

高等学校试用教材

# 理论力学

下 册

华东水利学院工程力学教研组  
《理论力学》编写组编

人民教育出版社

高等学校试用教材

# 理论力学

下 册

华东水利学院工程力学教研组  
《理论力学》编写组编

人民教育出版社

高等学校试用教材  
**理 论 力 学**  
下 册

华东水利学院工程力学教研组  
《理论力学》编写组编

人 民 教 育 出 版 社 出 版  
北京发行所发行  
上海市印刷四厂印装

开本 787×1092 1/32 印张 11 14/16 字数 286,000

1979年3月第1版 1980年4月第2次印刷

印数 40,001—70,000

书号 15012·0131 定价 0.98 元

# 目 录

## 第三篇 动 力 学

绪言 .....	1
第十五章 动力学基本定律 运动微分方程 .....	3
§ 15-1 牛顿定律 惯性坐标系 .....	3
§ 15-2 单位制和量纲 .....	5
§ 15-3 质点运动微分方程 .....	7
习题 .....	20
第十六章 动量定理 .....	27
§ 16-1 质点的动量定理 .....	27
§ 16-2 质点系动量定理 .....	31
§ 16-3 质量中心 质心运动定理 .....	36
*§ 16-4 变质量质点运动微分方程 .....	42
习题 .....	50
第十七章 动量矩定理 .....	58
§ 17-1 质点的动量矩定理 .....	59
§ 17-2 质点系的动量矩 .....	65
§ 17-3 转动惯量 .....	67
§ 17-4 质点系动量矩定理 刚体定轴转动微分方程 .....	74
§ 17-5 质点系动量矩守恒定理及其应用 .....	83
*§ 17-6 刚体平面运动微分方程 .....	85
习题 .....	91
第十八章 动能定理 .....	100
§ 18-1 功与功率 .....	101
§ 18-2 质点及质点系的动能 .....	111
§ 18-3 质点的动能定理 .....	113

§ 18-4	质点系动能定理	117
§ 18-5	势力场 势能	122
§ 18-6	机械能守恒定理	126
§ 18-7	普遍定理的综合应用	129
*§ 18-8	质点在有心力作用下的运动	134
	习题	142
<b>第十九章</b>	<b>达兰贝尔原理</b>	<b>152</b>
§ 19-1	惯性力的概念	152
§ 19-2	质点的达兰贝尔原理	154
§ 19-3	质点系达兰贝尔原理 刚体惯性力系的简化	157
§ 19-4	定轴转动刚体的动反力	165
*§ 19-5	刚体的惯性积及惯性主轴	168
	习题	175
<b>第二十章</b>	<b>虚位移原理</b>	<b>184</b>
§ 20-1	约束及约束方程	185
§ 20-2	自由度 广义坐标	189
§ 20-3	虚位移	191
§ 20-4	理想约束	195
§ 20-5	虚位移原理	196
*§ 20-6	广义力	207
*§ 20-7	用广义力表示的质点系平衡条件	211
*§ 20-8	保守系统平衡的稳定性	213
	习题	218
<b>第二十一章</b>	<b>拉格朗日方程</b>	<b>229</b>
§ 21-1	动力学普遍方程	229
*§ 21-2	第二类拉格朗日方程	233
*§ 21-3	哈密顿原理	247
	习题	252
<b>*第二十二章</b>	<b>质点的相对运动</b>	<b>259</b>
	习题	270
<b>第二十三章</b>	<b>振动理论基础</b>	<b>273</b>

§ 23-1	单自由度系统的自由振动	273
§ 23-2	计算固有频率的能量法	286
§ 23-3	单自由度系统有阻尼的自由振动	291
§ 23-4	单自由度系统的强迫振动	299
*§ 23-5	减振与隔振简述	309
*§ 23-6	两个自由度系统的自由振动	312
*§ 23-7	两个自由度系统的强迫振动	323
*§ 23-8	两个自由度系统的振动的矩阵表示法	328
	习题	332
<b>第二十四章</b>	<b>碰撞</b>	<b>340</b>
§ 24-1	碰撞现象 瞬时力	340
§ 24-2	基本假设与基本理论	342
§ 24-3	两物体的对心碰撞	343
§ 24-4	碰撞对定轴转动刚体及平面运动刚体的作用	350
	习题	358
<b>习题答案</b>		<b>361</b>

## 第三篇 动力学

### 绪 言

在静力学里,我们研究了物体在力的作用下保持平衡的条件;但是,如果作用于物体的力不满足平衡条件,则物体将如何运动?静力学不能回答这个问题。

在运动学里,我们从几何学的观点研究了物体的运动,就是说,只研究物体怎样运动;但是,物体为什么会这样运动?运动学则不能回答。

上述问题将由动力学来回答。动力学研究物体的运动与作用于物体的力之间的关系,从而建立物体机械运动的普遍规律。

平衡是机械运动的特殊情形,因而静力学中研究的平衡问题,可以看作是动力学问题的特例。另一方面,静力学中力、力矩、力偶等基本概念及有关的理论,力系的简化等,又是学习动力学的必需知识。至于运动学,则更是学习动力学所不可缺少的基础。可以说,静力学和运动学都只研究物体机械运动的一个方面,而动力学则把两方面结合了起来。

随着生产的发展,工程技术中提出的动力学问题愈来愈多。机器和机械设计中的均衡问题、振动问题、动反力问题等,固不必说,属于动力学问题;就是在土建、水利工程的结构物的设计中,也愈益需要考虑动力学方面的问题,如动力荷载的作用、振动、抗震等;在许多尖端科学技术中,如人造地球卫星和宇宙火箭的发射和运行等,更包含着许多动力学问题。虽然我们不可能在理论力学

中讨论这些专门问题，但理论力学中的动力学基本理论，却是研究这些问题的必需基础。于此可见，掌握动力学基本理论，至为重要。



# 第十五章 动力学基本定律

## 运动微分方程

### § 15-1 牛顿定律 惯性坐标系

动力学的基本定律是牛顿在其《自然哲学之数学原理》一书中提出的三个定律，即通称的牛顿三定律。这几个定律，在静力学中已讲过，这里再复述一遍，并作一些补充说明。

**第一定律** 任何物体，如不受外力作用，将保持静止或作匀速直线运动。

**第二定律** 质点受到外力作用时，所产生的加速度的大小与力的大小成正比，而与质点的质量成反比，加速度的方向与力的方向相同。这一定律可用熟知的数学公式表示为

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a} \quad (\text{a})$$

其中  $m$  为质点的质量，而  $\mathbf{F} = \sum \mathbf{F}_i$  是作用于质点的所有的力的合力。

**第三定律即反作用定律** 两物体间相互作用的力(作用力与反作用力)同时存在，大小相等，作用线相同而指向相反。

不受外力作用时，物体将保持静止的或匀速直线运动的状态，这是物体的属性，这种属性称为惯性。所以第一定律也称惯性定律，而匀速直线运动也称惯性运动。

由式(a)可见，设以相等的力作用于不同的质点，则质量  $m$  愈大的质点所产生的加速度  $a$  愈小，即愈不容易改变其运动状态，这就表示，质点的质量愈大，它的惯性也愈大。所以，质点的质量是它的惯性的量度。

在古典力学里，一个物体的质量  $m$  被看作是一个常量，不因

为物体的运动状态不同而改变。但是,根据相对论力学,物体的质量将随运动速度而变<sup>①</sup>。不过,只有当物体运动的速度可与光速相比时,变化才显著。在古典力学里,所考察的物体的运动速度都远远小于光速,因而将物体的质量看作常量足够精确。

任一物体的质量  $m$  与它的重量  $P$  之间存在着如下关系:

$$P = mg \quad \text{或} \quad m = \frac{P}{g}$$

其中  $g$  是重力加速度。

应当注意,质量与重量是两个不同的概念。一个物体的质量是一定的,而它的重量则随着它在地面上的位置而变,因为地面上各地的  $g$  值不同。在我国首都北京,根据实测结果,重力加速度  $g = 9.8012 \text{ m/s}^2$ ; 在南京,  $g = 9.7944 \text{ m/s}^2$ ; 以后计算时即取  $g = 9.80 \text{ m/s}^2$ 。

反作用定律对于研究质点系的动力学问题具有重要意义。因为第二定律是就一个质点而言的,而我们将要考察的问题,大量的关于质点系的。要将根据第二定律建立起来的质点动力学的理论推广应用于质点系,就必须利用反作用定律。

在运动学里曾指出,同一个物体,对于不同的坐标系来说,运动情况是不同的。于是就产生了这样的问题:牛顿定律里所说的静止或运动、速度和加速度,是对什么坐标系来说的?

牛顿在提出各定律之前,先引进了“绝对空间”的概念。所谓“绝对空间”,是与物质无关的、绝对不动的空间。按照牛顿的意见,他提出的定律(主要指第一定律和第二定律,因为第三定律与

---

<sup>①</sup> 根据相对论力学,物体以速度  $v$  在一参考系内运动时,它的质量与速度的关系是

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \beta^2}}$$

其中  $m_0$  是物体相对于参考系处于静止状态时的质量(称为静止质量),  $\beta = v/c$ , 而  $c$  是光速。

坐标系的选择无关)只适用于质点在“绝对空间”内的运动,即质点在绝对静止的坐标系内的运动。当然,“绝对空间”是不存在的,宇宙间根本找不到绝对静止不动的坐标系。但牛顿引进“绝对空间”这一概念,就清楚地告诉我们:牛顿定律并不是对任何坐标系都适用,而只适用于某种坐标系。

适用牛顿定律的坐标系称为惯性坐标系。既然不可能找到绝对静止不动的坐标系,那末,什么样的坐标系可以作为惯性坐标系呢?只有靠观察和实验来验证。

实践结果证明,在绝大多数工程问题中,可取固结于地球的坐标系为惯性坐标系。只是对于某些必须考虑地球自转的影响的问题(如由地球自转而引起的河流冲刷,落体对铅垂线的偏离等)才选取以地心为原点而三个轴指向三个“恒星”的坐标系作为惯性坐标系,即所谓地心坐标系。在天文计算中,则取太阳中心坐标系,即以太阳中心为坐标原点,三个坐标轴指向三个“恒星”。以后还将证明,凡是相对于惯性坐标系作匀速直线运动的坐标系,也是惯性坐标系(见第二十二章)。在以后的论述中,如果没有特别指明,则所有运动都是对惯性坐标系而言的。并且约定,物体在惯性坐标系中的运动称为绝对运动,还习惯地将惯性坐标系称为固定坐标系或静坐标系,以区别于某些需要考虑其运动的坐标系。在实际问题中,除少数特别指明者外,都以固结于地球的坐标系为惯性坐标系。

## § 15-2 单位制和量纲

力学中有许多物理量,每个物理量都必须用一适当的单位来量度。由于某些物理量之间具有一定的关系,因而并不是每个物理量的单位都是可以任意规定的。在许多物理量中,我们以某几个量作为基本量,它们的单位称为基本单位,其它量的单位都可由

基本单位导出,称为导出单位,而那些量也相应地称为导出量。

选取不同的基本单位,就形成不同的单位制。本书采用国际单位制(SI),以长度、时间和质量为基本量,它们的单位米(m)、秒(s)、千克(公斤, kg)为基本单位;其它量均为导出量,它们的单位则是导出单位。目前工程上也常用工程单位制,以长度、时间和力为基本量,单位是米(m)、秒(s)、公斤(kg)。

在国际单位制中,力是导出量,等于质量与加速度的乘积。设一个力使1千克质量产生1米/秒<sup>2</sup>的加速度,则该力的大小为1牛顿,代号为牛(N),即

$$1\text{ N} = 1\text{ kg} \times 1\text{ m/s}^2 = 1\text{ kg} \cdot \text{m/s}^2$$

在工程单位制中,质量是导出量,质量的单位是 kg·s<sup>2</sup>/m,这一单位并无特殊名称,通常就称为工程质量单位。

某些量在国际单位制和工程单位制中的单位之间的换算关系见上册附录二。

无论采用哪种单位制,导出量都可用几个基本量的组合表示出来。表示某一物理量是由哪几个基本量怎样组成的式子,称为该物理量的量纲或因次。在国际单位制中,长度、时间和质量是基本量,它们的量纲分别用[L]、[T]、[M]表示,其它量的量纲都可表示为这三个量纲的函数。例如,速度的量纲是[v]=[L][T]<sup>-1</sup>,加速度的量纲是[a]=[L][T]<sup>-2</sup>,而力的量纲是[F]=[M][L]·[T]<sup>-2</sup>。

对于工程单位制,各个量的量纲可以类似地得到。

应当注意,量纲与单位是两个不同的概念。一个物理量的量纲是一定的,但它的大小却可用不同的单位来量度。例如长度的量纲是[L],但可用米、厘米、千米(公里)等作为量度长度的单位;时间的量纲是[T],单位则可用秒、分、小时等;质量的量纲是[M],却可用千克、克等作为单位。相似地,速度单位可以是米/秒、公

里/小时等;而力的单位可以是牛、千牛等。

知道一个物理量的量纲,就不难确定它的单位并进行单位换算。例如,速度的量纲是 $[L][T]^{-1}$ ,如长度以米计,时间以秒计,则速度的单位是米/秒,而 $1\text{米/秒} = 1\left[\frac{\text{千米}}{1000}\right]\left[\frac{\text{小时}}{3600}\right]^{-1} = 3.6$ 千米/小时。

物理量的量纲还有一个重要作用,就是检验力学方程的正确性。因为在同一个方程中,各项的量纲必须相同(在作数字计算时,还必须单位相同)。虽然一个方程的各项量纲相同时,并不能判定该方程是否正确;但如一个方程的各项的量纲不尽相同,则可以断定该方程必然是错误的。

### § 15-3 质点运动微分方程

设有一质点  $M$ , 质量为  $m$ , 作用于该质点的所有的力的合力为  $\mathbf{F} = \sum \mathbf{F}_i$ , 图 15-1。命质点的加速度为  $\mathbf{a}$ , 则

$$m\mathbf{a} = \mathbf{F} \quad (15-1)$$

由运动学已知, 当用质点  $M$  对于坐标原点  $O$  的矢径  $\mathbf{r}$  来表明它的位置时, 质点的加速度是

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}$$

其中  $\mathbf{v}$  是质点的速度。于是方程 (15-1) 可改写为

$$m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{F} \quad \text{或} \quad m \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = \mathbf{F} \quad (15-2)$$

这就是矢量形式的质点运动微分方程。

过原点  $O$  取直角坐标系  $Oxyz$ , 将方程 (15-2) 投影到各坐标

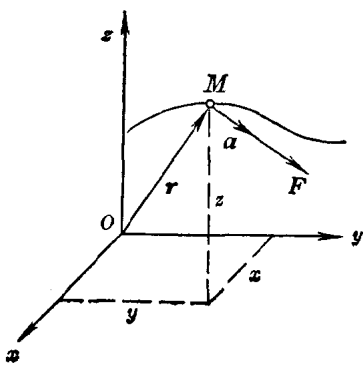


图 15-1

轴上, 就得到直角坐标形式的质点运动微分方程:

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = X, \quad m \frac{d^2y}{dt^2} = Y, \quad m \frac{d^2z}{dt^2} = Z \quad (15-3)$$

其中  $X$ 、 $Y$ 、 $Z$  分别为作用于质点的各力在  $x$ 、 $y$ 、 $z$  轴上的投影之和。

如果质点作平面曲线运动, 取运动平面为  $Oxy$  平面, 则方程 (15-3) 成为

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = X, \quad m \frac{d^2y}{dt^2} = Y, \quad Z = 0 \quad (15-4)$$

如果质点作直线运动, 取  $x$  轴沿路径直线, 则方程 (15-3) 成为

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = X, \quad Y = 0, \quad Z = 0 \quad (15-5)$$

设已知质点运动的轨迹曲线, 以轨迹曲线在质点所在处的切线  $\tau$  (指向曲线正方向)、法线  $n$  (指向曲率中心) 及垂直于  $\tau$  和  $n$  的  $b$  为自然坐标轴, 图 15-2。将方程 (15-1) 投影到自然坐标轴上, 有

$$ma_\tau = F_\tau, \quad ma_n = F_n, \quad ma_b = F_b$$

但

$$a_\tau = \frac{d^2s}{dt^2}, \quad a_n = \frac{v^2}{\rho}$$

而加速度在  $b$  方向上的投影  $a_b = 0$ , 于是

$$m \frac{d^2s}{dt^2} = F_\tau, \quad m \frac{v^2}{\rho} = F_n, \quad F_b = 0 \quad (15-6)$$

这就是自然坐标形式的质点运动微分方程。

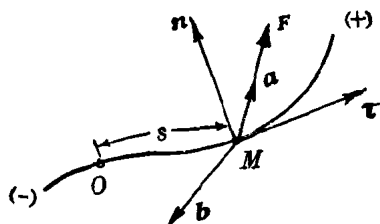


图 15-2

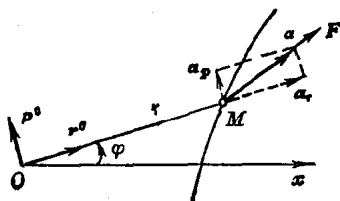


图 15-3

当质点作平面曲线运动时，如采用极坐标表示法(图 15-3)，则质点的加速度为[公式(11-45)]

$$\mathbf{a} = (\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2)\mathbf{r}^0 + (r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi})\mathbf{p}^0$$

于是，将方程(15-1)两边投影到  $\mathbf{r}^0$  及  $\mathbf{p}^0$  方向，就得到

$$m(\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2) = F_r, \quad m(r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi}) = F_p, \quad (15-7)$$

自然，所有的力在垂直于曲线平面方向如  $z$  轴上的投影之和必须等于零，即  $F_z = 0$ 。

可以看出：

① 设已知质点的运动规律，须求质点所受的力，则不难用微分法求得解答。

② 设已知作用于质点的力，须求质点的运动规律，则归结为求解运动微分方程。在一般情况下，作用于质点的力可能是时间、质点的位置坐标、速度的函数，只有当函数关系较简单时，才能求得微分方程的精确解；如果函数关系复杂，求解将非常困难，有时只能满足于求出近似解。此外，求解微分方程时将出现积分常数，这些积分常数，须根据质点运动的初条件即初速度和初位置坐标来决定，所以，对于这一类问题，除了作用于质点的力以外，还必须知道质点运动的初条件，才能完全确定质点的运动。

顺便说明，对于受约束的非自由质点，微分方程中自然应包括质点所受的约束力，除此之外，质点的运动还必须满足约束对它施加的限制条件。关于约束力的方向，同在静力学中一样，决定于约束的性质；而约束力的大小则是未知量，应根据质点的运动来求得。

对于质点系，原则上可以就每个质点写出运动微分方程。但是，由于各质点的运动以及所受的力都是互有关联的，就所有各质点写出的不论什么形式的微分方程，必然是联立微分方程，在大多数情况下，要求得这些联立微分方程的精确解是非常困难的。因此，对于质点系的问题，只有在最简单的情况下才用本节讲述的方

法求解，一般则将应用以后各章讲述的定理求解。

**例 15-1** 桶重  $P=2.8\text{ kN}$ ，以匀加速度提升，在最初 10 秒钟内上升了 35m，求吊索内的拉力，桶的初速度为零。

**解** 桶运动时所受的力有重力  $P$ ，吊索拉力  $T$ ，图 15-4。取  $x$  轴向上，则由  $m\frac{d^2x}{dt^2}=X$  有

$$\frac{P}{g}a = T - P$$

由此解得

$$T = P\left(1 + \frac{a}{g}\right) \quad (\text{a})$$

现在须由给定的条件求出桶的加速度  $a$ 。因桶作匀加速运动，而  $v_0=0$ ，所以，以初瞬时的位置为原点，则  $x = \frac{1}{2}at^2$ 。令  $x=35\text{m}$ ， $t=10\text{s}$ ，求得

$$a = \frac{2x}{t^2} = \frac{2 \times 35}{10^2} = 0.7\text{m/s}^2$$

图 15-4 代入 (a)，得  $T = P\left(1 + \frac{0.7}{9.8}\right) = 3.0\text{ kN}$

从上例中的式 (a) 可以看出，吊索拉力  $T$  包含两部分：一部分等于  $P$ ，是由桶的重力引起的，称为静反力；一部分等于  $P \times \frac{a}{g}$ ，是由桶加速运动而引起的，称为动反力。一般说来，动力学中的约束力，都不仅与物体所受的主动动力有关，而且与物体的运动有关，这是与静力学中的约束力不同之处。

**例 15-2** 质量为  $m$  的质点  $M$  在坐标平面  $Oxy$  内运动 (图 15-5)，其运动方程为

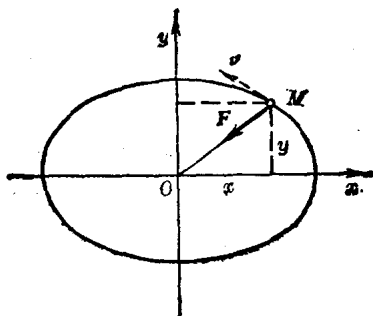


图 15-5



$$x = a \cos \omega t, \quad y = b \sin \omega t \quad (\text{a})$$

其中  $a, b, \omega$  都是常量, 求质点所受的力  $F$ 。

解 消去时间  $t$ , 得

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

可见质点运动的轨迹曲线是以  $a$  及  $b$  为半轴的椭圆。

将式(a)代入方程(15-4), 可求得力  $F$  的投影

$$X = m \frac{d^2x}{dt^2} = -m\omega^2 \cos \omega t = -m\omega^2 x$$

$$Y = m \frac{d^2y}{dt^2} = -m\omega^2 \sin \omega t = -m\omega^2 y$$

于是, 力  $F$  的大小为

$$F = \sqrt{X^2 + Y^2} = m\omega^2 \sqrt{x^2 + y^2} = m\omega^2 r$$

其中  $r$  是动点  $M$  的矢径  $r$  的模。力  $F$  的方向余弦为

$$\cos(\mathbf{F}, x) = \frac{X}{F} = -\frac{x}{r}, \quad \cos(\mathbf{F}, y) = \frac{Y}{F} = -\frac{y}{r}$$

恰与矢径  $r$  的方向余弦数值相等而符号相反。所以力  $F$  与矢径  $r$  成比例而方向相反(即指向坐标原点  $O$ ), 可用方程表为

$$\mathbf{F} = -m\omega^2 \mathbf{r}$$

这种力称为有心力。

**例 15-3** 飞机重  $P$ , 以匀速率  $v$  沿水平圆周作盘旋飞行, 翼平面与水平成角  $\alpha$ , 图 15-6。求盘旋半径  $r$  和升力  $F$ 。

解 将飞机作为质点看待。作用于飞机的力计有重力  $P$ , 铅直向下; 升力  $F$ , 垂直于翼平面, 如图所示。因飞机以匀速率盘旋飞行, 可知沿切线方向

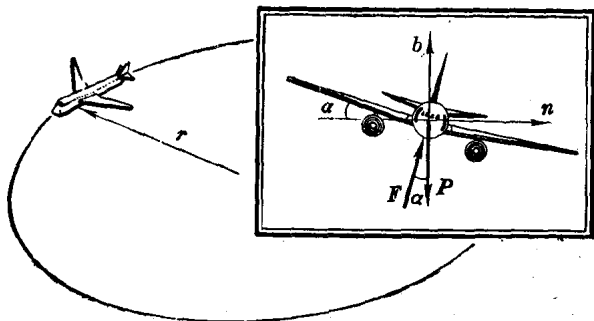


图 15-6