹性元件的刚度与材料的弹性模量、形状、尺寸、以及加载位置和加载性质有关。

由理论力学知，若干个串联及并联弹性件（弹簧）可用单一的具有等效刚度Ke的弹性元件（弹簧）来代替。对于机械传动系统，被动轴的刚度可折算到主动轴，反之亦然。

下面以图1-8(a)所示的机械传动系统为例讨论等效刚度的计算。设原动机转子的转动惯量为I_1，工作机构的转动惯量为I_2，齿轮传动的速比为i，齿轮A、B的转动惯量为I_A、I_B。

若齿轮A、B的转动惯量I_A、I_B与I_1、I_2相比很小，则可忽略不计。这时可将系统简化为二质量-弹簧力学模型。先用一等直径的等效轴来代替工作机构与齿轮B之间的阶梯轴。轴的扭转刚度k_{de}应等于原阶梯轴的扭转刚度。对于实心轴有

$$\frac{G}{l_e}\cdot\frac{\pi d_e^4}{32}=\frac{G}{l}\cdot\frac{\pi d^4}{32}$$

$$l_e=l\left(\frac{d_e}{d}\right)^4 \qquad (1\text{-}16)$$

式中　G——轴材料的剪切弹性模量；

d_e、l_e——分别为等效轴的直径、长度；

d、l——分别为原轴的直径、长度。

若取$d_e=d_2$，对轴径为d_1，长度为l_1的轴段有

$$l_e=l_1\left(\frac{d_2}{d_1}\right)^4$$

等效轴的总长度

$$L_o=2l_e+l_2$$

等效轴的扭转刚度

$$k_{de}=\frac{G}{L_o}\cdot\frac{\pi d_2^2}{32}$$

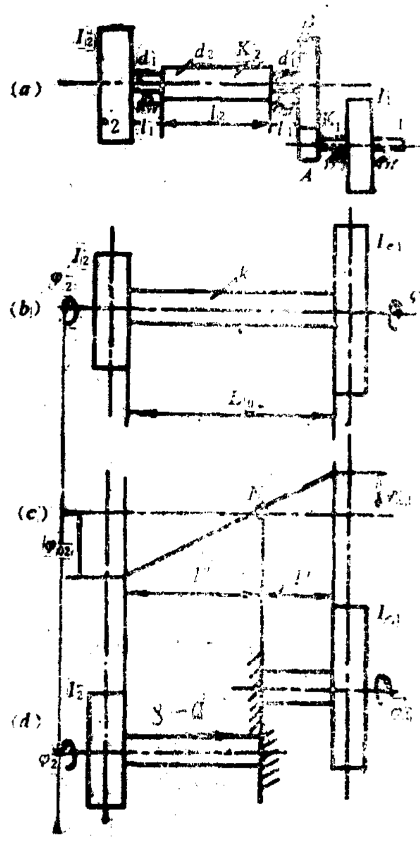

图1-8

将I_1向被动轴转化为I_{e1}，转化的原则是转化前后的动能应相等。若忽略不计传动齿轮的转动惯量，于是有

$$\varphi_2=\frac{\varphi_1}{i},\quad \dot{\varphi}_2=\frac{\dot{\varphi}_1}{i}$$

式中　φ_1、φ_2——分别为原动机转子的轴1与执行机构的轴2的扭转角度；

$\dot{\varphi}_1$、$\dot{\varphi}_2$——分别为原动机转子的轴1与执行机构转子的轴2的角速度。

根据动能守恒原则，将I_1向被动轴转化，则

$$\frac{1}{2}I_1\dot{\varphi}_1^2=\frac{1}{2}I_{e1}\dot{\varphi}_2^2=\frac{1}{2}I_{e1}\left(\dot{\varphi}_1/i\right)^2$$

得 $$I_{e1}=I_1\cdot i^2 \tag{1-17}$$

这里I_{e1}是I_1向被动轴转化后的等效转动惯量。

相反，若I_2向主动轴转化，同理得

$$I_{e2}=I_2/i^2 \tag{1-18}$$

这里I_{e2}是I_2向主动轴转化后的等效转动惯量。

若用刚度为k_e的等效轴来代替刚度为k_{de}与k_1的两根轴（图 1－8（b）），则其折算的原则是转化前后的势能应相等，若执行机构上作用一扭矩M，等效轴的扭转角度为φ_e，于是有

$$\frac{1}{2}k_e\varphi_e^2=\frac{1}{2}k_1\varphi_1^2+\frac{1}{2}k_{de}\varphi_{de}^2$$

将 $$\varphi_e=\frac{M}{k_e},\quad \varphi_1=\frac{M/i}{k_1},\quad \varphi_{de}=\frac{M}{k_{de}}$$

代入上式得

$$\frac{1}{k_e}=\frac{1}{k_1 i^2}+\frac{1}{k_{de}}$$

$$k_e=\frac{k_1\cdot k_{de}\cdot i^2}{k_{de}+k_1 i^2} \tag{1-19}$$

上式是主动轴刚度向被动轴转化的计算公式，其等效刚度k_e相当于k_{de}与$k_1 i^2$串联的结果。若被动轴的刚度向高速轴转化，同理有

$$\frac{1}{k_e}=\frac{1}{k_1}+\frac{1}{k_{de}/i^2}$$

$$k_e=\frac{k_1\cdot k_{de}}{k_{de}+k_1 i^2} \tag{1-20}$$

由以上分析可见，机械系统可转化为图 1 － 8（b）所示的质量－弹簧扭振力学模型，扭振时两转动惯量间具有一个相对静止的截面N，N称为节点。节点两边可视为两个独立的扭振系统，如图 1 － 8（c）、（d）所示。

例1－5 已知图 1 － 9 所示的卷扬机传动系统，试求转化到卷筒轴上的等效刚度和等效转动惯量。

解 卷扬机传动系统可按下式折算为等效三质量系统（图 1 － 9（a）、（b））。

$I_2=I_b(\mathrm{kg\cdot m^2})$， $I_3=I_d+I_c\cdot i^2(\mathrm{kg\cdot m^2})$， $I_1=I_a\cdot i^2(\mathrm{kg\cdot m^2})$

$k_2=k_b(\mathrm{N\cdot m/rad})$， $k_1=k_a\cdot i^2(\mathrm{N\cdot m/rad})$

如果齿轮的转动惯量I_c和I_d比转动惯量I_a、I_b小得很多时，还可以把它们忽略不计，进一步简化为二质量系统（图 1 － 9（c））。其中轴的等效刚度为

$$k_e=\frac{1}{1/k_1+1/k_2}\quad (\mathrm{N\cdot m/rad})$$

顺便指出，在起重机提升机构中，如果卷筒轴及转动件的等效质量小于机构及吊重等全部等效质量的10％时，则可忽略不计传动件的影响，而按二质量系统进行计算，其解答也比较精确。

对于起重机来说，减速箱各轴的等效刚度如果大于传动轴的等效刚度10倍以上时，就可以把减速箱零件视为刚体进行简化处理。

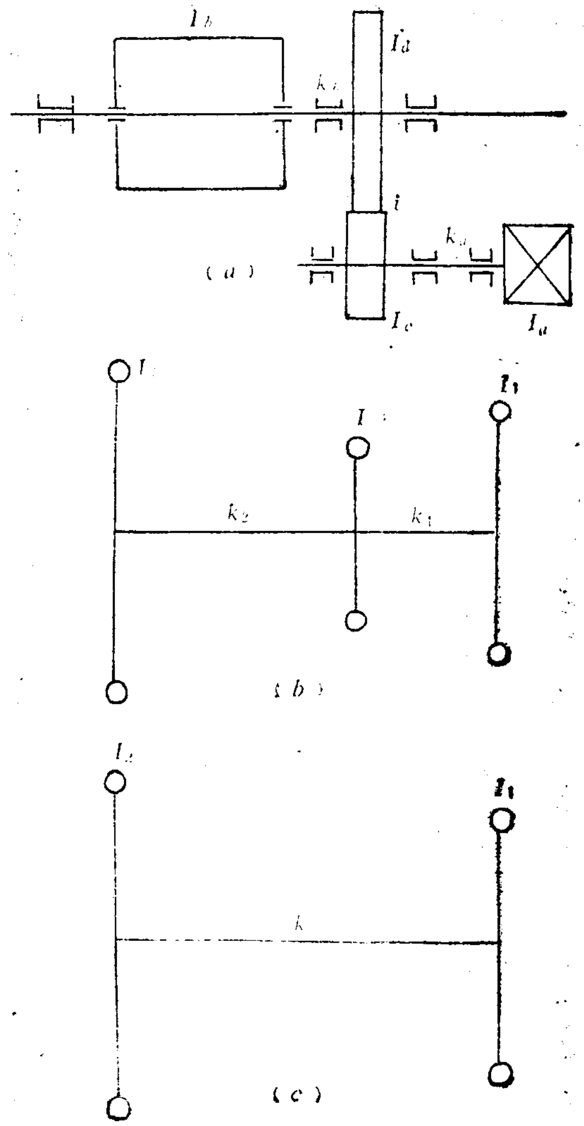

图1-9

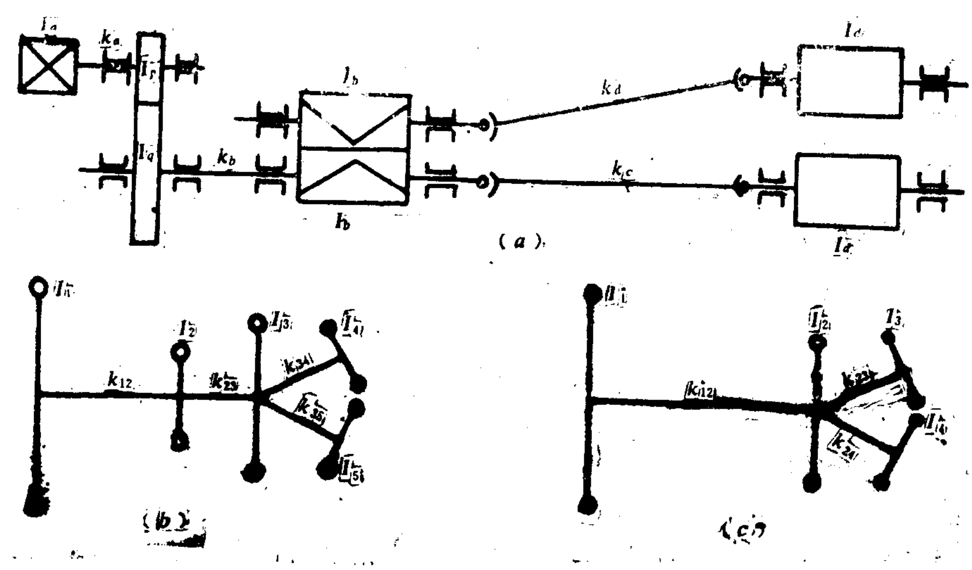

图1-10