

高等学校教材

高等数学

(第二版)

下 册

西安交通大学高等数学教研室编

高等教育出版社

本书是西安交通大学高等数学教研室在《高等数学》(1979年版)下册(第一分册和第二分册)的基础上修订而成。本版按照高等工业院校高等数学教学大纲,对原书内容作了适当精简,体系上作了一些调整,还补充了一些综合题。全书分上下两册,下册主要内容有向量代数、空间解析几何、多元函数微积分学及其应用、微分方程、傅里叶级数和傅里叶积分等。

本书通俗易懂,例题选取适当,习题也较丰富,便于教学和自学。可供工院校各专业作教材使用。

本书由华中工学院陆传务教授、林化夷副教授初审,大连工学院肖义珣教授复审,最后由工科数学教材编审委员会审定为高等工业院校《高等数学》课程的教材。

高等学校教材
高等数学
(第二版)
下 册

西安交通大学高等数学教研室编

*

高等教育出版社出版
新华书店北京发行所发行
朝阳区展望印刷厂印装

*

开本 850×1168 1/32 印张 17 字数 411,000

1979年9月第1版 1986年2月第2版 1986年3月第1次印刷

印数 00,001—9,600

书号 13010-01186 定价 2.85 元

目 录

第八章 向量代数	1
§ 1 向量.....	1
1-1 向量概念及其线性运算.....	1
1-2 向量在空间有向直线上的投影.....	5
1-3 空间直角坐标系.....	7
1-4 向量的坐标.....	9
1-5 用向量表示点的位置——向径.....	15
§ 2 向量的乘法.....	19
2-1 向量的数量积.....	19
2-2 向量的向量积与混合积.....	22
第九章 曲面与空间曲线	34
§ 1 平面与空间直线.....	34
1-1 平面的方程.....	34
1-2 空间直线的方程.....	40
1-3 交角、点与平面之间的距离.....	43
§ 2 曲面与空间曲线.....	51
2-1 曲面与空间曲线的方程.....	51
2-2 柱面、锥面、旋转面.....	55
2-3 空间曲线在坐标面上的投影.....	61
§ 3 二次曲面.....	63
§ 4 空间曲线的参数方程.....	69
4-1 参数方程概念、螺旋线.....	69
4-2 空间曲线的切线和法平面.....	73
4-3 空间曲线的弧长.....	77
附录 ²⁾ 曲面的参数方程.....	83
第十章 多元函数微分法及其应用	85

§ 1 多元函数的极限与连续	85
1-1 多元函数	85
1-2 二元函数的极限与连续	90
§ 2 多元函数的导数与微分	96
2-1 偏导数与它的几何意义	96
2-2 全微分	102
2-3 全微分在近似计算中的应用	107
2-4 方向导数	110
§ 3 复合函数与隐函数的微分法	115
3-1 多元复合函数的微分法	115
3-2 隐函数的微分法	124
§ 4 曲面的切平面与法线	131
4-1 曲面的切平面与法线	131
4-2 函数 $z=f(x, y)$ 的全微分的几何意义	135
§ 5 多元函数的最大、最小值问题	137
5-1 多元函数的极值	137
5-2 多元函数的最大、最小值问题	141
5-3 条件极值	144
§ 6 多元函数的泰勒公式	151
6-1 二元函数的二阶泰勒公式	151
6-2 带有拉格朗日余项的二元函数的 n 阶泰勒公式	155
附录 极值充分条件的证明	162
第十一章 重积分及其应用	165
§ 1 重积分的概念及性质	165
1-1 物体质量的计算	165
1-2 重积分的概念	168
1-3 重积分的性质	171
1-4 二重积分的几何意义	172
§ 2 二重积分的计算法	174
2-1 直角坐标系中二重积分的计算法	174
2-2 极坐标系中二重积分的计算法	185

*2-3	曲线坐标系中二重积分的计算法	191
§ 3	曲面的面积	199
§ 4	三重积分的计算法	205
4-1	直角坐标系中三重积分的计算法	205
4-2	柱面及球面坐标系中三重积分的计算法	211
*4-3	曲线坐标系中三重积分的计算法	216
§ 5	重积分在物理中的应用	217
5-1	区域函数及其对域的导数	218
5-2	微分与积分的关系在二重积分中的体现	220
5-3	重积分在力学上的应用	223
* § 6	广义重积分	234
6-1	无界函数的广义二重积分	235
6-2	无界区域的广义二重积分	237
* § 7	含参变数的积分	239
7-1	含参变数的积分的概念	239
7-2	函数的一致连续性	240
7-3	含参变数的积分的性质	241
* § 8	含参变数的广义积分	247
8-1	含参变数的无穷限积分的一致收敛性	247
8-2	含参变数的无穷限积分的性质	248
第十二章	线积分、面积分及场论	255
§ 1	第一型线积分和面积分	255
1-1	第一型线积分	255
1-2	第一型面积分	263
§ 2	第二型线积分和面积分	266
2-1	第二型线积分的定义与性质	266
2-2	第二型线积分的计算法 两型线积分的联系	272
2-3	第二型面积分的定义与性质	277
2-4	第二型面积分的计算法 两型面积分的联系	281
§ 3	各类积分的联系	285
3-1	平面线积分与二重积分的联系——格林公式	285

3-2	曲面积分与三重积分的联系——奥斯特洛格拉特斯基公式	289
3-3	空间线积分与面积分的联系——斯托克斯公式	292
§ 4	线积分与路径无关问题	296
4-1	平面线积分与路径无关的问题	296
4-2	二元函数全微分的求积问题	305
4-3	空间线积分与路径无关问题	310
§ 5	场论	315
5-1	数量场与向量场	315
5-2	数量场的梯度	318
5-3	向量场的通量与散度	326
5-4	向量场的环量与旋度	335
5-5	无旋场和无源场	341
第十三章	微分方程	353
§ 1	一阶微分方程	353
1-1	基本概念	353
1-2	一阶方程及其解的几何意义	359
1-3	可分离变量的一阶方程	361
1-4	全微分方程	366
1-5	一阶线性微分方程	372
1-6	一阶微分方程应用举例	379
1-7	微分方程的幂级数解法	387
1-8	一阶方程的近似解法	388
§ 2	高阶微分方程	392
2-1	可降阶的方程	392
2-2	线性微分方程	395
2-3	线性齐次方程解的性质及其求法	397
2-4	非齐次方程解的结构及其求法	402
2-5	常系数线性齐次方程的特征方程解法	406
2-6	常系数线性非齐次方程特解的待定系数解法	410
2-7	二阶微分方程应用举例	419
*2-8	满足边界条件的微分方程	432

* § 3 微分方程组简介	434
3-1 一阶微分方程组及其与高阶微分方程的关系	434
3-2 首次积分与对称型微分方程组	440
第十四章 傅里叶级数与傅里叶积分	449
§ 1 傅里叶级数	450
1-1 三角函数系的正交性	450
1-2 欧拉-傅里叶公式 傅里叶级数	452
1-3 傅里叶级数的收敛问题	454
1-4 偶或奇函数的傅里叶级数	457
§ 2 傅里叶级数的其他形式	460
2-1 任意区间的傅里叶级数	460
2-2 傅里叶正弦、余弦级数	463
2-3 复数形式的傅里叶级数	466
* § 3 傅里叶积分与傅里叶变换	471
3-1 傅里叶积分	471
3-2 傅里叶积分的其他形式	475
下册综合题	482
答案	485

第八章 向量代数

这一章我们要介绍向量概念及其各种代数运算法则。这些内容不仅是学习多元函数微积分不可缺少的基础，而且也是数学其它各分支以及力学、电学等各部门自然科学中的常用工具。

§1 向 量

1-1 向量概念及其线性运算

在中学物理里，我们已经知道物理量有两种：一种是只具有大小的量，叫做**数量**（或**标量**），如时间，温度，功，能等等；一种是不仅具有大小而且还有方向的量，叫做**向量**（或**矢量**），如速度，力，电场强度等等。在中学物理里我们还知道，向量在几何上都可以用带箭头的一定长短的线段来表示。如果一个向量的起点与终点分别记作 A 与 B ，那末这一向量便记作 \overrightarrow{AB} 。为简便起见，一个向量往往只用一个字母加上箭号，如 \vec{a} 表示。在书刊中，通常用黑体字母而省去箭号，如 \mathbf{a} 。

向量的长度称为向量的**模**（或**绝对值**），记作 $|\mathbf{a}|$ 或 $|\overrightarrow{AB}|$ 。模等于 1 的向量称为**单位向量**。模等于零的向量称为**零向量**，记作 $\vec{0}$ 或 $\mathbf{0}$ 。零向量的方向不定。

因为在许多几何学与物理学的问题中所遇见的向量常常与起点无关，所以我们把方向相同，长度相等的向量都看作相等。这种向量，称为**自由向量**。自由向量可以在空间自由平行移动。也就是说，自由向量的起点可以放在任意一点的位置上。在本书中，今后如不加特别申明，所说的向量都是指自由向量。

向量的加减法 在中学物理的力学部分，我们已经知道有所谓力的合成的平行四边形法则。设 P_1 与 P_2 是作用于某一物体而互不平行的两个力，那末它们的合力 R 就是以 P_1 与 P_2 为邻边所作出的平行四边形的对角线向量（图 8.1(a)）。根据平行四边形的性质，我们也可以这样作出 R ：把 P_2 的起点移至 P_1 的终点，于是由 P_1 的起点到 P_2 的终点的向量便是 R （图 8.1(b)），称此为三角形法则。

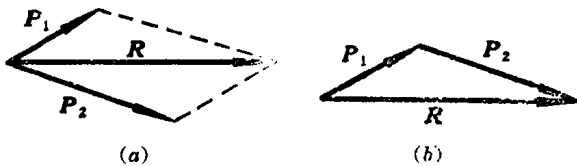


图 8.1

在这个基础上，我们来定义向量的加法。

定义 两个向量 a 与 b 的和，记作 $a+b$ ，就是把 b 的起点移至 a 的终点后，由 a 的起点到 b 的终点的向量。

根据这个定义，可知向量的加法满足交换律与结合律（见图 8.2）①：

$$a+b=b+a;$$

$$a+(b+c)=(a+b)+c.$$

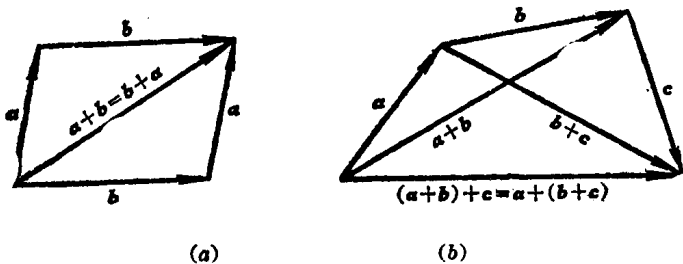


图 8.2

① 注意在图 8.2(b)中， a, b, c 三个向量不一定在同一个平面内。

定义 两个向量 a 与 b 的差, 记作 $a-b$, 就是另一个与 b 相加后等于 a 的向量. 如果把 a 与 b 的起点放在一起, 那末 $a-b$ 就是由 b 的终点到 a 的终点的向量(图 8.3).

这样, 对于每一个向量 a , 有 $a-a=0$. 0 与 a 的差: $0-a$ 是与 a 大小相等而方向相反的一个向量, 记作 $-a$, 称为 a 的逆向量. 这样就有

$$a-b = a + (-b).$$

换句话说, 减去一个向量等于加上这个向量的逆向量.

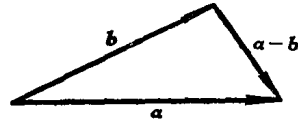


图 8.3

数与向量的乘法 如果我们把 n 个相等的向量逐个相加, 那末, 根据向量加法的定义, 所得的和:

$$a + a + \cdots + a$$

应该是一个模等于 $n|a|$ 而方向依旧不变的向量, 可记作 na . 把这个观念推广, 我们就有了向量与数的乘法.

定义 一个向量 a 与数 λ 的乘积, 记作 λa 或 $a\lambda$, 是模等于 $|\lambda||a|$ 的另一个向量, 它的方向当 $\lambda > 0$ 时与原向量相同, 当 $\lambda < 0$ 时与原向量相反.

根据定义, 利用平面几何的知识容易证明, 这种乘积满足下列结合律与分配律:

$$\lambda(\mu a) = (\lambda\mu)a;$$

$$(\lambda + \mu)a = \lambda a + \mu a;$$

$$\lambda(a + b) = \lambda a + \lambda b.$$

例如对于第三式, 由图 8.4, 利用相似三角形的对应边成比例这个性质, 就可证明.

设 a^0 是方向与 a 相同的单位向量, 那末 根据数与向量的乘法我们可以把 a 写成:

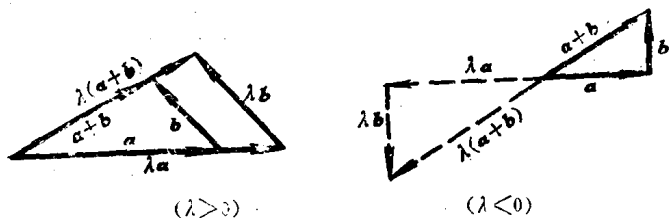


图 8.2

$$a = |a| a^0 \text{ 或 } a^0 = \frac{a}{|a|}. \quad (8-1)$$

向量的加减法及数与向量的乘法总称为向量的线性运算.

练习 8-1-1

1. 什么叫数量? 什么叫向量? 试各举二实例说明.
2. 什么叫向量的模? 什么叫单位向量? 什么叫零向量?
3. 回答下列问题:

(1) 向量 a 与向量 b 有共同的起点, 当向量 a 旋转 $\frac{\pi}{4}$ 后, 恰巧与向量 b 重合, 问 $a=b$ 吗? 为什么?

(2) 力 F_1 与力 F_2 同时作用于静止物体的一点 P 上, 力 F_1 拉物体向东, 力 F_2 拉物体向西, 而物体仍处于静止状态, 假设地面与物体没有摩擦力, 问 $F_1=F_2$, 对吗? 又 $|F_1|=|F_2|$, 对吗?

(3) 从 $a=b$ 是否可以得出 $|a|=|b|$? 反过来, 从 $|a|=|b|$ 是否可以得出 $a=b$?

4. 向量 $a, b, a+b$ 能否构成一个三角形? 向量 $a, b, a-b$ 能否构成一个三角形? 如果向量 a, b, c 满足条件 $a+b+c=0$, 它们能否构成一个三角形?

5. 向量 a 和 b 必须满足什么条件时, 向量 $a+b$ 才能平分 a 与 b 之间的夹角.

6. 证明: (1) $|a+b| \leq |a| + |b|$; (2) $||a| - |b|| \leq |a-b|$.

7. 向量的加法运算满足什么规律? 向量与数量的乘法又满足什么规律? 化简下列各式, 并指出每步运算的根据:

$$(1) a+2b-(a-2b); \quad (2) (a-b)+5\left(-\frac{1}{2}b+\frac{b-3a}{5}\right).$$

8. 设 $|\mathbf{a}|=1, |\mathbf{b}|=2, \mathbf{a}$ 与 \mathbf{b} 的夹角为 60° . 试求:

(1) $|\mathbf{a}+\mathbf{b}|$;

(2) $|\mathbf{a}-\mathbf{b}|$;

(3) $\mathbf{a}+\mathbf{b}$ 与 \mathbf{a} 的夹角;

(4) $\mathbf{a}-\mathbf{b}$ 与 \mathbf{a} 的夹角;

(5) $|4\mathbf{a}-2\mathbf{b}|$;

(6) $4\mathbf{a}-2\mathbf{b}$ 与 \mathbf{a} 的夹角.

(所有夹角取锐角.)

1-2 向量在空间有向直线上的投影

在上一小节中所讨论的向量及其线性运算都是从几何上来定义的. 为了用解析的方法来研究向量, 正象点的坐标那样, 我们需要引入向量的坐标概念. 为此, 首先讨论向量在空间有向直线上的投影.

我们先来规定空间两条有向直线之间的夹角.

如果两条直线相交, 它们必在同一平面内, 我们就把两有向直线正向之间不大于 π 的角作为有向两直线的夹角.

如果两条直线不相交, 可取空间中任意一点 A , 过 A 作两条有向直线, 分别与已知直线平行且同向, 我们就把这两条相交于 A 的直线的夹角作为两条已知直线的夹角.

设空间中给定向量 $\mathbf{a} = \overrightarrow{AB}$ 以及一条有向直线 L , 过 \mathbf{a} 的两端点, 分别作与 L 垂直的平面 p 与 q , 与 L 相交于 A' 和 B' (图 8.5), 我们用记号 a_L 表示向量 \mathbf{a} 在有向直线 L 上的投影, 定义如下:

$$a_L = \begin{cases} |\overrightarrow{A'B'}|, & \text{当 } \overrightarrow{A'B'} \text{ 与 } L \text{ 同方向时,} \\ -|\overrightarrow{A'B'}|, & \text{当 } \overrightarrow{A'B'} \text{ 与 } L \text{ 反方向时.} \end{cases} \quad (8-2)$$

即 a_L 等于 L 上有向线段 $A'B'$ 的值, 它是一个数量. 在本书中有时也把 a_L 记作 $(\mathbf{a})_L$.

类似于平面解析几何, 在空间也有两条投影定理.

定理一 设向量 \mathbf{a} 与有向直线 L 的夹角为 α , 则 \mathbf{a} 在 L 上的投影为

$$\boxed{a_L = |\mathbf{a}| \cos \alpha} \quad (8-3)$$

证 过 A 作与 L 平行且同向的有向直线 L' , 与平面 q 交于 B'' (图 8.5), 于是 \mathbf{a} 与 $\overrightarrow{AB''}$ 在同一平面内, 由于平面 q 与 L 垂直, 也与 L' 垂直, 从而 q 上的直线 BB'' 也与 L' 垂直, 若 $0 \leq \alpha < \frac{\pi}{2}$, 则 $\cos \alpha > 0$, 由(8-2),

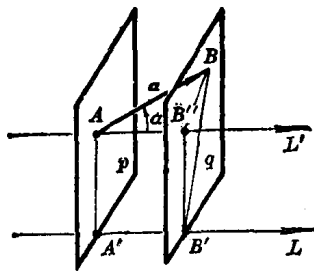


图 8.5

$$a_{L'} = |\overrightarrow{AB''}| = |\mathbf{a}| \cos \alpha,$$

若 $\frac{\pi}{2} \leq \alpha \leq \pi$, $\cos \alpha \leq 0$, 由(8-2),

$$a_{L'} = -|\overrightarrow{AB''}| = -|\mathbf{a}| \cos(\pi - \alpha) = |\mathbf{a}| \cos \alpha.$$

显然, $a_{L'} = a_L$, 这就证明了(8-3)式.

定理二 有限个向量的和在有向直线 L 上的投影等于各个向量在 L 上投影的和, 即

$$\boxed{(\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2 + \cdots + \mathbf{a}_n)_L = (\mathbf{a}_1)_L + (\mathbf{a}_2)_L + \cdots + (\mathbf{a}_n)_L} \quad (8-4)$$

证 由图 8.6, 容易看到

$$\begin{aligned} (\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2)_L &= \overrightarrow{(A_1 A_2 + A_2 A_3)}_L \\ &= \overrightarrow{(A_1 A_3)}_L \\ &= A'_1 A'_3, \\ (\mathbf{a}_1)_L + (\mathbf{a}_2)_L &= \overrightarrow{(A_1 A_2)}_L + \overrightarrow{(A_2 A_3)}_L \end{aligned}$$

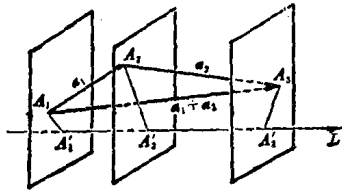


图 8.6

$$= A_1' A_2' + A_2' A_3' = A_1' A_3',$$

所以 $(\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2)_L = (\mathbf{a}_1)_L + (\mathbf{a}_2)_L$. 根据向量加法的结合律及数学归纳法, 即可由此推出(8-4)式成立.

练习 8-1-2

1. 向量 \mathbf{a} 在有向直线 L 上的投影是数量还是向量?
2. 如果向量 \mathbf{a} 垂直于有向直线 L , a_L 是什么? 如果向量 \mathbf{a} 在垂直于有向直线 L 的平面上, a_L 是什么? 如果向量 \mathbf{a} 与有向直线 L 平行, a_L 又是什么?

1-3 空间直角坐标系

正如平面中的情形一样, 要沟通几何与代数的联系, 就得建立坐标系. 在空间, 常用的坐标系也是直角坐标系.

空间直角坐标系是平面直角坐标系的推广. 我们在空间作三条互相垂直相交的数轴 Ox, Oy, Oz , 它们有相同的长度单位, 它们的交点 O 称为坐标原点; Ox 称为横轴或 x 轴, 通常取自后至前的方向作为正向; Oy 称为纵轴或 y 轴, 通常取自左至右的方向作为正向; Oz 称为竖轴或 z 轴, 通常取自下至上的方向作为正向. Ox, Oy, Oz 统称坐标轴. 这样三条互相垂直的数轴, 就构成了一个空间直角坐标系. 三个坐标轴两两决定互相垂直的三个平面 xOy, yOz, zOx 称为坐标平面, 这三个平面把空间分为八个部分, 称为卦限. 在 xOy 平面之上, yOz 平面之前, zOx 平面之右的卦限称为第

一卦限。在 xOy 平面上方的其余三个卦限，按逆时针方向依次称为第二，第三，第四卦限。在 xOy 平面下方的四个卦限，规定第五卦限在第一卦限之下，其余三个卦限也由逆时针方向依次称为第六，第七，第八卦限(图 8.7)。

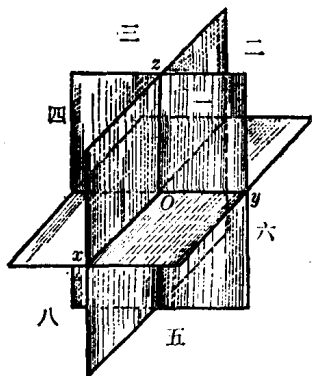


图 8.7

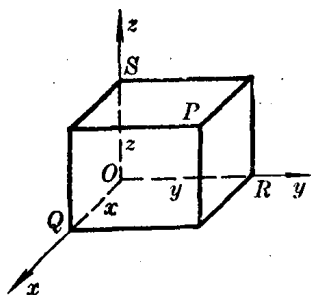


图 8.8

设 P 是空间任意一点(图 8.8)，过 P 点分别作平面与 x 轴， y 轴， z 轴垂直，与坐标轴的交点分别为 Q, R, S ，则三个坐标轴上对应于 Q, R, S 点的实数 x, y, z 称为 P 点的坐标。通常合写在一个括号里，记为 (x, y, z) 。第一个数 x 叫作 P 点的横坐标，第二个数 y 叫作 P 点的纵坐标，第三个数 z 叫作 P 点的竖坐标。所以对应于空间的每一点 P ，必有一组确定的坐标 (x, y, z) 与它对应。

反之，已知一组有序的实数 (x, y, z) ，我们可以在 x 轴， y 轴， z 轴上分别找到对应的点 Q, R, S ，然后通过 Q, R, S 分别作 x 轴， y 轴和 z 轴的垂直平面，这三个垂直平面的交点 P 便是具有坐标 (x, y, z) 的点。所以对应于一组有序的实数 (x, y, z) ，必有空间的一个确定的点 P 与它对应。这样，通过直角坐标系，空间的点的集合就与有序的实数组 (x, y, z) 的集合构成一一对应的关系。

空间直角坐标系按照坐标轴的指向可区分为两种。我们称图

8.9 所示的空间直角坐标系为右手坐标系。因为如果用右手的姆指指向 x 轴的正向，食指指向 y 轴的正向，那末中指指向就是 z 轴的正向。如果把右手坐标系的 x 轴与 y 轴对调，那末将得到另一种空间直角坐标系，可以用左手来表示指向，称为左手坐标系。本书中始终采用右手坐标系。

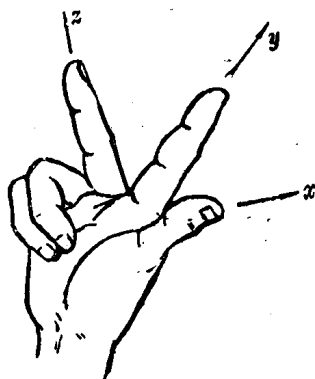


图 8.9

练习 8-1-3

1. $(-1, 2, 3)$ 和 $(2, 3, -1)$ 所表示的点各在什么卦限？求出它们关于 (1) 各坐标面, (2) 各坐标轴, (3) 原点对称的点的坐标。
2. 说明在各个卦限内, 点的坐标的正负。
3. 已知立方体的一个顶点在原点, 三条棱在正的半坐标轴上, 如果棱长为 a , 求其他各顶点的坐标。
4. 当 P 点的坐标 (x, y, z) 满足下列方程时, P 点的位置怎样? (1) $x=0, y=0$; (2) $y=0, z=0$; (3) $z=0, x=0$; (4) $x=a$; (5) $x=a, y=b$ 。

1-4 向量的坐标

向量沿三个坐标轴方向的分解式 在中学物理里, 我们已经知道, 利用平行四边形法则, 不仅可以把两个互不平行的力合成一个力, 而且可以把一个力分解为沿两个已知方向的分力。对于一般向量, 也可以进行这样分解。

设在空间直角坐标系中有任意向量 \mathbf{a} , 为了研究方便起见, 我们把 \mathbf{a} 平行移动, 使得它的起点与原点 O 重合。过 \mathbf{a} 的终点 A 分别作与三个坐标平面平行的平面, 它们与三个坐标平面构成一个长方体(图 8.10)。根据向量加法,