高 等 学 校 教 材

高 等 数 学

（第二版）

下　　册

西安交通大学高等数学教研室编

高等教育出版社

本书是西安交通大学高等数学教研室在《高等数学》(1979 年版) 下册 (第一分册和第二分册)的基础上修订而成. 本版按照高等工业院校高等数学教学大纲, 对原书内容作了适当精简, 体系上作了一些调整, 还补充了一些综合题. 全书分上下两册. 下册主要内容有向量代数、空间解析几何、多元函数微积分学及其应用、微分方程、傅里叶级数和傅里叶积分等.

本书通俗易懂, 例题选取适当, 习题也较丰富, 便于教学和自学. 可供工科院校各专业作教材使用.

本书由华中工学院陆传务教授、林化夷副教授初审, 大连工学院肖义珣教授复审, 最后由工科数学教材编审委员会审定为高等工业院校《高等数学》课程的教材.

高等学校教材

高 等 数 学

(第二版)

下 册

西安交通大学高等数学教研室编

*

高等教育出版社出版

新华书店北京发行所发行

朝阳区展望印刷厂印装

*

开本 850×1168 1/32 印张 17 字数 411,000

1979 年 9 月第 1 版 1986 年 2 月第 2 版 1986 年 3 月第 1 次印刷

印数 00,001—9,600

书号 13010·01186 定价 2.85 元

目 录

第八章 向 量 代 数

这一章我们要介绍向量概念及其各种代数运算法则．这些内容不仅是学习多元函数微积分不可缺少的基础，而且也是数学其它各分支以及力学、电学等各门自然科学中的常用工具．

§1 向 量

1-1 向量概念及其线性运算

在中学物理里，我们已经知道物理量有两种：一种是只具有大小的量，叫做**数量**（或**标量**），如时间，温度，功，能等等；一种是不仅具有大小而且还有方向的量，叫做**向量**（或**矢量**），如速度，力，电场强度等等．在中学物理里我们还知道，向量在几何上都可以用带箭头的一定长短的线段来表示．如果一个向量的起点与终点分别记作 A 与 B，那末这一向量便记作 $\overrightarrow{AB}$．为简便起见，一个向量往往只用一个字母加上箭号，如 $\vec{a}$ 表示．在书刊中，通常用黑体字母而省去箭号，如 $\boldsymbol{a}$．

向量的长度称为向量的**模**（或**绝对值**），记作 $|\boldsymbol{a}|$ 或 $|\overrightarrow{AB}|$．模等于 1 的向量称为**单位向量**．模等于零的向量称为**零向量**，记作 $\vec{0}$ 或 $\boldsymbol{0}$．零向量的方向不定．

因为在许多几何学与物理学的问题中所遇见的向量常常与起点无关，所以我们把方向相同，长度相等的向量都看作相等．这种向量，称为**自由向量**．自由向量可以在空间自由平行移动．也就是说，自由向量的起点可以放在任意一点的位置上．在本书中，今后如不加特别申明，所说的向量都是指自由向量．

向量的加减法 在中学物理的力学部分，我们已经知道有所谓力的合成的平行四边形法则. 设 $\boldsymbol{P}_1$ 与 $\boldsymbol{P}_2$ 是作用于某一物体而互不平行的两个力，那末它们的合力 $\boldsymbol{R}$ 就是以 $\boldsymbol{P}_1$ 与 $\boldsymbol{P}_2$ 为邻边所作出的平行四边形的对角线向量(图 8.1(a)). 根据平行四边形的性质，我们也可以这样作出 $\boldsymbol{R}$：把 $\boldsymbol{P}_2$ 的起点移至 $\boldsymbol{P}_1$ 的终点，于是由 $\boldsymbol{P}_1$ 的起点到 $\boldsymbol{P}_2$ 的终点的向量便是 $\boldsymbol{R}$(图 8.1(b))，称此为三角形法则.

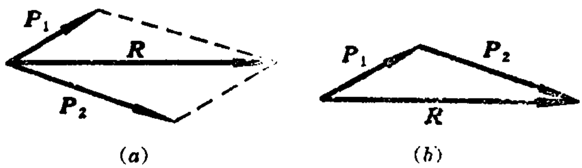


图 8.1

在这个基础上，我们来定义向量的加法.

定义 两个向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的和，记作 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$，就是把 $\boldsymbol{b}$ 的起点移至 $\boldsymbol{a}$ 的终点后，由 $\boldsymbol{a}$ 的起点到 $\boldsymbol{b}$ 的终点的向量.

根据这个定义，可知向量的加法满足交换律与结合律(见图 8.2)①：

$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a};$$
$$\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})=(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}.$$

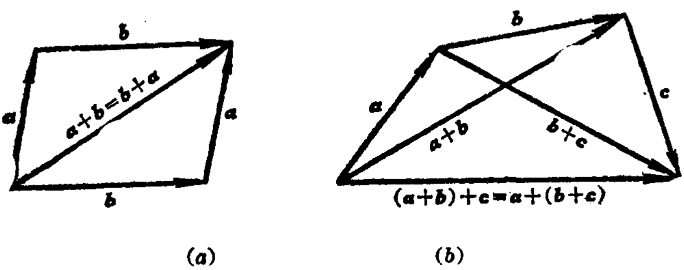


图 8.2

① 注意在图 8.2(b)中，$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 三个向量不一定在同一个平面内.

定义 两个向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的差，记作 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$，就是另一个与 $\boldsymbol{b}$ 相加后等于 $\boldsymbol{a}$ 的向量. 如果把 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的起点放在一起，那末 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ 就是由 $\boldsymbol{b}$ 的终点到 $\boldsymbol{a}$ 的终点的向量(图 8.3).

这样，对于每一个向量 $\boldsymbol{a}$，有 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$. $\boldsymbol{0}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 的差 $\boldsymbol{0}-\boldsymbol{a}$ 是与 $\boldsymbol{a}$ 大小相等而方向相反的一个向量，记作 $-\boldsymbol{a}$，称为 a 的**逆向量**. 这样就有

$$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{b}).$$

换句话说，减去一个向量等于加上这个向量的逆向量.

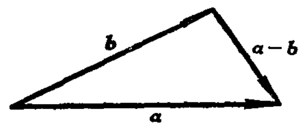


图 8.3

数与向量的乘法 如果我们把 n 个相等的向量逐个相加，那末，根据向量加法的定义，所得的和:

$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{a}+\cdots+\boldsymbol{a}$$

应该是一个模等于 $n|\boldsymbol{a}|$ 而方向依旧不变的向量，可记作 $n\boldsymbol{a}$. 把这个观念推广，我们就有了向量与数的乘法.

定义 一个向量 $\boldsymbol{a}$ 与数 λ 的乘积，记作 $\lambda\boldsymbol{a}$ 或 $\boldsymbol{a}\lambda$，是模等于 $|\lambda||\boldsymbol{a}|$ 的另一个向量，它的方向当 $\lambda>0$ 时与原向量相同，当 $\lambda<0$ 时与原向量相反.

根据定义，利用平面几何的知识容易证明，这种乘积满足下列结合律与分配律:

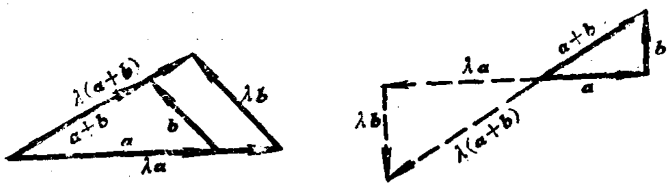
$$\lambda(\mu\boldsymbol{a})=(\lambda\mu)\boldsymbol{a};$$

$$(\lambda+\mu)\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{a};$$

$$\lambda(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\lambda\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}.$$

例如对于第三式，由图 8.4，利用相似三角形的对应边成比例这个性质，就可证明.

设 $\boldsymbol{a}^0$ 是方向与 $\boldsymbol{a}$ 相同的单位向量，那末根据数与向量的乘法我们可以把 $\boldsymbol{a}$ 写成:



(λ>0)　　　　(λ<0)

图 8.4

$$\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}|\boldsymbol{a}^0 \text{ 或 } \boldsymbol{a}^0=\frac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}. \tag{8-1}$$

向量的加减法及数与向量的乘法总称为向量的**线性运算**.

练　习　8-1-1

1. 什么叫数量？什么叫向量？试各举二实例说明.

2. 什么叫向量的模？什么叫单位向量？什么叫零向量？

3. 回答下列问题：

(1) 向量 $\boldsymbol{a}$ 与向量 $\boldsymbol{b}$ 有共同的起点，当向量 $\boldsymbol{a}$ 旋转$\frac{\pi}{4}$后，恰巧与向量 $\boldsymbol{b}$ 重合，问 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$ 吗？为什么？

(2) 力 $\boldsymbol{F}_1$ 与力 $\boldsymbol{F}_2$ 同时作用于静止物体的一点 P 上，力 $\boldsymbol{F}_1$ 拉物体向东，力 $\boldsymbol{F}_2$ 拉物体向西，而物体仍处于静止状态，假设地面与物体没有摩擦力，问 $\boldsymbol{F}_1=\boldsymbol{F}_2$，对吗？又 $|\boldsymbol{F}_1|=|\boldsymbol{F}_2|$，对吗？

(3) 从 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$ 是否可以得出 $|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|$？反过来，从 $|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|$ 是否可以得出 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$？

4. 向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 能否构成一个三角形？向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ 能否构成一个三角形？如果向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 满足条件 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}=0$，它们能否构成一个三角形？

5. 向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 必须满足什么条件时，向量 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 才能平分 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 之间的夹角.

6. 证明：(1) $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|\leqslant|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|$；(2) $\Big||\boldsymbol{a}|-|\boldsymbol{b}|\Big|\leqslant|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|$.

7. 向量的加法运算满足什么规律？向量与数量的乘法又满足什么规律？化简下列各式，并指出每步运算的根据：

(1) $\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}-(\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b})$；　　(2) $(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})+5\left(-\frac{1}{2}\boldsymbol{b}+\frac{\boldsymbol{b}-3\boldsymbol{a}}{5}\right)$.

8. 设$|\boldsymbol{a}|=1$，$|\boldsymbol{b}|=2$，$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$的夹角为$60°$. 试求:

(1) $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|$； (2) $|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|$；

(3) $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$与$\boldsymbol{a}$的夹角； (4) $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$与$\boldsymbol{a}$的夹角；

(5) $|4\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}|$； (6) $4\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}$与$\boldsymbol{a}$的夹角.

(所有夹角取锐角.)

1-2 向量在空间有向直线上的投影

在上一小节中所讨论的向量及其线性运算都是从几何上来定义的. 为了用解析的方法来研究向量，正象点的坐标那样，我们需要引入向量的坐标概念. 为此，首先讨论向量在空间有向直线上的投影.

我们先来规定空间两条有向直线之间的夹角.

如果两条直线相交，它们必在同一平面内，我们就把两有向直线正向之间不大于π的角作为有向两直线的**夹角**.

如果两条直线不相交，可取空间中任意一点A，过A作两条有向直线，分别与已知直线平行且同向，我们就把这两条相交于A的直线的夹角作为两条已知直线的夹角.

设空间中给定向量$\boldsymbol{a}=\overrightarrow{AB}$以及一条有向直线$L$，过$\boldsymbol{a}$的两端点，分别作与$L$垂直的平面$p$与$q$，与$L$相交于$A'$和$B'$(图 8.5)，我们用记号$\boldsymbol{a}_L$表示向量$\boldsymbol{a}$在有向直线$L$上的**投影**，定义如下:

$$\boldsymbol{a}_L=\begin{cases}+|\overrightarrow{A'B'}|, & \text{当 } \overrightarrow{A'B'} \text{ 与 } L \text{ 同方向时},\\ -|\overrightarrow{A'B'}|, & \text{当 } \overrightarrow{A'B'} \text{ 与 } L \text{ 反方向时}.\end{cases} \tag{8-2}$$

即a_L等于L上有向线段$A'B'$的值，它是一个数量. 在本书中有时也把a_L记作$(\boldsymbol{a})_L$.

类似于平面解析几何，在空间也有两条投影定理.

定理一 设向量$\boldsymbol{a}$与有向直线L的夹角为α，则$\boldsymbol{a}$在L上的投影为

$$\boxed{\boldsymbol{a}_L=|\boldsymbol{a}|\cos\alpha} \tag{8-3}$$

证 过A作与L平行且同向的有向直线L'，与平面q交于B''（图 8.5），于是$\boldsymbol{a}$与$\overrightarrow{AB''}$在同一平面内，由于平面q与L垂直，也与L'垂直，从而q上的直线BB''也与L'垂直，若$0\leqslant\alpha<\frac{\pi}{2}$，则$\cos\alpha>0$，由(8-2)，

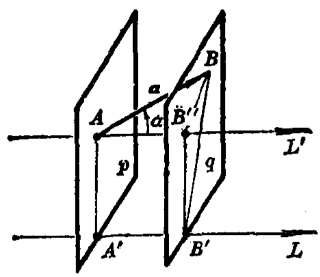


图 8.5

$$a_{L'}=|\overrightarrow{AB''}|=|\boldsymbol{a}|\cos\alpha,$$

若$\frac{\pi}{2}\leqslant\alpha\leqslant\pi$，$\cos\alpha\leqslant0$，由(8-2)，

$$a_{L'}=-|\overrightarrow{AB''}|=-|a|\cos(\pi-\alpha)=|\boldsymbol{a}|\cos\alpha.$$

显然，$a_{L'}=a_L$，这就证明了(8-3)式.

定理二 有限个向量的和在有向直线L上的投影等于各个向量在L上投影的和，即

$$\boxed{(\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2+\cdots+\boldsymbol{a}_n)_L=(\boldsymbol{a}_1)_L+(\boldsymbol{a}_2)_L+\cdots+(\boldsymbol{a}_n)_L} \tag{8-4}$$

证 由图 8.6，容易看到

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2)_L&=(\overrightarrow{A_1A_2}+\overrightarrow{A_2A_3})_L\\&=(\overrightarrow{A_1A_3})_L\\&=A_1'A_3',\end{aligned}$$

$$(\boldsymbol{a}_1)_L+(\boldsymbol{a}_2)_L=(\overrightarrow{A_1A_2})_L+(\overrightarrow{A_2A_3})_L$$

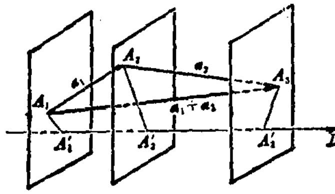


图 8.6

$$=A_1'A_2'+A_2'A_3'=A_1'A_3',$$

所以$(\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2)_L=(\boldsymbol{a}_1)_L+(\boldsymbol{a}_2)_L$. 根据向量加法的结合律及数学归纳法,即可由此推出(8-4)式成立.

练　习　8-1-2

1. 向量$\boldsymbol{a}$在有向直线L上的投影是数量还是向量?

2. 如果向量$\boldsymbol{a}$垂直于有向直线L, $\boldsymbol{a}_L$是什么? 如果向量$\boldsymbol{a}$在垂直于有向直线L的平面上, $\boldsymbol{a}_L$是什么? 如果向量$\boldsymbol{a}$与有向直线L平行, $\boldsymbol{a}_L$又是什么?

1-3　空间直角坐标系

正如平面中的情形一样,要构通几何与代数的联系,就得建立坐标系. 在空间,常用的坐标系也是直角坐标系.

空间直角坐标系是平面直角坐标系的推广. 我们在空间作三条互相垂直相交的数轴Ox,Oy,Oz,它们有相同的长度单位,它们的交点O称为**坐标原点**;Ox称为**横轴**或x轴,通常取自后至前的方向作为正向;Oy称为**纵轴**或y轴,通常取自左至右的方向作为正向;Oz称为**竖轴**或z轴,通常取自下至上的方向作为正向. Ox, Oy,Oz统称**坐标轴**. 这样三条互相垂直的数轴,就构成了一个**空间直角坐标系**. 三个坐标轴两两决定互相垂直的三个平面xOy, yOz,zOx称为**坐标平面**,这三个平面把空间分为八个部分,称为**卦限**. 在xOy平面之上,yOz平面之前,zOx平面之右的卦限称为第

一卦限. 在 xOy 平面上方的其余三个卦限，按逆时针方向依次称为第二，第三，第四卦限. 在 xOy 平面下方的四个卦限，规定第五卦限在第一卦限之下，其余三个卦限也由逆时针方向依次称为第六，第七，第八卦限(图 8.7).

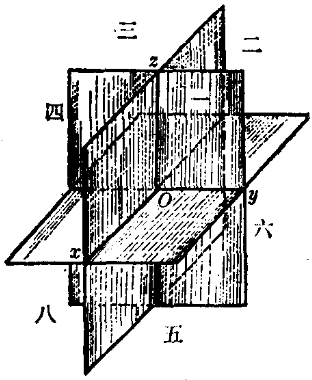


图 8.7

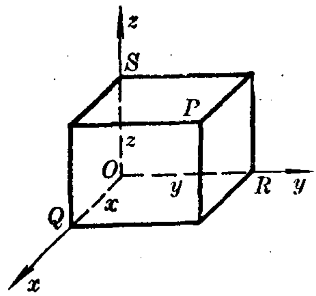


图 8.8

设 P 是空间任意一点(图 8.8)，过 P 点分别作平面与 x 轴，y 轴，z 轴垂直，与坐标轴的交点分别为 Q, R, S，则三个坐标轴上对应于 Q, R, S 点的实数 x, y, z 称为 P 点的**坐标**. 通常合写在一个括号里，记为 (x, y, z). 第一个数 x 叫作 P 点的**横坐标**，第二个数 y 叫作 P 点的**纵坐标**，第三个数 z 叫作 P 点的**竖坐标**. 所以对应于空间的每一点 P，必有一组确定的坐标 (x, y, z) 与它对应.

反之，已知一组有序的实数 (x, y, z)，我们可以在 x 轴，y 轴，z 轴上分别找到对应的点 Q, R, S，然后通过 Q, R, S 分别作 x 轴，y 轴和 z 轴的垂直平面，这三个垂直平面的交点 P 便是具有坐标 (x, y, z) 的点. 所以对应于一组有序的实数 (x, y, z)，必有空间的一个确定的点 P 与它对应. 这样，通过直角坐标系，空间的点的集合就与有序的实数组 (x, y, z) 的集合构成一一对应的关系.

空间直角坐标系按照坐标轴的指向可区分为两种. 我们称图

8.9 所示的空间直角坐标系为**右手坐标系**. 因为如果用右手的姆指指向 x 轴的正向，食指指向 y 轴的正向，那末中指指向就是 z 轴的正向. 如果把右手坐标系的 x 轴与 y 轴对调，那末将得到另一种空间直角坐标系，可以用左手来表示指向，称为**左手坐标系**. 本书中始终采用右手坐标系.

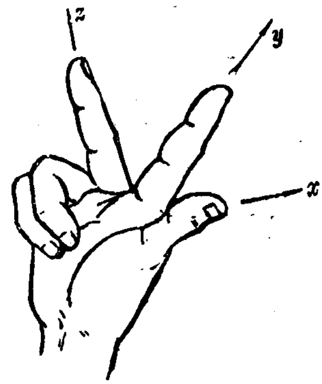


图 8.9

练 习 8-1-3

1. $(-1, 2, 3)$和$(2, 3, -1)$所表示的点各在什么卦限？求出它们关于(1)各坐标面,(2)各坐标轴,(3)原点对称的点的坐标.

2. 说明在各个卦限内,点的坐标的正负.

3. 已知立方体的一个顶点在原点,三条棱在正的半坐标轴上,如果棱长为 a,求其他各顶点的坐标.

4. 当 P 点的坐标(x, y, z)满足下列方程时,P 点的位置怎样？(1) $x=0, y=0$;(2) $y=0, z=0$;(3) $z=0, x=0$;(4) $x=a$;(5) $x=a, y=b$.

1-4 向量的坐标

向量沿三个坐标轴方向的分解式 在中学物理里，我们已经知道,利用平行四边形法则,不仅可以把两个互不平行的力合成一个力，而且可以把一个力分解为沿两个已知方向的分力. 对于一般向量,也可以进行这样分解.

设在空间直角坐标系中有任意向量 $\boldsymbol{a}$,为了研究方便起见,我们把 $\boldsymbol{a}$ 平行移动，使得它的起点与原点 O 重合. 过 $\boldsymbol{a}$ 的终点 A 分别作与三个坐标平面平行的平面，它们与三个坐标平面构成一个长方体(图 8.10). 根据向量加法,