

高等学校教学用书

矿山岩体力学

冶金工业出版社

高等学校教学用书

矿山岩体力学

高磊等编

冶金工业出版社

高等学校教学用书
矿山岩体力学
高磊等编

冶金工业出版社出版
新华书店北京发行所发行
冶金工业出版社印刷厂印刷

787×1092 1/16 印张 20 7/8 字数 499 千字
1979 年 7 月第一版 1979 年 7 月第一次印刷
印数 00,001~9,200 册
统一书号: 15062·3419 定价 2.15 元

前 言

《矿山岩体力学》是根据一九七七年冶金工业部冶金高等院校教材会议制定的采矿专业教学计划编写的，是采矿和矿井建设专业的教材，亦可供有关的工程技术人员参考。

为了适应采矿工业的发展，必须加强对矿业科学基本理论的研究。矿山岩体力学则是矿业科学基本理论的主要组成部分。本书系统地阐述了岩体力学的基本理论，并密切地联系了矿山生产中的地压控制问题；既反映了比较成熟的理论，又适当地反映了国内外新的研究成果和先进的生产经验。

本教材由高磊、刘士渠、郑永学、林韵梅、陈新万、王泳嘉、肖庆生、张汉兴、李民庆、王文星等同志编写，高磊同志主编。

我们在编写教材工作中，得到童光照教授以及兄弟单位的许多同志的支持和指导，特此表示衷心感谢。

由于时间仓促，我们的水平有限，书中错误、缺点在所难免，诚恳地希望读者指正。

编 者

一九七八年五月

目 录

绪论	1
第一章 应力、应变及原岩应力	5
第一节 岩体内一点的应力状态	5
第二节 二向应力状态的分析	6
第三节 三向应力状态、广义虎克定律	14
第四节 二向应变状态的分析	21
第五节 平面应变测量(应变花)及主应力计算	26
第六节 平面应力与平面变形	29
第七节 岩体自重应力	34
第八节 岩体构造应力	35
第九节 原岩应力	41
第二章 岩体的力学性质	43
第一节 岩性与水对岩石力学性质的影响	43
第二节 岩石各种强度测定	48
第三节 岩石的变形特性	53
第四节 岩石强度理论	59
第五节 岩体的力学性质	67
第六节 岩体结构面的力学性质	72
第七节 地下水对岩体稳定性的影响	78
第八节 岩体分类	79
第三章 井巷地压	82
第一节 地压的概念	82
第二节 巷道围岩的应力分布	84
第三节 巷道地压的显现	91
第四节 巷道地压的计算	104
第五节 竖井地压	116
第六节 有限单元法在井巷地压问题中的应用	128
第七节 爆破对巷道稳定性的影响	132
第八节 喷锚支护原理及其参数计算	140
第九节 井巷维护原则	150
第四章 采场地压	154
第一节 概述	154
第二节 空场法的地压	155
第三节 充填法的地压	181
第四节 崩落法的地压	190

第五节	地压控制方法·····	209
第六节	深部地压·····	212
第五章	露天矿边坡稳定·····	216
第一节	概述·····	216
第二节	边坡破坏类型·····	216
第三节	影响边坡稳定的主要因素·····	219
第四节	边坡稳定的基本条件·····	223
第五节	边坡岩体结构分析·····	225
第六节	有限单元法在露天矿边坡稳定性分析中的应用·····	236
第七节	边坡稳定性计算·····	238
第八节	类比法·····	255
第九节	边坡滑坡的防治·····	260
第六章	地压观测与模拟方法·····	266
第一节	地压现场调查·····	266
第二节	围岩和支架压力测量·····	269
第三节	声测法·····	275
第四节	弹性波观测·····	279
第五节	光弹性模拟·····	285
第六节	光弹性应力计和应变计·····	294
第七节	相似材料模拟·····	303
第八节	应力解除法·····	307

绪 论

在以华国锋同志为首的党中央领导下，全国人民为在本世纪内把我国建设成为农业、工业、国防和科学技术现代化的伟大的社会主义强国，正在进行艰苦卓绝的辛勤劳动，一个科学技术发展的高潮正在到来。

要实现四个现代化，必须高速发展钢铁工业。而发展钢铁工业，又必须有足够数量的矿石。大力开发本国的资源，为冶金工业提供大量的矿石，是采矿工业光荣而艰巨的任务。

根据目前我国采矿工业的发展水平，要满足四个现代化的要求，必须在不太长的时间内，改建和新建相当数量的高度机械化、自动化的大型地下矿井和露天矿山。可以预计，由于广泛采用新型的高效率的大型采掘机械，必然引起开拓方式和回采工艺的巨大变革。地下和露天采场的规模越大，矿体和围岩的暴露面积也就越大；高强度回采，加快了年下降深度，就会很快转入深部开采。因此，如何安全有效地在岩体大面积暴露的条件下进行回采，以及如何解决深部开采的岩体稳定性等一系列问题就会相继出现。解决这些问题所涉及的科学技术领域是相当广泛的，而矿山岩体力学这门科学则是矿业科学的基础之一，因此，对于岩体力学课题的研究就显得更为重要。

矿山岩体力学是研究采矿活动所影响的那部分地壳内一切力学现象的科学。本书主要论述岩体在力场作用下，所发生的变形、破坏和移动的规律。具体地说，即重点论述露天边坡、坑内采场和巷道的稳定性问题。

岩体是矿山岩体力学的主要研究对象。研究矿山岩体力学，必须首先对岩体有一明确的认识。岩体是个地质体，它的形成过程延续了漫长的地质年代。在岩体形成和存在的整个地质历史中，它经受着各种地质构造力的作用。因此，即使是由相同物质组成的岩体，也会存在着差异，这就是岩体性质非常复杂的基本原因。

对岩体的认识可概括为以下几点：

(1) 岩体是非均质各向异性的。这一特点，是由于它的形成和存在均受地质构造力作用的结果。它大大增加了研究工作的复杂性。

(2) 岩体内存在着原始应力场，主要包括重力和地质构造力。重力场是以铅垂应力为主，构造应力场通常是水平应力为主。一般来讲，地壳内的应力以水平应力为主。土体内构造应力释放的比较彻底，故只存在重力场。这正是区别岩体与土体的基本特征之一。

(3) 岩体内存在着一个裂隙系统。岩体既是断裂的又是连续的，岩体是断裂与连续的统一体，可称之为裂隙介质或准连续介质。当岩体应力超过其强度时，就会使原有断裂进一步扩展，或形成新的断裂。而旧断裂的扩展与新断裂的形成，又均会导致岩体内的应力重新分布。

从上述特点可知，岩体既不是理想的弹性体，又不是典型的塑性体；既不是连续介质，又不是松散介质，而是一种特殊的、复杂的介质。若只沿用一般的固体力学理论，尚不能完善地解决它的一切问题。因此，岩体力学是一门新兴的边缘科学。它作为固体力学的一个分支，是本世纪五十年代才确立的，所以还很年轻。

岩体力学最早起源于采矿工程，开采矿床必须要在岩体中开挖各式各样的空间（如巷道、采场），这就破坏了岩体的自然平衡状态。未经开挖和采动影响的岩体，在原始应力场作用下，处于一种相对稳定状态，即自然平衡状态。当岩体被开挖和采动之后，由于采掘空间对岩体应力场的扰动，改变了岩体原始应力场的分布状态。岩体受到扰动后，新出现的应力场称为次生应力场。岩体在此新出现的不平衡的力场作用下，就要发生变形，甚至破坏和移动，一直达到新的平衡为止。

通常把次生应力场引起的岩体变形、破坏和移动的全过程称为矿山压力（简称地压）的显现。把地压显现中，某一阶段的具体表现称为地压现象。地压的显现从采矿工程开始开挖就出现，并贯穿于开采工程的全过程。所谓地压就是泛指岩体中存在的力（详见地压概念一节）。

地压显现给采矿工程带来了巨大的危害。在国内外的矿山中，各式各样的大小事故屡见不鲜。如，大型露天矿中几百万立方米的大滑坡，掩埋露天矿坑；采场顶板大冒落造成严重的伤亡；有的矿山由于岩体移动所造成的破坏，两年之后才恢复了原有的生产水平。甚至，有的矿山因岩爆引起的强烈破坏而被迫封闭矿井。这说明，克服地压危害对于发展采矿工业有着重要的意义。矿山岩体力学就是在与地压显现的危害作斗争的过程中产生和发展起来的。

虽然岩体力学最早起源于采矿工程，但迄今为止，在采矿工程中，人们还程度不同地忽视岩体力学的指导作用，只凭经验办事。诚然，经验是可贵的。尤其在目前，矿业科学技术还不成熟的时候，经验在指导生产上，仍起着十分重要的作用。但新技术、新工艺层出不穷，人们对矿业科学规律的认识也日趋深化。如果仍然只按经验办事，就会因片面性而失败。这方面的事例也是不胜枚举的。

例如，人们对利用支架防止围岩冒落的认识，就存在着片面性。××矿的一条基本巷道中，由于地压作用，厚度五百毫米的混凝土支架被压裂。施工人员认为，支架被破坏的原因是地压太大，原五百毫米的支架厚度还不够。故又在表层套了五百毫米厚的混凝土。结果，仍然无济于事。其实地压的大小是与支架的刚性有关的，支架的刚性越大，支架上所受的压力也越大。如果采用较薄的柔性支架，问题就解决了。金山店铁矿正是使用了二百毫米的喷射混凝土支架，使一条巷道通过了原来五百毫米钢筋混凝土支架都无法通过的大断层带，取得了多、快、好、省的掘进效果。

因此，矿山工程技术人员掌握岩体力学的知识，对采矿工业的发展将会起很大的促进作用。

岩体力学不仅与采矿工程有关，而且与水利、建筑、交通、国防等工程都有着极为密切的关系。在采矿工程方面，矿山岩体力学有其独特之处：（1）除采矿之外的其它部门，在岩体中挖掘的结构物多在地表或距地表几十公尺的范围之内。而采矿工程的地下结构物却多处于比较深的部位。虽然，我国多数矿山尚属浅部开采（通常以七百米为准，超过七百米的矿井属深部开采，超过一公里深度的矿井属超深矿井），但一般也多在距地表三、四百米的范围内，而且已有部分矿井属深部开采。深部岩体的动态与地表附近相比不大相同。地表附近的岩体一般是脆性断裂，而较深处则是粘塑性破坏。也就是说，地表附近的岩体是由于失去内聚力而破坏，其破坏往往是由裂隙的扩展所致。总的破坏形式是突发的；而地层深处岩体的破坏则是一定形式的流动变形。从初始应力状态来说，在浅部垂直

应力与水平应力之差可能很显著，在深部，其差却不甚明显。上述情况使得矿山岩体力学所采用的测试技术和计算方法有所不同。（2）对矿山的地下结构物，只要求其在开采期间不致破坏，在开采后能维持平衡状态不影响地表安全即可。所以，在计算精度、安全系数及岩体加固等方面的要求，一般均低于水利、国防等方面的标准。（3）由于矿山工程地质条件复杂，又受矿床赋存条件的限制，因此，采矿工程结构物的位置选择性不大。同时，采掘工作面均不断变化，所以，采矿工程岩体力学又有复杂的特点。

目前，我国采矿生产实践提出了一系列重大问题需要从矿山岩体力学中寻求答案。如：（1）特别困难条件下的井巷地压控制方法；（2）为了保证生产安全和最大限度地回收矿藏资源，寻求适应岩体应力特征和地压显现规律的合理开采顺序、采矿方法及其结构要素以及采场维护方法；（3）采空区处理问题；（4）防止地下开采所引起的滑坡及滚石危害问题；（5）地下开采对地表建筑物的影响及三下（水下、铁路及公路下、建筑物下）的安全开采问题；（6）露天矿合理边坡角的确定及不稳定边坡的加固等等。

将来进入深部开采之后，“岩爆”也将是非常突出而必须解决的问题。

矿山岩体力学的研究目的，主要在于总结生产实践中矿山压力显现的客观规律和控制方法，提出防止和消除地压危害的措施；研究利用地压落矿的方法，并以矿山岩体力学的理论为指导进行矿山设计、施工和生产，以便在安全、经济、高强度、高指标的原则下，最大限度地开采地下资源。

矿山生产中，对岩体力学提出的问题是很多的。这些问题有待利用岩体力学中一些基础理论问题的研究成果来解决。因此，加强岩体力学基础理论问题的研究，将有力地推动矿山生产能力的发展。根据目前的认识，岩体力学需要解决以下基础理论问题：（1）岩体物理状态（如裂隙、风化性、透水性等）的研究；（2）建立适应岩石特点的强度理论；（3）准确测定岩体的基本力学参数（弹性模量、泊松比、强度等）；（4）岩体变形、破坏和移动规律的研究；（5）关于岩体稳定性的研究，特别是结构面对岩体稳定性的影响；（6）岩体中应力状态的研究；（7）围岩与支架相互作用的问题；（8）高应力状态下岩石特性的研究；（9）岩体的动力特性；（10）模拟试验理论（相似理论）的研究；（11）弹性波在岩体中传播的规律；（12）岩体的分类等等。

岩体力学的研究方法是科学实验和理论分析相结合。二者互相联系又互相区别，前者为后者的基础。

科学实验的目的是：（1）确定岩体的物理力学参数，这是岩石试验中大量而普遍的工作。这项工作的直接目的是为工程服务的。同时，这些实验所积累的大量资料又是发展理论研究的基础。（2）测定岩体中的应力及支承结构物上的压力。（3）科学实验（包括实验室与现场实验，模拟研究与原型观测）是岩体力学理论形成和发展的坚实基础。一方面，岩体力学中概念和理论的产生总是以生产实践和科学实验为根据。另一方面，其概念与理论的发展需要生产实践和科学实验的检验和证实。例如，目前工程中所采用的岩石强度理论——库仑（C.A.Coulomb）强度理论，是在一定的试验成果基础上得出的，但进一步的科学实验表明这个理论是有条件的。（4）岩体力学的科学实验中，有一类工作，是以研究新的研究工具和发展研究技术为直接目的的。

目前，岩体力学正处于定性分析到定量分析的转化阶段。电子计算机的应用，为使用有限单元法解决岩体力学中的问题开辟了广阔的途径。科学技术的发展，也为现场测试技

术提供了新颖的手段。例如，利用声全息从地表探测坑内空区；利用全息摄影精确地监视边坡滑动；利用声波测视技术探测岩体结构面的产状、位置，确定高应力集中点，测定岩体主应力的大小和方向。在实验室研究方面，刚性三轴试验机的出现，对于全面揭示岩石的力学性质，取得了很有意义的成果。从刚性试验机上绘出的岩石全应力——应变曲线中发现，加载直线部分与卸载直线部分近似对称。这一新发现打破了过去一般认为岩石应力达到破坏强度以后，就会失去承载能力的陈旧概念。它表明岩石在破坏以后，虽然结构发生了变化，但没有完全失去承载能力。这一结论对于矿柱设计很有指导意义。例如，通常认为安全系数总是大于1的，而柱式充填法的矿柱计算中，依据上述结论把安全系数取为0.8，从而减少了矿柱尺寸。此外，还可从刚性试验机上岩石的破坏现象中去探讨“岩爆”的原因。

由此可见，矿山岩体力学的发展对促进采矿工业的发展具有十分重大的意义。我们可以满怀信心地指出，由于实现“四个现代化”的需要，随着各门科学技术发展的相互促进，我国在矿山岩体力学方面的研究工作将很快发展，从定性阶段进展到定量阶段，建立比较完整的独立体系，为矿业科学技术的发展奠定牢固的理论基础。

第一章 应力、应变及原岩应力

在绪论中已经指出：岩体力学是力学的一个分支，而矿山岩体力学则主要论述岩体在力场作用下所发生的变形、移动和破坏的规律，分析影响“地压”的各种因素，评价岩体的稳定性。这样，在学习和研究的过程中，必然需要一定的基础力学知识。因此，在本书的第一章，将介绍材料力学、弹性力学的一些知识，着重介绍应力分析和应变分析方面的内容。

另一方面，矿山岩体力学所研究的主要对象——岩体，其特点之一是：在岩体内存在着初始应力场。所以，本章在介绍应力分析及应变分析的基础上，也将讨论这种初始应力场，主要包括自重应力场及地质构造应力场。至于在岩体中开挖空洞后形成的次生应力场，以后将分别在有关章节中加以阐述。

第一节 岩体内一点的应力状态

一般说来，岩体内部不同的点，它们的应力是不同的。另外，对于岩体内部某一点来说，可以有不同方向的截面，不同截面上在该点的应力也是不同的。因此，要判断受力岩体的强度，就必须了解岩体内部各点的应力状态。所谓“一点的应力状态”就是指岩体受力后，通过某一点各个截面上的应力情况。研究通过不同点的不同截面上的应力情况，目的是判断岩体受力后在什么地方什么方向上最危险，并为岩体的强度计算提供条件。

为了研究岩体内某一点的应力状态，可以围绕着该点截取出一个微小的六面体，通常把它称为单元体。若将此单元体取得极其微小，那么在该单元体每个面上的应力都可以认为是均匀分布的，而且在相对两面上的应力是大小相等方向相反的，于是这六个面上的应力就代表通过该点的三个不同方向截面上在这一点上的应力。当知道了单元体的三个互相垂直平面上的应力后，单元体的任一斜截面上的应力都可以通过截面法来求出。这样，一点处的应力状态就完全确定了。因此，可以用单元体的三个互相垂直平面上的应力来表示一点处的应力状态。例如，在地表面下深度为 y 的 A 点处，沿平行于地表面的横方向和垂直于地表面的纵方向截取出一个单元体，如图1-1所示。该单元体在上部岩柱体的重量作用下，它上下两面受有垂直压应力 σ_y 。在垂直压应力 σ_y 的作用下，由于单元体受到周围岩石的约束不能自由变形，所以单元体不仅垂直方向有压应力 σ_y ，在侧向也受到压应力 σ_x 和 σ_z 的作用。显然，它是一个三向受压的应力状态。

在受力岩体内围绕某点截取单元体时，如果截取单元体各截面的方向不同，一般说来，各面上既有正应力又有剪应力。但在上例所取的单元体是一个特殊的单元体，其各面上只

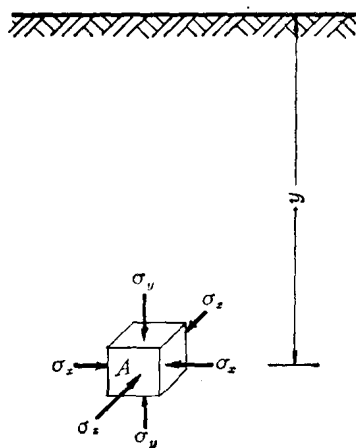


图 1-1 单元体上的应力

有正应力而无剪应力。凡是通过受力岩体的任一点所取的截面上，如果没有剪应力作用时，这个截面称为主平面。在主平面上作用着的正应力称为该点的主应力。理论证明^①，在受力岩体内任一点上，都可按其特定方向截取出三对互相垂直的主平面所包围的单元体。在此单元体上的三个主应力常用 σ_1 、 σ_2 和 σ_3 来表示，它们是按代数值的大小顺序排列的，即 $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$ 。举个例子来说，假若岩体中某点的三个主应力分别为500公斤/厘米²，200公斤/厘米²，-100公斤/厘米²，则 $\sigma_1 = 500$ 公斤/厘米²， $\sigma_2 = 200$ 公斤/厘米²， $\sigma_3 = -100$ 公斤/厘米² (图 1-2)。对于受力岩体中的任一点，过该点任何截面上的应力都可用其主应力来表示，因此主应力可以描述一点的应力状态。根据主应力等于零的情况不同，可将应力状态分为如下三种类型：

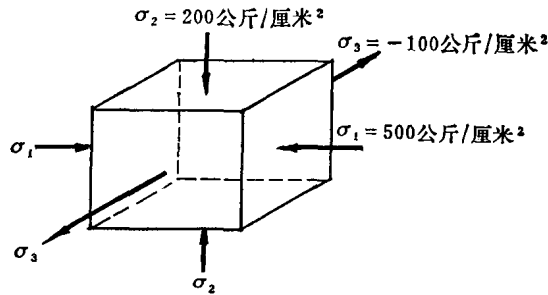


图 1-2 单元体上的主应力

1. 单向应力状态 在三个主应力中有两个为零，只有一个主应力不为零时，这种应力状态称为单向应力状态。例如，受轴向压缩的立柱，其中任一点均属于单向应力状态。

2. 二向应力状态 在三个主应力中有一个为零，有两个主应力不为零时，这种应力状态称为二向应力状态或平面应力状态。例如，梁受横力弯曲时，除上下边缘外，梁内任一点均属于二向应力状态。

3. 三向应力状态 三个主应力都不等于零时，称为三向应力状态或空间应力状态。图 1-1 所示的应力状态就属于这种情况。

第二节 二向应力状态的分析

在测定岩体应力时，常在岩体内沿 z 轴方向上打钻孔。如在孔底表面上任意一点截取一单元体 (图 1-3)，在它的四个侧面上作用着正应力和剪应力，而前后两面上没有任何应力作用 (因为孔底面为自由表面)。显然，它是二向应力状态。四个侧面上的正应力 σ_x 、 σ_y 和剪应力 τ_x 、 τ_y 的下脚标表明这些应力作用面的法线方向，如 σ_x 、 τ_x 即表示法线是 x 轴的面上的正应力和剪应力。

关于正应力 σ 的正负号，考虑到岩体的受力情况多为受压，因此，在岩体力学中一般规定：压应力为正，拉应力为负。图 1-3 中的 σ_x 、 σ_y 均为正。本书除特殊声明的地方以外，均按此规定。

① 证明见杜庆华等编著《材料力学》上册 § 7-7。

至于剪应力 τ 的正负号则作这样的规定：作用在单元体各面上的剪应力 τ 对于该单元体内任一点有逆时针转动趋向者为正，反之为负。图 1-3 中的 τ_x 为正， τ_y 为负。注意：这一规定只限于平面应力状态的情况。

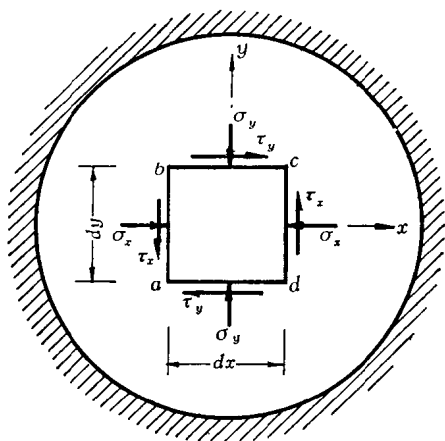


图 1-3 孔底表面的单元体

剪应力 τ_x 和 τ_y 在数值上是相等的，这一结论的正确性可以通过该单元体的平衡予以证实。以单元体右下角顶点 a 为力矩中心，可列出一个力矩平衡方程：

$$\sum M_a = 0, \tau_x dx dy - \tau_y dx dy = 0$$

得

$$\tau_x = \tau_y$$

这就是剪应力互等定理，即通过单元体的互相垂直平面上的剪应力大小相等，而符号相反（因为 cd 面的 τ_x 是正号，而 bc 面上的 τ_y 是负号）。

讨论了剪应力互等定理之后，下面将研究二向应力状态下单元体任意斜截面上的应力。在此基础上再讨论应力圆及主应力、主方向和最大剪应力。

一、斜截面上的应力

现在来分析如何根据单元体各面上的已知应力 σ_x 、 τ_x 和 σ_y 、 τ_y 来确定任意斜截面上的应力〔图 1-4(a)〕。斜截面 ef 的外法线 n 与 σ_x 间的夹角用 α 表示，并将此截面简称为 α 截面。在 α 截面上的应力用 σ_α 和 τ_α 表示。关于 α 角的正负号是这样规定的：从 σ_x 作用面（已知面）的外法线 x 逆时针转到 α 截面（未知面）的外法线 n 时， α 为正，反之为负。

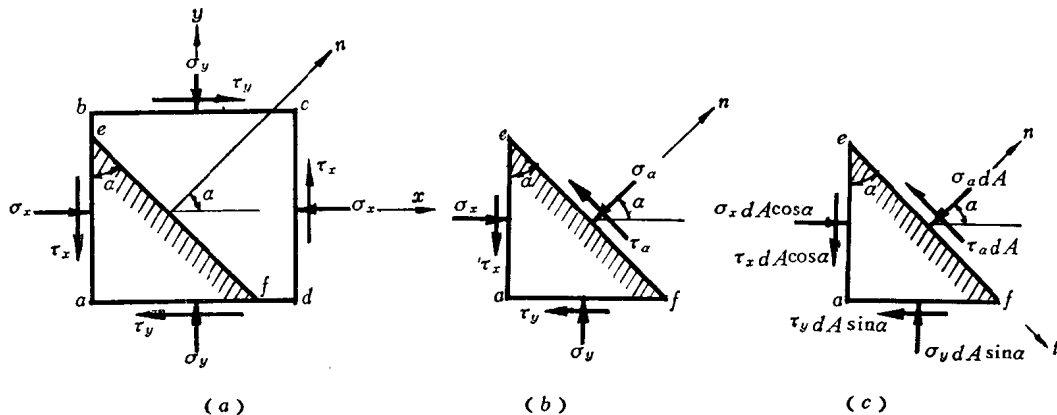


图 1-4 求斜截面上的应力

用斜截面 ef 假想地将单元体切开分成两部分，取出棱柱体 ae 作为分离体 [图 1-4(b)]。设单元体的厚度为 1，斜截面 ef 的面积为 dA ，那么 ae 和 af 两个面的面积将分别为 $dA \cos \alpha$ 和 $dA \sin \alpha$ 。取 α 截面的外法线 n 和切线 t 为参考轴，写出分离体 ae 上的诸力在 n 和 t 方向的平衡方程为 [图 1-4(c)]：

$$\sum n=0, -\sigma_x dA + (\sigma_x dA \cos \alpha) \cos \alpha - (\tau_x dA \cos \alpha) \sin \alpha + (\sigma_y dA \sin \alpha) \sin \alpha - (\tau_y dA \sin \alpha) \cos \alpha = 0$$

$$\sum t=0, -\tau_x dA + (\tau_x dA \cos \alpha) \cos \alpha + (\sigma_x dA \cos \alpha) \sin \alpha - (\tau_y dA \sin \alpha) \sin \alpha - (\sigma_y dA \sin \alpha) \cos \alpha = 0$$

利用剪应力互等定理 $\tau_x = \tau_y$ 代入上两式化简后得：

$$\sigma_\alpha = \sigma_x \cos^2 \alpha + \sigma_y \sin^2 \alpha - 2\tau_x \sin \alpha \cos \alpha$$

$$\tau_\alpha = (\sigma_x - \sigma_y) \sin \alpha \cos \alpha + \tau_x (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha)$$

再利用已知的三角函数关系：

$$2 \sin \alpha \cos \alpha = \sin 2\alpha$$

$$\cos^2 \alpha = \frac{1}{2} (1 + \cos 2\alpha)$$

$$\sin^2 \alpha = \frac{1}{2} (1 - \cos 2\alpha)$$

则上述两式可以化简为：

$$\sigma_\alpha = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\alpha - \tau_x \sin 2\alpha \quad (1-1)$$

$$\tau_\alpha = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\alpha + \tau_x \cos 2\alpha \quad (1-2)$$

当应力 σ_x 、 τ_x 和 σ_y 、 τ_y 已知时，即可利用公式 (1-1) 和 (1-2) 求得 α 截面上的应力 σ_α 、 τ_α 。这两个公式就是二向应力状态下斜截面上应力的计算公式。从公式可见，斜截面上的应力 σ_α 、 τ_α 将随着所取的斜截面方向，即 α 角的不同而改变。

二、应力圆

上面所讨论的是解析法，如用下面介绍的图解法（即应力圆）则更为便利。

由公式 (1-1) 和 (1-2) 可知， α 截面上的应力 σ_α 、 τ_α 都是随 α 角变化的连续函数。在直角坐标系中，若以 σ 为横坐标， τ 为纵坐标，则 α 截面上的应力 σ_α 、 τ_α 值可以用坐标上的一个点 $(\sigma_\alpha, \tau_\alpha)$ 来表示 (图 1-5)。 σ_α 、 τ_α 随 α 角的变化在图形上表现为一条连续曲线。在此曲线上可以清楚地看出单元体各个截面上应力之间的关系。现在就设法找出 $\sigma_\alpha = f(\tau_\alpha)$ 的关系式。

为此，将公式 (1-1) 改写成：

$$\sigma_\alpha - \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\alpha - \tau_x \sin 2\alpha \quad (1-1)'$$

再将式 (1-1)' 和式 (1-2) 的两边各自平方，然后相加，得：

$$\left(\sigma_a - \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_a^2 = \left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\alpha - \tau_x \sin 2\alpha\right)^2 + \left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\alpha + \tau_x \cos 2\alpha\right)^2$$

将上式等号右边展开并整理后得：

$$\left(\sigma_a - \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_a^2 = \left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_x^2 \quad (1-3)$$

这就是所要找的曲线方程式。对于所研究的单元体， σ_x 、 σ_y 和 τ_x 均为已知量，所以式(1-3)的右边是一个常量。不难看出，式(1-3)所代表的曲线是一个圆的方程式。此圆的圆心 C 在 σ 轴上，至坐标原点距离为 $\frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}$ ，圆的半径为 $\sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_x^2}$ ，这个圆称为应力圆或莫尔圆，如图1-6所示。圆上任一点 E 的坐标值即代表单元体上某一个 α 截面上的应力 σ_a 、 τ_a 。

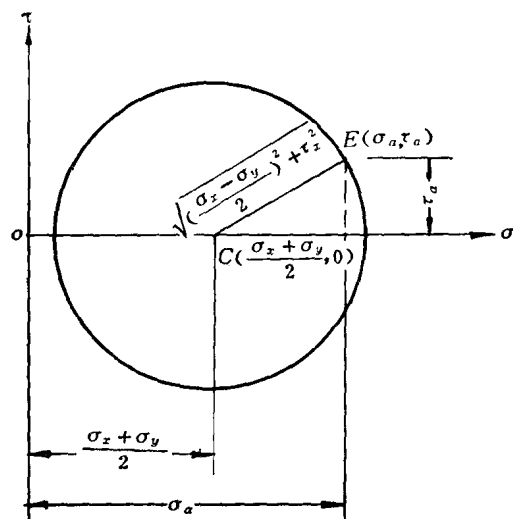


图 1-6 应力圆

如何根据单元体各面上的已知应力 σ_x 、 τ_x 和 σ_y 、 τ_y 〔图1-7(a)〕作出它所对应的应力圆呢？实际计算中，不是预先算出圆心位置和半径大小，而是直接根据单元体上的已知应力按下述步骤作出应力圆：

1. 取 σ - τ 直角坐标系，以 σ 为横坐标，向右为正；以 τ 为纵坐标，向上为正。
2. 根据单元体 cd 面及 bc 面上的已知应力 σ_x 、 τ_x 及 σ_y 、 τ_y ，在 σ - τ 坐标系中按选定的比例尺量取 $\overline{OB_1} = \sigma_x$ ， $\overline{B_1D_1} = \tau_x$ (τ_x 为正，故自横坐标向上量取)，即得 D_1 点；同理，量取 $\overline{OB_2} = \sigma_y$ ， $\overline{B_2D_2} = \tau_y$ (τ_y 为负，故自横坐标向下量取)，即得 D_2 点。
3. 联接 D_1D_2 直线与 σ 轴相交于 C 点(即 D_1D_2 的中点)。以 C 点为圆心， $\overline{CD_1}$ 或 $\overline{CD_2}$ 为半径作圆，即得与单元体对应的应力圆，如图1-7(b)所示。

上述作应力圆方法之正确性极易证明，因为这个圆的圆心在 σ 轴上，而且

$$\overline{OC} = \frac{1}{2}(\overline{OB_1} + \overline{OB_2}) = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}$$

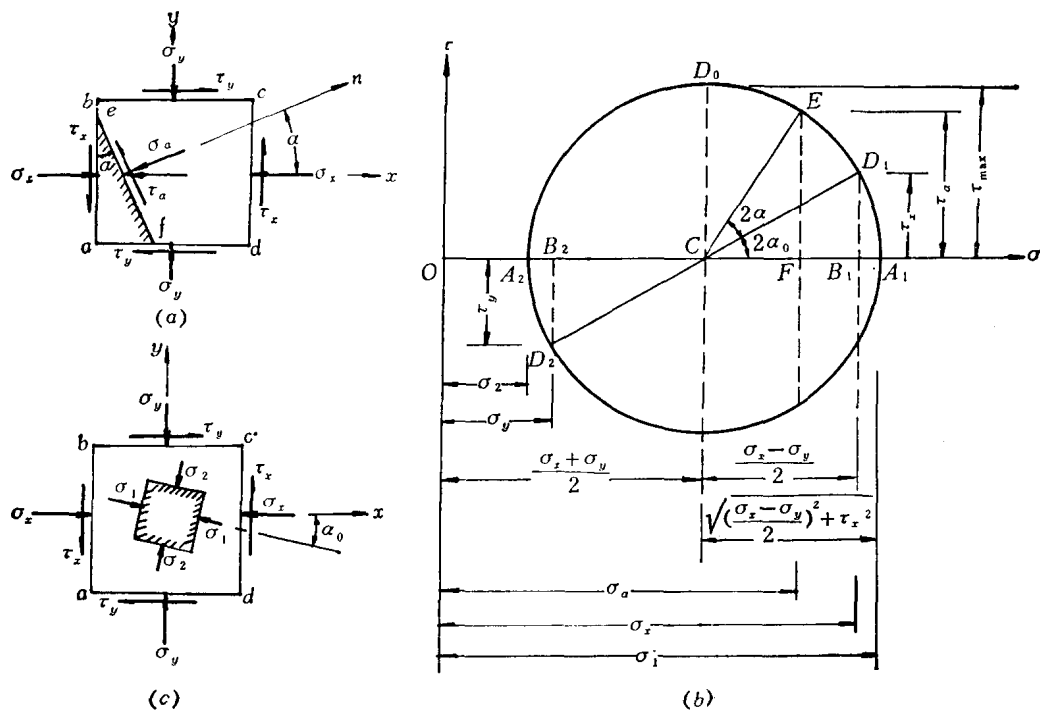


图 1-7 应力圆的作法

所以圆心到原点的距离为 $\frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}$

又因

$$\overline{CB_1} = \frac{1}{2}(\overline{OB_1} - \overline{OB_2}) = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}$$

$$\overline{B_1D_1} = \tau_x$$

所以这个圆的半径为

$$\overline{CD_1} = \sqrt{\overline{CB_1}^2 + \overline{B_1D_1}^2} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_x^2}$$

显然，这个圆的圆心位置和半径大小都符合应力圆的特点，因此这个圆就是所要作的应力圆。

从上述分析可知，应力圆上各点坐标值代表了单元体相应各面上的应力值，所以应力圆非常形象地显示了受力岩体内一点上各个方向应力的变化规律。为此，可以利用应力圆来求单元体任意斜截面上的应力。

用应力圆求任意斜截面上的应力，关键在于搞清楚单元体上的截面与应力圆上的点之间的对应关系，以及单元体上两个截面的外法线间的夹角与应力圆上圆心角的对应关系。从公式 (1-1) 及 (1-2) 可以看出：影响 σ_α 、 τ_α 变化的参变量是 2α ，所以应力圆上各点对应的参变量也是 2α 。这样，在单元体上两个截面外法线间的夹角如为 α 时，则应力圆上对应两点之间的圆心角应为 2α 。也就是说，应力圆上两点之间的圆心角是单元体对应两

截面外法线之间夹角的两倍。

如欲求图1-7(a)单元体 ef 斜截面上的应力 σ_α 、 τ_α ，可在该单元体上找一个已知面（如 cd 面）作为基准面，在应力圆上[图1-7(b)]与之对应的已知点 D_1 则为基准点；自基准面 cd （已知面）的外法线 x 转到 ef 截面（未知面）的外法线 n 是逆时针转 α 角，那么，在应力圆上应由基准点（已知点） D_1 按与 α 角相同的转向转动 2α 角得到 E 点（未知点），则 E 点就对应着单元体上的 ef 截面， E 点的横坐标和纵坐标分别代表 ef 截面上的应力 σ_α 和 τ_α 。证明如下：

$$\begin{aligned}\sigma_\alpha &= \overline{OF} = \overline{OC} + \overline{CF} = \overline{OC} + \overline{CE} \cos(2\alpha_0 + 2\alpha) = \overline{OC} + \overline{CE} \cos 2\alpha_0 \cos 2\alpha \\ &\quad - \overline{CE} \sin 2\alpha_0 \sin 2\alpha = \overline{OC} + (\overline{CD_1} \cos 2\alpha_0) \cos 2\alpha - (\overline{CD_1} \sin 2\alpha_0) \sin 2\alpha \\ &= \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\alpha - \tau_x \sin 2\alpha \\ \tau_\alpha &= \overline{EF} = \overline{CE} \sin(2\alpha_0 + 2\alpha) = \overline{CE} \cos 2\alpha_0 \sin 2\alpha + \overline{CE} \sin 2\alpha_0 \cos 2\alpha \\ &= (\overline{CD_1} \cos 2\alpha_0) \sin 2\alpha + (\overline{CD_1} \sin 2\alpha_0) \cos 2\alpha = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\alpha + \tau_x \cos 2\alpha\end{aligned}$$

上两式与公式(1-1)及(1-2)完全相同。

综上所述，可把用应力圆求单元体任意斜截面上应力所应注意的问题归结为下面两句话：

“点对应，先找基准。转向相同，夹角两倍。”

这里还必须注意哪个是基准面（已知面）与基准点（已知点），哪个是未知面与未知点，点对应的关系不要搞错。从基准点转到未知点的转向必须与基准面外法线转到未知面外法线的转向相同，而且基准点与未知点之间的夹角必须是基准面外法线与未知面外法线之间的夹角两倍。注意，二者转向相同，夹角两倍的关系也不要搞错。

三、主应力、主方向及最大剪应力

在上述讨论的基础上，可以用应力圆来确定二向应力状态下主应力的方向和大小，以及最大剪应力的数值。现分述如下：

1. 主应力 从图1-7(a)所示单元体对应的应力圆上[图1-7(b)]可以看出， A_1 及 A_2 两点的纵坐标都等于零，即在单元体内与这两点对应的截面上的剪应力为零，因此，这两点就是与单元体主平面对应的点。它们的横坐标 $\overline{OA_1}$ 及 $\overline{OA_2}$ 就分别代表了两个主平面上的主应力。如果这两个主应力都是正值，按主应力标号的规定，它们分别为 σ_1 和 σ_2 。而等于零的主应力则为 σ_3 。至于 σ_1 和 σ_2 的大小，可以从图1-7(b)中按比例尺直接量出。也可以从图中的几何关系得出它们的计算公式，即

$$\sigma_1 = \overline{OA_1} = \overline{OC} + \overline{CA_1} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_x^2} \quad (1-4)$$

$$\sigma_2 = \overline{OA_2} = \overline{OC} - \overline{CA_2} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_x^2} \quad (1-5)$$

2. 主方向 主应力的方向称为主方向，也就是主平面的法线方向。它可以由应力圆来确定。从图1-7(b)所示应力圆上的基准点 D_1 转至未知点 A_1 是顺时针转 $2\alpha_0$ 的圆心角，那么根据“转向相同，夹角两倍”的关系，在单元体上应由基准面 cd 的外法线顺时针转