GTM 研究生数学教材

# 工科研究生应用数学基础

闫大桂 严尚安 主编

CHEP
高等教育出版社

Springer
施普林格出版社

研究生数学教材

# 工科研究生应用数学基础

主编 闫大桂 严尚安

编者(按姓氏笔画排序):
付诗禄 闫大桂 余文革
余建民 严尚安 吴传志
但 琦 赵 静 蒋银华

CHEP
高等教育出版社

Springer
施普林格出版社

**图书在版编目(CIP)数据**

工科研究生应用数学基础/闫大桂 严尚安 主编. —北京:高等教育出版社;海德堡:施普林格出版社,2001.9

ISBN 7-04-010293-5

Ⅰ.工… Ⅱ.①闫… ②严… Ⅲ.应用数学-研究生-教材 Ⅳ.029

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2001)第 050282 号

**责任编辑**:徐　可　　**封面设计**:王凌波
**责任排版**:杨　明　　**责任印制**:陈伟光

工科研究生应用数学基础
闫大桂　严尚安　主编

| | | | |
|---|---|---|---|
| **出版发行** | 高等教育出版社　施普林格出版社 | | |
| **社　　址** | 北京市东城区沙滩后街 55 号 | **邮政编码** | 100009 |
| **电　　话** | 010-64054588 | **传　　真** | 010-64014048 |
| **网　　址** | http://www.hep.edu.cn<br>http://www.hep.com.cn | | |
| **经　　销** | 新华书店北京发行所 | | |
| **印　　刷** | 北京民族印刷厂 | | |
| **开　　本** | 787×1092　1/16 | **版　　次** | 2001 年 9 月第 1 版 |
| **印　　张** | 26.75 | **印　　次** | 2001 年 9 月第 1 次印刷 |
| **字　　数** | 660 000 | **定　　价** | 30.00 元 |

# 序

数学对于工程师们的重要性正在与日俱增.例如说20年前许多工程师还视为陌路的许多数学分支,例如群论,线性和非线性的泛函分析和数理统计等等,现在都成了工程师们很常见的工具了.特别是对有志于高技术的研究与应用的工程师们,更加是如此.有人指出过:高技术本质上是数学技术.因此,世界各国,莫不把加强数学的研究与教育作为增强综合国力的必不可少的步骤.财力充实的国家如美国更是计划大大增加投入,不仅是用于研究,而且也用于教育.当我们进入21世纪,从新世纪的高度来考察如何改革工程师的教育和培养时,如何加强数学教育自然成了众人注目的问题.近十年来,我国研究生教育发展极快,为了使他们有可能接受较充分的数学教育,数学课,按不同专业的不同要求,成了全国统一入学考试的科目,就是一个例证.

新的要求带来新的困难,首先,数学领域之广已经浩如烟海,而工程科学分门别类之多又非数学作为一门科学之可比.因而不同专业有不同要求,不同学校有不同着重,材料的取舍自然不同.这里既要考虑到数学科学本身是高度严整的,如果完全按照一时一校面临的具体要求选择教学内容,其实是无法组织教学的.因此,要用很大的努力,既考虑到学以致用,又照顾到数学本身的系统性,来精选教学内容,做到精炼紧凑、布局合理.本书根据自己院校专业的要求,以近世代数(或称为抽象代数)、泛函分析和数理统计为主,同时又较多地介绍了一些矩阵论的知识,在其它院校和其它教材中就不一定如此.有一些内容例如泛函分析中的谱论、广义函数;线性系统理论中的能控性与能观测性,属于更深入一层的内容,也略加介绍,显然是用了苦心的.

第二个问题是应该充分考虑其可接受性.目前工程专业的本专科大学生的数学课虽已有了加强,但是因为学习任务之繁重,而且多数学生目前还用不到十分深入的数学知识,因此本专科学生的数学教学与研究生的数学教学必然有一定的差别.能进入研究生阶段的学生究竟是少数.因此,一本好的研究生教材还必须为学习者补上必要的准备知识.例如本书中泛函分析的预备知识一部分,不但涉及通常在实变函数论中才介绍的测度与积分理论,还补充了一些本来属于数学分析的教学内容.近世代数基础一部分也有类似情况,看来作者们对这里可能遇到的

困难是有较充分准备的.

第三点是,无论数学知识对于工程科学如何重要,它究竟还是一种工具.因此,学以致用,把可应用性放在更重要的位置,以及由此而来的,适当强调计算机的应用,自然是一种必然的选择.

据我看来,本书在这三个方面下了工夫,都取得了相当的成绩.但是研究生教育的改革还处于方兴未艾之时,数学的发展也是一日千里.不断跟上时代的新要求,仍然是大家(不仅仅是本书的作者们)的共同的艰巨任务.

齐民友

2001年5月1日

# 前　　言

本书是根据国家教委制定的工科研究生数学课程基本要求，体现面向21世纪进行工科研究生数学教革精神，在总结我校研究生数学课程教改实践基础上编写而成的一本重点教材，是我校“三重”建设(重点院校、重点学科、重点实验室)的基础工作和重要成果.

全书共四篇十七章.主要介绍作为培养工科研究生现代数学素质基础的一些数学分支的基本内容和应用.内容包括近世代数基础、应用泛函分析、矩阵论、应用数理统计，全书约65万字.本书编写组由长期从事研究生数学课程教学的有较高学术造诣和丰富教学经验的专家、教授组成.本书酝酿于1995年全军工科研究生工作会议上，我们所作的“关于工科研究生数学课程改革和课程设置的探索”宣讲.会后，我们启动了我院工科研究生课程设置改革的工作，开设了“研究生数学基础”课程，编写了相应的教材讲义.通过几年的教学实践，对这些教材进行了不断的补充、修改和完善，终于形成本书现在的内容体系和形式.

本书的最大特色是将原来分属不同数学分支的数学内容经过精选和重组，形成一个新的有机结合的整体，内容丰富，突出了基础，强调了应用，讲述精练、紧凑，布局合理，避免重复，能以较短的教学时数(约120学时)完成繁重的研究生数学基础的教学任务.其次，本书的编写充分考虑了工科研究生的数学基础，只假定学生具有工科高等数学和线性代数的知识，便能完全理解和学好本书中有关的现代数学基本内容.对于学生在本科数学中未涉及的知识，书中在要用之前，先作必要的介绍和补充.因此本书自成体系，具有良好的教学可接受性.另外，本书是面向21世纪实施工科研究生教学改革的教材，教材内容体现学科内容的精髓，对于培养工科研究生现代数学素质的基础和进一步发展具有深远意义.教材内容力求反映学科发展的新水平和新发展，编者的一些有关的科研成果也在教材中得到了反映.例如具有对称核的线性积分方程求解的非零特征解法就是该问题研究的新成果.并且注重介绍有关的理论的应用和有关计算的计算机程序.因此，教材的科学性、实用性和探索性是本书的又一特色.全书各章配有较多例题和适当数量的习题并附有答案，各篇都列出了参考文献，对加深基本理论和方法的理解与自学提供了条件和方便.

本书的框架结构由闫大桂、严尚安负责，其中近世代数部分由付诗禄负责，应用泛函部分由闫大桂负责，矩阵论部分由余建民负责，应用数理统计部分由吴传志负责.第1、2、3章由付诗禄、蒋银华编写，第4、5章由严尚安编写，第6、7章由闫大桂编写，第8、10章由余建民编写，第9章由余文革编写，第11章由但琦编写，第12、13、14章由赵静编写，第15、16、17由吴传志编写.

本书受到著名数学家齐民友教授的亲切关怀和热情指导，并承其为本书作序.特在此表示衷心感谢!

在编写本书的过程中，得到了解放军后勤工程学院训练部、基础部领导的大力支持，研究生处李明军处长、数学教研室同事对本书提出了不少建设性的建议，在此深表谢意！

由于编者水平有限，加之时间仓促，本书中难免会有疏误之处，敬请各位批评指正.

编 者

2001 年 8 月 10 日

# 目　　录

## 第一篇　近世代数基础



## 第二篇　应用泛函分析

# 第三篇　矩阵论及其应用

# 第四篇　应用数理统计

# 第一篇　近世代数基础

抽象代数学是数学中最重要的、基础的分支之一，是在初等代数学的基础上产生和发展起来的.初等代数以数(整数、有理数、实数、复数等)及其运算作为研究对象，高等代数中我们研究了向量、矩阵及其运算，抽象代数主要研究代数结构，代数结构是以研究数字、文字和更一般元素的运算的规律和由这些运算适合的公理而定义的各种数学结构的性质为中心问题.它起始于19世纪初，形成于20世纪30年代.在这期间，挪威数学家阿贝尔(N.H.Abel)、法国数学家伽罗瓦(E.Galois)、英国数学家德·摩根(A.De Morgan)和布尔(G.Boole)等人作出了杰出贡献，特别是法国天才数学家伽罗瓦在研究困惑人类几百年的用根式求解五次方程时，在总结前人工作的基础上发现了群.荷兰数学家范德瓦尔登(B.L.Van Waerden)又根据德国数学家诺特(A.E.Noether)和奥地利数学家阿廷(E.Artin)的讲稿，于1930年和1931年分别出版了《近世代数学》Ⅰ卷和Ⅱ卷，标志着抽象代数的成熟.对一般集合上运算的研究可以大大拓宽数学研究的领域，为数学的广泛应用开辟了广阔的道路.它对现代数学如拓扑学、泛函分析等，以及一些其它科学领域，如计算机科学、编码理论等，都有重要影响和广泛的应用.

# 第 1 章　线性代数基础

线性代数是研究生应用数学的基础，它的基本概念、理论和方法，具有较强的逻辑性、抽象性和广泛的实用性；它的核心内容是研究有限维线性空间的结构.

## §1.1　线性空间

任何抽象概念都是在考察了大量具体事物所具有的共同性质的基础上形成的，线性空间的概念也是如此. 由于解线性方程组的需要，将二维平面上和三维空间中的向量推广成一般的 $n$ 维行向量和 $n$ 维列向量，而向量中的每个分量都是某数域 $K$ 中的数，将它进一步推广到更一般的集合，使其具有 $n$ 维行向量和 $n$ 维列向量的性质，那么，就有了线性空间.

### §1.1.1　线性空间的概念

**1. 线性空间的定义与性质**

线性空间是以向量空间 $\mathbf{R}^n$ 为具体模型推广产生的一般概念. 抽象地看，向量空间是一个在其中定义了加法和数乘两种运算的集合，并且满足一定的运算法则. 因而推广到一般，有

**定义 1**　设 $V$ 是一个以 $\alpha,\beta,\gamma,\cdots$ 为元素的集合，$F$ 是一个数域，在 $V$ 中定义运算，一种叫加法：$\forall\,\alpha,\beta\in V$，有 $\alpha+\beta\in V$；另一种叫数乘：任取 $k\in F,\alpha\in V$，有 $k\alpha\in V$，并且满足八条运算法则：

(1) 加法交换律：$\alpha+\beta=\beta+\alpha$.

(2) 加法结合律：$(\alpha+\beta)+\gamma=\alpha+(\beta+\gamma)$.

(3) $V$ 中存在零元素：$\exists\,\alpha_0\in V,\forall\,\alpha\in V,\alpha_0+\alpha=\alpha$，记 $\alpha_0=\mathbf{0}$.

(4) 负元素存在：$\forall\,\alpha\in V,\exists\,\beta\in V$，使 $\alpha+\beta=\mathbf{0}$，记 $\beta=-\alpha$.

(5) 数域 $F$ 中存在单位元：有数 $k_1\in F,\forall\,\alpha\in V,k_1\alpha=\alpha$，记 $k_1=1$.

(6) 数乘结合律：$(kl)\alpha=k(l\alpha)=l(k\alpha)$.

(7) 分配律：$(k+l)\alpha=k\alpha+l\alpha$.

(8) 分配律：$k(\alpha+\beta)=k\alpha+k\beta$.

则称 $V$ 为数域 $F$ 上的线性空间. $V$ 中元素称为向量. $F$ 为实(复) 数域时，称 $V$ 为实(复) 线性空间. 在无特别说明时，$F$ 为实数域 $\mathbf{R}$.

**例 1**　向量空间 $\mathbf{R}^n$ 为线性空间.

**例 2**　$V=\mathbf{R}^{m\times n}=\{A=(a_{ij})_{m\times n}\,|\,a_{ij}\in\mathbf{R}\}$，它在矩阵的加法和数乘矩阵运算下构成线性空间，称为实矩阵空间.

**例 3**　次数不超过 $n-1$ 次的关于 $x$ 的一切多项式构成的集合：

$$P_n[x]=\left\{\sum_{j=0}^{n-1}\alpha_i x^i\,\middle|\,\alpha_i\in\mathbf{R}\right\}$$

在通常多项式的加法和数乘运算下构成线性空间，称为多项式空间 $P_n[x]$.

值得注意的是,次数等于 $n$ 的多项式集合对于上述运算不再是线性空间,因为两个 $n$ 次多项式的和不一定是 $n$ 次多项式,这就是说次数等于 $n$ 的多项式集合对加法不封闭,而线性空间要求对加法和数乘都封闭.

**例4** $V = C[a,b] = \{f(x) \mid f(x)$ 是$[a,b]$上的连续函数$\}$对于函数的加法和数乘,由连续函数的性质,构成一个线性空间.

从上述例子可看出,线性空间是一个很广泛的概念,它能使许多常见的研究对象在线性空间的定义下,作为向量来研究.另外,在涵义上,加法是指在集合 $V$ 上的一个二元运算,数乘向量是数域 $F$ 中的数与集合 $V$ 的元素间定义的运算.其运算结果仍在集合 $V$ 中,并且分别具有和实数集合中数的加法、数乘类似的性质.

**例5** 取集合为正数集合 $\mathbf{R}^+$,$F$ 为实数域,加法 $\oplus$ 和数乘 $\circ$ 定义如下:

$$\oplus: \forall a,b \in \mathbf{R}^+, a \oplus b = ab; \qquad \circ: \forall k \in F, \forall a \in \mathbf{R}^+, k \circ a = a^k$$

在此定义下,$\mathbf{R}^+$ 构成一个线性空间,其中,加法的零元为 $\mathbf{R}^+$ 中的元素 1,$\mathbf{R}^+$ 中元素 $a$ 的负元素为 $a^{-1}$,数乘单位元为数域 $F$ 中的数 1.

线性空间具有如下简单性质:

(1) 线性空间 $V$ 的零元素唯一.

(2) 线性空间 $V$ 的任一元素的负元素唯一.

(3) 设 0 为数零,$\mathbf{0}$ 为 $V$ 的零向量,则

(a) $0 \cdot \boldsymbol{a} = \mathbf{0}$

(b) $k \cdot \mathbf{0} = \mathbf{0}\ (k \in F)$

(c) $k \cdot \boldsymbol{a} = \mathbf{0}$,则一定有 $k = 0$ 或 $\boldsymbol{a} = \mathbf{0}$

(d) $(-1)\boldsymbol{a} = -\boldsymbol{a}$

2. **子空间**

**定义2** 设 $V$ 是线性空间,$W$ 是$V$的非空子集合,$W \subset V$,若 $W$ 中所有元素关于$V$中的加法和数乘也构成一个线性空间,则称 $W$ 是 $V$ 的一个子空间.

**例6** 任何线性空间 $V$ 都有两个子空间,一个是它自身 $V \subseteq V$,另一个是 $W = \{0\}$,称为零元素空间.

**例7** 在线性空间 $\mathbf{R}^{n\times n}$ 中取集合

(1) $W_1 = \{A \mid A \in \mathbf{R}^{n\times n}, A^{\mathrm{T}} = A\}$,

(2) $W_2 = \{B \mid B \in \mathbf{R}^{n\times n}, |B| \neq 0\}$,

判断它们是否为子空间.

**解** (1) $\forall A \in W_1, k \in \mathbf{R}$, 因 $(kA)^{\mathrm{T}} = kA$, 所以, $kA \in W_1$, 又 $\forall A_1$、$A_2 \in W_1$, $(A_1 + A_2)^{\mathrm{T}} = A_1^{\mathrm{T}} + A_2^{\mathrm{T}} = A_1 + A_2$,所以

$$A_1 + A_2 \in W_1$$

即 $W_1$ 对 $\mathbf{R}^{n\times n}$ 的加法和数乘封闭.

又 $0 \in W_1$, $-A = (-1) \cdot A$,定义1中(3)、(4)满足.

由于 $W_1 \subset \mathbf{R}^{n\times n}$,可推出 $W_1$ 中元素加法、数乘也一定具有 $\mathbf{R}^{n\times n}$ 中元素所满足的性质,故定义1中其余法则对 $W_1$ 均成立,所以 $W_1$ 为 $\mathbf{R}^{n\times n}$ 的子空间.

(2) 因为 $0_{n\times n} \notin W_2$,所以 $W_2$ 不是线性空间,从而也不是 $\mathbf{R}^{n\times n}$ 的子空间.

**定理 1　设 $W$ 是线性空间 $V$ 的非空子集合，则 $W$ 是 $V$ 的一个子空间的充分必要条件是：**

**(1) 若 $\alpha,\beta \in W$，则 $\alpha+\beta \in W$.**

**(2) 若 $k \in F$，$\alpha \in W$，则 $k\alpha \in W$.**

**证**　必要性显然.

充分性. 设 $W$ 满足以上两条，要证明 $W$ 是 $V$ 的一个子空间只需验证它是否满足定义 1 中的 8 条运算法则.

因为 $W$ 是线性空间 $V$ 的非空子集合，故 $W$ 的元素也是 $V$ 的元素，因此，定义 1 中的运算法则(1)、(2)、(5)、(6)、(7)、(8) 自然成立，故只需考察(3)、(4) 两条运算法则.

因为 $k\alpha \in W$，取 $k=0\in F$，则

$$0\cdot\alpha = \mathbf{0} \in W$$

故 $W$ 中存在零元，从而运算法则(3) 成立.

又取 $k=-1\in F$，

$$(-1)\alpha = -\alpha \in W$$

故 $W$ 中负元素存在，从而运算法则(4) 成立. 所以，$W$ 是线性空间，从而是 $V$ 的一个子空间. □

由定理 1 可知，线性空间 $V$ 的非空子集合 $W$ 是 $V$ 的一个子空间的充分必要条件为 $W$ 关于 $V$ 中的加法和数乘封闭.

**例 8**　设 $V$ 是线性空间，$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 是 $V$ 中的一组向量，由它们的一切线性组合构成的集合：

$$L\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s\} = \left\{\alpha \,\middle|\, \alpha = \sum_{i=1}^{s} k_i\alpha_i, k_i \in F\right\}$$

是 $V$ 的一个子空间，称为由 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 生成的子空间.

**证**　显然 $L\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s\}$ 关于加法和数乘封闭，故由定理 1 可知，$L\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s\}$ 是 $V$ 的一个子空间.

**定理 2　设 $W_1,W_2$ 是线性空间 $V$ 的一个子空间，则有**

**(1) $W_1$ 与 $W_2$ 的交集 $W_1\cap W_2 = \{\alpha \mid \alpha\in W_1, \alpha\in W_2\}$ 是 $V$ 的子空间，称为 $W_1$ 与 $W_2$ 的交空间.**

**(2) 定义**

$$W_1+W_2 = \{\alpha \mid \alpha = \alpha_1+\alpha_2, \alpha_1\in W_1, \alpha_2\in W_2\}$$

**则 $W_1+W_2$ 是 $V$ 的子空间，称为 $W_1$ 与 $W_2$ 的和空间.**

**证**　显然 $W_1\cap W_2$，$W_1+W_2$ 关于加法和数乘封闭，故由定理 1 可知，$W_1\cap W_2$，$W_1+W_2$ 都是 $V$ 的子空间.

由定理 2 可知，$W_1\cap W_2$，$W_1+W_2$ 都是 $V$ 的子空间，那么 $W_1\cup W_2$ 是否也是 $V$ 的子空间呢？请看例 9.

**例 9**　设有 $\mathbf{R}^3$ 的子空间 $W_1 = L\{e_1=(1,0,0)^{\mathrm{T}}\}$，$W_2 = L\{e_2=(0,1,0)^{\mathrm{T}}\}$，$W_1\cup W_2$ 是否是 $\mathbf{R}^3$ 的子空间？

**解**　取 $e_1\in W_1$，$e_2\in W_2$，故 $e_1,e_2\in W_1\cup W_2$，但 $e_1+e_2=(1,1,0)^{\mathrm{T}}\notin W_1\cup W_2$，故 $W_1\cup W_2$ 不是关于加法封闭的，所以，$W_1\cup W_2$ 不是 $\mathbf{R}^3$ 的子空间.

### §1.1.2　线性空间的基、维数和坐标

由于线性空间是 $\mathbf{R}^n$ 的推广，因而可类似于 $\mathbf{R}^n$ 的情形定义向量组线性相关、线性无关、极

大线性无关组、等价等概念. 并可将 $\mathbf{R}^n$ 中向量与上述概念相关的性质、定理等结果平移到线性空间中. 故我们不再叙述,而将直接引用这些概念和结果.

1. **线性空间的基与维数**

**定义 3** 设 $V$ 是线性空间,若存在 $n$ 个线性无关的向量 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$,使空间中任一向量可由它们线性表示,则称 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 为 $V$ 的一组基. 基所含的向量个数 $n$ 为 $V$ 的**维数**,记为 $\dim V = n$,并规定零向量构成的空间 $\{\mathbf{0}\}$ 的维数为 0.

若 $V$ 的维数是有限的,则称 $V$ 是有限空间,否则就是无限空间. 例如所有实系数多项式就构成一个无限维空间,$1,x,x^2,\cdots$ 是它的一组基. 有限维空间和无限维空间在研究方法上有较大差别,这里只讨论有限维空间,为方便起见,将 $n$ 维线性空间 $V$ 记为 $V_n$.

**定理 3** **$n$ 维线性空间 $V_n$ 中任意 $n$ 个线性无关的向量都是 $V_n$ 的基.**

**证** 设向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 是 $n$ 维线性空间 $V_n$ 中任意 $n$ 个线性无关的向量. $\forall \beta \in V_n$,则 $\beta,\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 这 $n+1$ 个向量必线性相关,因而存在不全为零的常数 $k_0,k_1,\cdots,k_n$,使得

$$k_0\beta + k_1\alpha_1 + \cdots + k_n\alpha_n = \mathbf{0}$$

成立,$k_0$ 必不等于零,否则便有 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 线性相关,故得

$$\beta = -\frac{k_1}{k_0}\alpha_1 - \frac{k_2}{k_0}\alpha_2 - \cdots - \frac{k_n}{k_0}\alpha_n$$

由 $\beta$ 的任意性及基的定义知 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 是 $V_n$ 的一组基. □

**例 10** 求线性空间 $L\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots\alpha_s\}$ 的维数和基.

**解** 设向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 的秩是 $r$,不妨设 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 是它的一个极大线性无关组,则 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 线性无关,并且

$$\alpha_j = \sum_{i=1}^{r} l_{ji}\alpha_i, \quad j = 1,2,\cdots,s$$

又 $\forall \alpha \in L\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s\}$,

$$\alpha = \sum_{j=1}^{s} k_j\alpha_j = \sum_{j=1}^{s} k_j\Big(\sum_{i=1}^{r} l_{ji}\alpha_i\Big) = \sum_{i=1}^{r}\Big(\sum_{j=1}^{s} k_j l_{ji}\alpha_i\Big)$$

即 $L\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s\}$ 中任一元素都是 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 的线性组合,即 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 是 $L\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s\}$ 的基. 故 $L\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s\}$ 的基是 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 的极大无关组,其维数是 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 的秩.

2. **坐　标**

当 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 是 $n$ 维线性空间 $V_n$ 的一组基时,$V_n$ 中任一向量 $\alpha$ 可由 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 唯一线性表示,因此有

**定义 4** 设 $\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n\}$ 是 $n$ 维线性空间 $V_n$ 的一组基,$\alpha \in V_n$,有

$$\alpha = \sum_{i=1}^{n} x_i\alpha_i = (\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \tag{3}$$

则数 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 称为 $\alpha$ 在基 $\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n\}$ 下的坐标,向量 $(x_1,x_2,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}$ 为 $\alpha$ 的坐标向量.