

萬有文庫

第二集七百七種

王雲五主編

初等算學史

(上)

卡約黎著

曹丹文譯

商務印書館發行

序

人羣之進化，率由野蠻而趨於文明，學科之發達，率由簡淺而趨於高深；各科皆然，算學亦何獨不然。夫人類之有算學，蓋自世界之有人類始，一若粟米布帛，與人生相終始，不能須臾離去。然皆先簡後繁，先淺後深，舉世同軌，莫之或異。若學者徒驚近世算學之新奇，而不尋流溯源，一考其隨時變遷之陳迹，又何能探索算學之本原，窺視其推陳出新之妙用耶？鄙人不揣簡陋，爰取美國卡約黎氏『初等算學史』而譯之，以餉學者。若學者不棄而取閱之，則於初等算學變遷之大勢，或能了然於心歟！

中華民國十四年仲秋因始曹丹文誌

例言

一、是書爲美國卡約黎氏所著。引證之書，爲數甚多。內於各國（博引遠古近今）之初等算學，原原本本，歷述其變遷之情勢，文詞整潔，詳簡合宜。惟譯者無文，恐失本來面目。

一、書內引述之書名，無論爲英國，或他國文字，悉斟酌原義，譯成中文，俾便記憶。

一、書內引述之西曆年代，悉註以中國年代，俾便對照。

一、譯文內句讀，人名，地名，書名，及其他重要名詞，悉用新式記號及標點，以圖醒目。

一、書內小註，關係重要者，擇譯於每面之下，以資考證。

一、鄙人學識簡陋，詞句之間，錯誤必多，深願海內外算學同志進賜教正，將不勝感謝之至。

目錄

第一編 上古時代……………一

第一章 記數法與數目字……………一

第二章 算術與代數……………二〇

(1) 埃及……………二〇

(2) 希臘……………二八

(3) 羅馬……………四一

第三章 幾何與三角……………四七

(1) 埃及與巴比倫……………四七

(2) 希臘……………五一

目錄

(3) 羅馬	九四
第二編 中古時代	九九
第一章 算術與代數	九九
(1) 印度	九九
(2) 亞拉伯	一一一
(3) 中古時代之歐羅巴	一一九
I 羅馬算術之輸入	一一九
II 亞拉伯稿本之翻譯	一二六
III 第一次醒悟	一二八
第二章 幾何與三角	一三二
(1) 印度	一三二
(2) 亞拉伯	一三五

(3) 中古時代之歐羅巴·····	一四二
-------------------	-----

I 羅馬幾何之輸入·····	一四二
----------------	-----

II 亞拉伯稿本之翻譯·····	一四三
------------------	-----

III 第一次醒悟·····	一四四
----------------	-----

第三編 近世時代·····	一五一
---------------	-----

第一章 算術·····	一五一
-------------	-----

(1) 算術之成爲科學及藝術·····	一五一
---------------------	-----

(2) 英吉利之權度法·····	一八二
------------------	-----

(3) 英格蘭商業學派之興起·····	一九四
---------------------	-----

(4) 英格蘭算術發展遲滯之原因·····	二一八
-----------------------	-----

(5) 算術教育之改造·····	二二五
------------------	-----

(6) 合衆國之算術·····	二二八
-----------------	-----

(7) 游戲問題·····	二三三
第二章 代數·····	二三八
(1) 文藝復興時代·····	二三八
(2) 最近之三世紀·····	二五〇
第三章 幾何與三角·····	二六〇
(1) 歐氏幾何之翻印先時之研究·····	二六〇
(2) 近世綜合幾何之開始·····	二六七
(3) 近世初等幾何·····	二七二
I 近世綜合幾何·····	二七三
II 近世三角與圓形之幾何·····	二七五
III 非歐几里得幾何·····	二八二
IV 初等幾何教科書·····	二九一

第四章 近日教育上之運動·····	三〇六
(1) 培里氏之運動·····	三〇七
(2) 國際算學會·····	三一三
(3) 美國算學會·····	三一七
(4) 研究算學可以鍛鍊智力之辨明·····	三二〇

初等算學史

第一編 上古時代

第一章 記數法與數目字

世界記數之法，時無論古今，殆皆以五進位，以十進位，或以二十進位。此其故不難知之。小兒初習算數，往往用及手指，甚至足趾。推之有史以前，未開化之野人，其利用手指，與足趾以計數，蓋無疑義。即今日之阿非利加人，伊士企摩人（Esimo），及南太平洋之島人（The South Sea Islander）亦皆實行利用其手指足趾者也。人之借助於手指，常由於手勢記數法多少之發達，若聾啞字母之類。手指記數之法，其流行之明徵，可於古時之埃及人，巴比倫人，希臘人，羅馬人間考得之，又可於中

世紀歐洲人間考得之；即在今日之東方諸民族間，亦皆可考得之也。華人之記數也，在十萬以內者，能以左手表之；其法以右手大指之指甲，遍觸左手小指之節，先起小指外邊，由下而上，次依中路，由上而下，次依內邊，由下而上，藉以表自一至九單位之數；同式表十位之數以無名指，百位之數以中指；千位之數以食指；萬位之數以大指。若欲推此記數之法，以表更多之數，祇需推及於右手斯可矣。而商界中人，磋商價值者，嘗用袖中之手，以通彼此之意，用避旁觀之目，亦可想見其術之普通為何如矣。

若人類手指之數，因人不同，則世界流行之記數法之進位，亦必隨在各異。設人類之一手多生一指，全數爲十二指，則文明各國記數進位之法，將不以十而以十二矣。若然，則必需特別數目字二，以代表十及十一焉。所不幸者，歷盡用算術之人類，實無第六指發生耳。然除需添二特別數目字及習乘法表必增至 12×12 外，十二進位法，實優於十進位法。何則，蓋十二含有整除數2, 3, 4, 6，而十祇有整除數2及5。在平常事務之間， $\frac{1}{10}$ 爲常用之分數，進位之根數爲2, 3，及4之整倍數，便利良多。對於十二進位法，討論提倡而最具熱心者，爲瑞典國王查理第十二（*Charles XII*），其薨

時，猶希望其統轄之境，改十進爲十二進。但此改變，究未能成爲事實耳。法蘭西之革命，一切舊時文物，堆翻無餘，獨此十進位法，非特無毫髮之變動，且較往時更加鞏固，亦足見其根深難撼矣。十二進位之便利，惜古時無有知之者，迨算術發達，至今已不可改矣。雖然，文明民族，其留有上古野蠻生活時蠢蠢之遺迹，又何止此一事耶。

人類依肢體之關係而創設之記數法，其五進位法及二十進位法常見於知識卑陋之種族，至知識較高之人民，則以前者進位之根太小，後者進位之根太大，俱避而不用，特擇其適中之十進位法而用焉。各族之人民，並非一致膠執於任何一種進位法。在五進位法中，5, 25, 125, 625 等數，應爲相連各位之單位，但如此五進位法所得之數，並未見諸實用。及其增至更多之數，每每變爲十進，或變爲二十進。亞美利加洲者，五進位法或二十兼五進位法之安宅也。其法實流行於其北冰洋區之伊士企摩種族，流行於北美洲印第安（Indian）種族之一大部分，且更流行於中美及南美焉。此等進位法，北西伯利亞人及非洲之多數種族亦用之。其遺迹也，並可於現用十進位法諸種族之文字中考得之；在詩人荷馬（Homer）之希臘文中，可見其例。而羅馬之記數法，如 I, II, ... V, VI,

...X, XI, ...XV 等等，亦表顯其遺迹者也。

所可異者，五進位之法，往往與二十進位之法相混合；蓋未開化之人，初以一手之指數爲其較高之單位，不足則繼以手指足趾之全數，爲其更高之單位。二十進位之法，其普通較遜於五進位之法，然二者不能純粹獨立則一也。在此法中，20, 400, 8000, 160000，爲初進四位之單位，並於猶夏 (Yucatan) 之馬耶人 (Mayas) 得確實考見其特別字體用以代表此等數者焉。阿芝特克人 (Aztec) 之進位法，即表示五進位法及二十進位法之遞嬗，次第列之，即 1, 2, 3, 4, 5, 5+1, ...10, 10+1, ...10+5, 10+5+1, ...20, 20+1, ...20+10, 20+10+1, ...40, 等等。有特別字體以表顯 1, 2, 3, 4, 5, 10, 20, 40, 等數。二十進位之法，盛行於美洲新大陸，但罕見於舊世界之歐洲。歐洲古族遺迹之此一端，可於法蘭西文字中見之，如 *quatre-vingts* 者，即表 4×20 或 80 也，*six-vingts* 者，即表 6×20 或 120 也，*quince-vingts* 者，即表 15×20 或 300 也。更考之於英文中之 *score* (十) 一字，在 *three-score years and ten* 句內者，亦有二十進位之意焉。

在人類所設之三個進位法中，要以十進位法爲最盛行，其盛行之程度，據古之傳說，實舉世界

之種族而皆用之。僅至近數世紀中，始知其他二個進位法有前人所未及知之種族曾採用之。十進位法，亦嘗用於北美印第安種之多數部落，但罕用於南美耳。

十進法之組成，蓋原於一手十指，數至十而暫停，因為第一次較高之單位。在 10 及 100 間之數，可以 $b(10) + a(1)$ 表之， a 及 b 為小於 10 之整數。但 110 可以兩式表之，一為 $10 \times 10 + 10$ ，二為 11×10 。然後式亦非勉強。而何以人之稱數，不仿效稱八十、九十等例，而稱一百一十以十一個十耶？於此 $10 \times 10 + 10$ 及 11×10 選擇之間，組成進位系統之樞紐，即在是矣。所幸者，世界各國表顯十進位之法，皆依前式；而表 100 以內之數，10 之一字，與最初之單位 1 受同等之待遇。數在 100 及 1000 之間者表之以 $c(10)^2 + b(10) + a$ ， a, b, c 為小於 10 之整數。仿此，數在 10,000 以下者，表之以 $d(10)^3 + c(10)^2 + b(10) + a(10)^0$ ，並依法可表更大之數。

進而解明各種記數之法，吾人端自巴比倫始。尖形字體，及附屬之記數法，殆為古之蘇美爾人 (Sumerian) 所發明。用豎尖劈  以表 1，而用 人  以表 10，及 𐎶  以表 100 及 1000 焉。數之小於 100 者，則各種記號之價值，依加法之例用之。如 𐎶𐎵 表 23，𐎶𐎶 表 30 是也。若然，則表大數者之記

號，常置於表小數者之左。但表百之倍數，則置表小數者於表 100 之前，用以乘 100。如 $\text{V} \text{V}$ 表 10×100 或 1000 是也。取此以爲新單位，則 $\text{V} \text{V}$ 者，依例解之，並非表 20×100 ，實表 10×1000 者也。此記數法之原理，乃利用加法及乘法而成。因此法所計之數，未見有過百萬者。此外，巴比倫尚有六十進位之一法，當於以後詳之。

埃及之記數法也，由商坡弄氏 (Champlin)，楊氏 (Young)，及其他學者解釋其象形文字而得之。其數目字，用 1 以表 1， 以表 10， 以表 100， 以表 1000， 以表 10,000， 以表 100,000， 以表 1,000,000，及  以表 10,000,000。考其數目字之形似，表 1 者狀若豎桿，表 10,000 者，若手指；表 100,000 者，若鳥；表 1,000,000 者，若受驚之人。至其他數目字所表之狀，則莫得而知。此等數目字，與其他象形文字同，皆顯然爲埃及人習見之動物及物件，蓋默示於人而取其形象焉。卽視爲圖畫之優美標本也可。其記數之理，全基於加法而成，如用  以表顯 III 者是也。

象形文字可於記念碑，方尖碑，及廟壁間見之。除此之外，埃及尚有宗教及人民兩類字體，諒皆

爲象形文字之變格，似由於使用久遠及希圖速寫之故而來者。今將宗教數目字列之以見其例：

[illegible]

因宗教一類數目之字多於象形一類數目之字，故凡數皆可由前一類之字以簡明之式表之。至其利用加法之理，則二者皆同，且表大數之字常居於表小數者之前焉。

約當梭倫 (Solon) 時代，希臘人嘗用指示數量形容字之起首字母以代表各種數目。此等記號稱為「赫洛德 (Herodianic) 記號」，蓋為紀元後二百年（約後漢獻帝建安五年）拜占庭

(Byzantium) 文士赫洛德 (Herodianus) 所考定者也。) 亦稱爲雅典 (Attic) 記號，因其常見於雅典文字中也。腓尼基人 (Phoenicians) 敘利亞人 (Syria) 及希伯來人 (Hebrews) 是時已有字母，敘利亞人與希伯來人則已用字母以表數。希臘人於紀元前五百年，(約東周敬王二十年) 始採用同式之步驟。希臘各字母，與古時之三字母 α, β, γ ，及 μ, ρ 字，皆用以表數，若 1 至 9，以 $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \epsilon, \zeta, \eta, \theta$ ，表之；十之倍數 10 至 90，以 $\iota, \kappa, \lambda, \mu, \nu, \xi, \omicron, \pi, \varrho$ 表之；百之倍數 100 至 900，以 $\sigma, \tau, \upsilon, \phi, \chi, \psi, \omega$ ， ϑ 表之；其餘表千之倍數以 $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \epsilon$ 等表 100,000 以 μ ；表 20,000 以 ν ；表 30,000 以 ξ 等等是也。夫由雅典記數法而變爲字母記數法，實見其變本加厲，蓋前法究較爲易記耳。吾人讀希臘文法，見其言表數目之字母，上加短撇，以別於尋常之字，但此並非通例；若加一平線於字母之上，亦常具同等之意義，至字母上加撇，乃用以表單位之分數，如 $\frac{1}{2}$ 是也。希臘人之記數，利用加法之理，及觀其用 μ 以表 50,000，則亦利用乘法之理矣。

羅馬之記數法，除加法之外，尙利用減法之理。若有二字母於此，前者表小數，後者表大數，則爲後者減去前者之意。如 $IV = 4$ ，與 $VI = 6$ 是也。雖此理不見於他種記數法，然有時見於他種數量文

字。如拉丁 (*Latin*) 字 *duodeviginti* = 20 減 2 或 18 是也。羅馬數目文字殆以伊特拉司坎 (*Etruscan*) 字爲其根源。

若巴比倫、埃及、希臘、羅馬及其他上古時之十進位記數法者，皆用少數記號以表數，此等記號或僅利用加法之理，或兼及於乘法或減法之理。但無一及於定位法緊要之理，如吾人今日之所用者。失此一端，古人卽失零號之用，故其距意想之記數法尙甚遠也。就此點言之，卽希臘、羅馬人亦始終未能成就，若近百年來始與歐人通問問之亞洲一遠國所成就之偉績，卽印度是也。未論印度之前，吾人須再論巴比倫之記數法，其進位之可異者，非五，非十，亦非二十，其用意甚近於意想原則爲其他種人所缺乏者，卽六十進位之記數法是也。

此法也，巴比倫人大半用之以組成重量及度量之數。其先之蘇買兒人，無論於整數分數，此六十進位法俱稱發達，實顯其數學之優異焉。此法得之於巴比倫之二冊葉。第一冊葉之紀年，殆爲紀元前一千六百年（商太戊三十八年），或紀元前二千三百年（唐堯五十八年），載自1至60平方之數。其最初七數，卽1, 4, 9, 16, 25, 36, 49也。其次則 $1 \cdot 4 = 8^2$, $1 \cdot 21 = 9^2$, $1 \cdot 40 = 10^2$, $2 \cdot 1 = 11^2$ 等