高等学校试用教材

计算方法

武汉大学
山东大学
计算数学教研室编

人民教育出版社

高等学校试用教材

计 算 方 法

武汉大学
山东大学
计算数学教研室编

人民教育出版社

高等学校试用教材

计 算 方 法

武汉大学
山东大学 计算数学教研室编

*

人民教育出版社出版
新华书店北京发行所发行
人民教育出版社印刷厂印装

*

开本 787×1092 1/32 印张 11.75 字数 280,000
1979 年 4 月第 1 版 1979 年10月第 1 次印刷
印数 00,001—40,000
书号 13012·0349 定价 0.85 元

说　明

本书是根据1977年全国高等学校理科教材编写会议的精神为数学专业编写的，可供数学三、四年级使用．内容侧重于计算方法的基本原理与方法．计算方法这门课的内容较广泛，取舍较为困难．在编写过程中尽管我们力求按80学时讲授内容来编写，编成后仍感内容偏多偏重．教者可适当删简，例如共轭斜量法，求对称方阵特征值的对分法，曲线拟合的后半节，切彼晓夫多项式在计算函数值时的应用，重泊松方程的差分方法，抛物型和双曲型方程的有限元方法等内容可酌情取舍。

本书第四章以前是由武汉大学张延昌、胡泽民同志编写．第五章是由山东大学王申林同志编写，第六至第八章是由山东大学袁益让同志编写。

本书由厦门大学负责主审，参加审稿的还有北京师范大学、福州大学、福建师范大学的老师，特别是厦大林坚冰和北师大陈公宁两位老师，他们提出许多宝贵的意见，在此谨向审稿同志致深切谢意。

由于我们的水平不高，在教材取舍、安排、衔接、表达各方面一定存在不少缺点乃至某些错误，对这些恳请批评指正。

编　者

1978年12月

目　录

绪论……1
§1　计算方法的主要内容……1
§2　数的近似表示……3
§3　离散变量与离散化……5
§4　逼近的概念……7
§5　迭代……10
第一章　线性代数方程组的解法……16
§1　引言……16
1-1　研究数值解法的必要性(16)　1-2　一些说明(17)　1-3　与解线性代数方程组有关的问题(17)　1-4　精确法与迭代法(18)
§2　消去法……20
2-1　简单的消去法(20)　2-2　无回代过程的消去法(22)
§3　消去法与矩阵分解……24
3-1　简单消去法与三角状分解(24)　3-2　无回代过程的消去法与矩阵分解(29)　3-3　a_{11}，$a_{22}^{(1)}$，$a_{33}^{(2)}$，$a_{44}^{(3)}$ 与主子行列式(31)　3-4　求方阵的逆与矩阵分解(31)　3-5　小结——两种消去法之比较(31)
§4　紧凑格式与平方根法……34
4-1　紧凑格式(34)　4-2　对称方阵的三角状分解与平方根法(37)
§5　三对角方程组……38
§6　主元选取……42
6-1　主元选取之必要性(42)　6-2　主元选取的办法(44)
§7　向量的范数与方阵的范数……45
7-1　向量范数(45)　7-2　方阵的范数(46)　7-3　谱半径、谱范数与F范数$N(A)$(50)
§8　方阵的状态、解对系数的敏感性以及解法的稳定性……52

35367

8-1　简单的例(52)　8-2　要考虑的问题(53)　8-3　状态数(条件数)(55)　8-4　选取主元的(简单)消去法之稳定性(57)

§9　迭代法……58

9-1　简单迭代法与塞德尔(Seidel)迭代法(58)

9-2　简单迭代法与塞德尔迭代法的收敛性(60)

9-3　迭代法的矩阵写法与一般迭代过程(63)　9-4　两个重要定理(64)　9-5　关于判别条件Ⅰ与Ⅱ的论证(68)　9-6　松弛概念与逐个超松弛法(69)

§10　最速下降法与共轭斜量法……73

10-1　几何意义与等价问题(73)　10-2　最速下降法(76)

10-3　共轭斜量法(77)

习题……81

第二章　求方阵的特征值与特征向量……86

§1　引言……86

§2　雅可比方法……87

2-1　旋转变换(87)　2-2　雅可比方法(89)

§3　求对称方阵特征值的对分法……90

3-1　$C=[b_{i-1},\ c_i,\ b_i]$的施斗姆性质(91)　3-2　将A相似简化为C的两种办法(94)　3-3　求A的相应特征向量(97)

§4　乘幂法……99

习题……104

第三章　插值与逼近……106

§1　拉格朗日(Lagrange)插值……106

§2　差商与牛顿插值公式……110

2-1　差商的概念(110)　2-2　牛顿插值公式(111)

2-3　差商的基本性质(112)　2-4　差商表与例(113)

2-5　带重合基点的差商(114)

§3　差分与等距节点插值公式……115

3-1　差分记号(115)　3-2　等距节点的插值公式(117)

§4　埃尔米特(Hermite)插值公式……120

§5　样条函数插值……122

5-1　基本概念(122)　5-2　插值问题与端点条件(123)

5-3　在内结点处的关系式及线性方程组(124)

§6　正交多项式……129

6-1　正交函数系的概念(129)　6-2　切彼晓夫(Чебышев)多项式$T_n(x)$(130)　6-3　切彼晓夫多项式的基本性质(131)　6-4　正交多项式$P_n(x)$, $L_n(x)$, $H_n(x)$(133)　6-5　关于正交多项式的小结(135)

§7　正交多项式系与最佳均方逼近……138

§8　切彼晓夫多项式在计算函数值时的应用……142

8-1　利用切彼晓夫多项式来降低逼近多项式的次数(142)

8-2　切彼晓夫级数在函数值计算的应用(144)

§9　曲线拟合……145

9-1　问题提出与基本概念(145)　9-2　线性最小二乘问题与正则方程(147)　9-3　解线性最小二乘问题的正交三角化方法(150)

习题……155

第四章　数值积分……157

§1　引言……157

1-1　数值求积的必要性(157)　1-2　求积公式和它的代数精确度(157)　1-3　利用插值多项式直接导出的求积公式(159)

§2　牛顿-柯特斯(Newton-Cotes)求积公式……160

2-1　牛顿-柯特斯公式(160)　2-2　梯形求积公式与抛物线求积公式(161)　2-3　复合梯形与复合抛物线求积公式(163)

2-4　高阶牛顿-柯特斯公式(166)

§3　龙贝格(Romberg)求积算法……167

§4　高斯求积公式……170

4-1　不带权的高斯求积公式(170)　4-2　带权的高斯求积公式(173)

§5　利用样条插值的求积公式……175

习题……176

第五章　常微分方程初值问题数值解法……179

§1　引言……179

§2　尤拉折线法与改进的尤拉折线法……184

2-1　尤拉折线法(184)　2-2　改进的尤拉折线法(184)

2-3　预估-校正法(188)

§3　龙格-库塔方法……188

3-1 泰勒展开方法(188) 3-2 关于龙格-库塔方法(189)
3-3 龙格-库塔公式的推导(191)

§4 线性多步法……196

4-1 阿达姆斯外推法(197) 4-2 阿达姆斯内插法(199)
4-3 利用泰勒展开的办法(202)

§5 哈明方法……207

5-1 哈明方法的计算步骤(207) 5-2 推导公式(5.1)及(5.2)(209) 5-3 计算“表头”的方法(210)

§6 收敛性和稳定性……211

6-1 单步法的收敛性(211) 6-2 标准四阶龙格-库塔方法的绝对稳定区域(216) 6-3 简要说明(217)

§7 方程组和刚性方程……218

7-1 方程组和高阶方程(218) 7-2 刚性方程(220)

§8 小结……223

习题……224

第六章 椭圆型方程的差分方法……228

§1 常微分方程边值问题的差分方法……229

1-1 差分方程的建立(229) 1-2 差分方程组的可解性及误差估计(230) 1-3 解差分方程组的追赶法(233) 1-4 实例(235)
1-5 关于一般二阶常微分方程第三边值问题(237)

§2 把二阶椭圆型方程边值问题化为差分方程……238

2-1 正方形网格(239) 2-2 微分方程的差分逼近(240)
2-3 边界条件的近似处理(244) 2-4 差分方程解的存在唯一性、收敛性及误差估计(247)

§3 椭圆差分方程组的迭代解法……252

3-1 差分方程组的矩阵形式和特征(252) 3-2 迭代法的收敛速度(256) 3-3 逐个超松弛法(258)

§4 重泊松方程的差分方法……263

4-1 微分方程的差分逼近(264) 4-2 边界条件的近似处理(266)

习题……267

第七章 抛物型和双曲型方程的差分方法……270

§1 抛物型方程的差分方法……270

1-1 最简单的显式差分格式(271) 1-2 最简单的隐式差分格式(273) 1-3 六点对称格式(274) 1-4 李查逊(Richardson)格式(275) 1-5 一般线性抛物型方程的差分格式(276)
§2 差分格式的稳定性和收敛性……277
2-1 问题的提出(277) 2-2 ε-图方法(279)
2-3 稳定性的定义及最简单显式差分格式的稳定性(281)
2-4 隐式差分格式的稳定性(284) 2-5 差分格式的收敛性(285)
2-6 一般抛物型方程差分格式的收敛性与稳定性(287)
§3 二维抛物型方程的差分格式……291
3-1 显式差分格式(291) 3-2 交替方向格式(293)
§4 线性双曲型方程的差分方法……294
4-1 微分方程的差分逼近(294) 4-2 初值条件和边值条件的差分近似(295) 4-3 差分格式的收敛性(297) 4-4 差分方程的稳定性(298)
§5 一阶双曲型方程组的特征线法……306
5-1 特征和特征上的微分关系(306) 5-2 特征——差分方法(308) 5-3 一阶双曲型方程组的情况(310) 5-4 二阶双曲型方程与一阶双曲型方程组的联系(313)
习题……315
第八章 微分方程的有限元方法……318
§1 变分方法……318
1-1 等价性定理(319) 1-2 里兹-加辽金方法(324)
1-3 例(330)
§2 椭圆型方程的有限元方法……333
2-1 变分原理(333) 2-2 剖分与插值(338) 2-3 变分问题的离散化(347) 2-4 误差估计及收敛性(354) 2-5 实例(359) 2-6 方法的特点(362) 2-7 关于单元剖分和插值函数的讨论(363)
§3 抛物型和双曲型方程的有限元方法……364
习题……367

绪　论

§1　计算方法的主要内容

在生产斗争和科学实验中利用数学作为一种研究手段，大多数情况是希望通过数学讨论最终获得所需要的数字结果. 计算必须依靠计算工具进行，进行数字计算的工具所能执行的只是对具一定数位的数进行加、减、乘、除四则运算，即使是现代化的电子数字计算机也是如此. 因此，计算方法的主要内容是怎样把数学问题的求解运算都归结为对有限数位的数的四则运算. 这就产生许多值得研究的问题，如怎样把关于连续变量的问题化为离散变量的问题，这两种问题的解有多大差异，又在计算的每一步对于数都不是作精确的运算，在大量进行这种运算之后又会产生怎样的差异，等等. 这样的差异在数学上叫误差. 但疏忽大意造成的错误不应该算做误差. 下面给出有关误差的形式定义:

$$\text{误差}=\text{精确值}-\text{近似值}$$

$$\text{绝对误差}=|\text{误差}|$$

$$\text{相对误差}=\left|\frac{\text{误差}}{\text{精确值}}\right|$$

精确值又叫真值，一般是不知道的，有时就把相对误差的定义式中的精确值用近似值来代替. 设 x 与 $\tilde{x}$ 分别代表精确值与近似值，$\Delta x=x-\tilde{x}$ 是误差. 考查$\dfrac{\Delta x}{x}$与$\dfrac{\Delta x}{\tilde{x}}=\dfrac{\Delta x}{x-\Delta x}$的差，由

$$\frac{\Delta x}{\tilde{x}}-\frac{\Delta x}{x}=\frac{\Delta x}{x}\left(\frac{1}{1-\dfrac{\Delta x}{x}}-1\right)=\left(\frac{\Delta x}{x}\right)^2\left\{\frac{1}{1-\dfrac{\Delta x}{x}}\right\}$$

$$=O\left(\left(\frac{\Delta x}{x}\right)^2\right)$$

看出，用$\left|\frac{\Delta x}{\tilde{x}}\right|$代替$\left|\frac{\Delta x}{x}\right|$时，相差不超过$\left|\frac{\Delta x}{x}\right|^2$的一个倍数(事实上，不会超过$2\left(\frac{\Delta x}{x}\right)^2$，因为一般$\left|1-\frac{\Delta x}{x}\right|\geqslant1-\left|\frac{\Delta x}{x}\right|$总会$\geqslant\frac{1}{2}$).

下面给出几个简单的例说明计算方法会碰到的问题.

(1) 对 $\operatorname{arctg}x\,(-1\leqslant x\leqslant1)$，如利用多项式作近似的计算，要求绝对误差不超过 7×10^{-4}，并且要求多项式的次数尽可能低些(多项式次数越低，计算工作量就越少).

(2) 为了找出某一铜导线的电阻R随温度T改变而改变的规律，经测试得出如下数据

表 0-1

T	19.1	25.0	30.1	36.0	40.0	45.1	50.0
R	76.30	77.80	79.75	80.80	82.35	83.90	85.10

求R与T之间的函数关系.

(3) 对于 $x=[-2\ \ (0.1)\ \ 2]$[注]，计算$\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-(x-\omega^2)^2}d\omega$.

(4) 求 $9x^2=\sin x$ 的正实根.

(5) 求一阶常微分方程的初值问题

$$\frac{dy}{dx}=f(x,y),\quad y(0)=1$$

的解，其中 $f(x,y)=y-\frac{2x}{y}$ 或 $\sin x+y^2$.

(6) 求解二阶常微分方程边值问题

$$y''+xy'+y=0,\qquad y(0)=0,\qquad y(1)=1$$

[注] 这是一种记号，指从 $x=-2$ 起每隔 $h=0.1$(步长)就取 x 的一个值，直到 $x=2$.

当然还可能遇到其它更复杂的问题，不一一列举.

§2 数的近似表示

这里我们不打算讲在计算机中数的表示及其运算的情况，只把通常在十进制表示下有关数的近似表示的几个术语解说清楚.

由于我们只能处理具一定数位的数，而数在十进制表示下其位数可能是无尽的，因此，有必要引进近似数的概念和舍入规则.

所谓对一个数 x 进行舍入是指对它的十进制表示保留从左数起的一定数目的数字，而把其余舍弃以后得到的 $\tilde{x}$，并要二者的差的绝对值 $|x-\tilde{x}|$ 不超过被保留的最后数位的半个单位. 譬如对 $\pi=3.141592653\cdots$ 舍入成含 3 个、4 个、5 个、6 个、7 个数字的数分别是 3.14、3.142、3.1416、3.14159、3.141593. 注意如舍弃的部分正好是被保留的最后数位的半个单位，那么就有两种可能，譬如要把 $x=3.1415$ 舍入成 4 个数位时，$\tilde{x}$ 可以是 3.141 也可以是 3.142. 对这种情况，一般都规定要被保留的最后一位数字是偶数，即 0、2、4、6、8. 这样 3.1415、3.1445、2.7835 应分别舍入成 3.142、3.144、2.784.

设 x 是一个数，x^* 是它的近似数. 如果

$$|\Delta x|=|x-x^*|\leqslant\frac{1}{2}10^{-k}$$

那么我们就说，用 x^* 近似表示 x 时准确到小数之后第 k 位，又把从这个数字起直到最左的非 0 数字之间的一切数字都叫做有效数字，并把有效数字的位数叫做有效数位，它反映 x^* 近似 x 的精确程度. 譬如我们用 $x^*=0.0004608295$ 近似代替 $x=0.0004608172$ 时，在 x^* 中从第一个非 0 数字 4 起的四个数字 4、6、0、8 都是有效数字. 我们不去讨论有效数位与相对误差之间的形式关系，仅用例说明有效数位越多相对误差就越小. 例如，把 $x_1=0.98632$ 与 $x_2=$

0.00278 都舍入到小数点后四位分别为 $\tilde{x}_1=0.9863$ 与 $\tilde{x}_2=0.0028$，可是用$\tilde{x}_1$ 代 x_1的相对误差约为 0.0000208，而用 $\tilde{x}_2$ 代 x_2 的相对误差则是 0.00714，后者的相对误差约为前者的 355 倍.

设用 x^*、y^*、z^* 分别代表数 x、y、z 的近似数，又用 Δx、Δy、Δz 表误差 $x-x^*$、$y-y^*$、$z-z^*$，则成立下二式：

$$\frac{1}{z}-\frac{1}{z^*}=\frac{1}{z}\left\{1-\frac{1}{1-\dfrac{\Delta z}{z}}\right\}$$

$$=-\frac{1}{z}\left\{\frac{\Delta z}{z}+\left(\frac{\Delta z}{z}\right)^2+\left(\frac{\Delta z}{z}\right)^3+\cdots\right\} \tag{2.1}$$

$$\left|\frac{\Delta(x-y)}{x-y}\right|\leqslant\frac{|\Delta x|+|\Delta y|}{|x-y|}=\frac{|x|}{|x-y|}\cdot\frac{|\Delta x|}{|x|}+\frac{|y|}{|x-y|}\cdot\frac{|\Delta y|}{|y|} \tag{2.2}$$

再把(2.1)中$\dfrac{\Delta z}{z}$的高次幂略去，就有

$$\left|\frac{1}{z}-\frac{1}{z^*}\right|\approx\frac{1}{|z|^2}|\Delta z|$$

$$\frac{\left|\dfrac{1}{z}-\dfrac{1}{z^*}\right|}{\left|\dfrac{1}{z}\right|}\approx\left|\frac{\Delta z}{z}\right|$$

由上看出，如果 z 是很小的数，那么以 z^* 的倒数$\dfrac{1}{z^*}$作为$\dfrac{1}{z}$的近似时绝对误差$\left|\dfrac{1}{z}-\dfrac{1}{z^*}\right|$是$|\Delta z|$之$\dfrac{1}{|z|^2}$倍，而相对误差却还和$\left|\dfrac{\Delta z}{z}\right|$差不多. (2.2)说明很接近的两个(同号)数 x、y 的近似数之差 x^*-y^*的相对误差由于乘数$\dfrac{|x|}{|x-y|}$与$\dfrac{|y|}{|x-y|}$很大而比原来的相对

误差$\frac{|\Delta x|}{|x|}$与$\frac{|\Delta y|}{|y|}$大得多. 现在把 $x-y$ 看作上述的 z, 那么可以得到这样的结论: 在用相接近的两个(同号)数之差作除数的近似计算中, 相对误差扩大的很多. 这件事也不妨说成相近的两个同号数相减使得有效数字抵消而造成有效数位减少, 从而使相对误差变大. 倘若再用相减的结果作除数, 就更使相对误差扩大. 因此, 在计算过程中应该设法避免两个相近数相减, 特别要避免再用这个差作为除数. 下面用一个例子来说明.

求 $x^2-18x+1=0$ 的根.

根据二次方程求根公式, 我们有

$$x_1=9+\sqrt{80} \qquad x_2=9-\sqrt{80}$$

用小数点后三位数字进行计算, 由于$\sqrt{80}=8.944$, 故

$$x_1=17.944 \qquad x_2=0.056$$

在 x_1 中有五个有效数字, 而在 x_2 中只有两个有效数字. 倘若将 x_2 化为

$$x_2=\frac{1}{x_1}=\frac{1}{17.944}=0.05573$$

那么在 0.05573 中四个数字 5、5、7、3 都是有效数字(因为$9-\sqrt{80}=0.0557281$).

§3 离散变量与离散化

离散变量与离散化可以认为是计算方法中最基本的概念与办法之一. 有些函数本来就是对自变量的离散值给出的, 如 §1 的例(2). 但是像 $y=\sin x$ 或 e^x 之类的函数, 它们的自变量 x 及函数自身都是连续变化的, 人们却把它们列成表. 从 $y=e^x$ 的函数表中抄下很短一小段

x	1.4125	1.4130	1.4135	1.4140	1.4145
e^x	4.1062081	4.1082617	4.1103164	4.1123720	4.1144287

这里的 x 已不再看成连续变量，而是每隔步长 $h=0.0005$ 就跳跃取另一个值的离散变量了．只是对这些值，函数才有相应的值列在表中．这样列表就相当于把 $y=e^x$ 离散化了．

反过来，也可以通过其它办法(如插值或最小二乘法)把离散变量的函数"联成为"连续变量的函数．就上面所给的数表来讲，我们也可以利用这类办法对不属于列表的点处，例如 $x=1.4142$ 算出相应的近似函数值．

对于像§1所举的例(5)与(6)，用离散化的办法也可以计算它们的解在离散点处的近似结果．下面就例(5)作简要说明．

首先取一系列等距分布的点 $0=x_0<x_1<x_2<\cdots$，此处记 $x_i-x_{i-1}=h$．如果不要求对一切 $x>0$ 求 $y(x)$ 而只希望对所取的 x_i 算出 $y(x_i)$ 的近似值 y_i，那么就可以利用差商代替微商，即

$$y'(x_i)\approx\frac{y_{i+1}-y_i}{h} \tag{3.1}$$

把微分方程

$$y'(x)=f(x,y),\quad x>0 \tag{3.2}$$

近似地化为递推关系(差分方程)

$$y_{i+1}=y_i+hf(x_i,y_i)\qquad (i=0,1,2,\cdots) \tag{3.3}$$

只要会计算 $f(x_i,y_i)$，那么就可以从 $y_0=1$ 起一步一步地算出 y_1，$y_2,\cdots$．

用离散化的办法处理连续变量的问题，一般来说很简单，但进一步考虑细节问题却相当复杂．譬如，为什么要用(3.1)右端的差商代 $y'(x_i)$，是否还有更精确的近似式，用(3.3)进行大量递推计算之后，y_n 近似于 $y(x_n)$ 的程度如何等等．这些只有到第五、六章

才能讨论.

§4 逼近的概念

用简单的函数 $y(x)$ 近似地代替函数 $f(x)$，和用具一定数位的数近似地代替已知或待定的数一样，也是计算方法中最基本的概念和办法之一. 近似代替又叫逼近. $f(x)$ 有时叫做被逼近(或被近似)函数，而 $y(x)$ 叫做逼近(或近似)函数. 两者的差

$$E(x)=f(x)-y(x)$$

就叫做逼近的误差或余项. 在计算数学里，所谓简单的函数主要是指可以用四则运算进行计算的函数. 这种函数的一般形式是有理分式函数即多项式的商，而较简单的则是多项式. 为了简明介绍一些概念，我们取多项式作为近似函数，并把次数不超过 n 的多项式全体所成的类记为 $\mathscr{P}_n$. 除了被逼近的函数 $f(x)$ 以及逼近的函数类 $\mathscr{P}_n$ 之外，还应该有关于逼近方式的要求，常用的是:

(1) 插值;

(2) 一致逼近;

(3) 均方逼近(或平方逼近).

显然，这些要求必须提得合理，不恰当的要求会导致无解或有许多解. 在解答为唯一的前提下，也还存在怎样求出解的问题. 下面对插值及两种逼近的含意作简单的说明.

(1) 插值　是要求近似函数 $y(x)$ 与被近似的函数 $f(x)$ 在某一些点处具有相同的函数值，甚至直到某阶导函数值. 例如，要求所找的多项式 $y(x)$ 在 $n+1$ 个点 $x_0, x_1, \cdots, x_n$ 处满足条件:

$$y(x_k)=f(x_k)\quad (k=0,1,2\cdots,n)$$

这就存在在哪个类里去找 $y(x)$ 的问题. 我们知道，次数不超过 n 的多项式

$$a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n$$

恰有 $n+1$ 个参数 $a_0, a_1, \cdots, a_n$，因而预计在 $\mathscr{P}_n$ 中找 $y(x)$ 会是合理的(有确定的解)，在第三章 § 1 将证实这一点．如果 $n+1$ 是 2 或 3，那么就很容易找出相应的 $y(x)$．譬如 $n=1$ 时，相当于作过点 $(x_0, f(x_0))$ 与 $(x_1, f(x_1))$ 的直线 $y=y(x)$，于是

$$y(x)=\frac{x-x_1}{x_0-x_1}f(x_0)+\frac{x-x_0}{x_1-x_0}f(x_1)$$

$$=f(x_0)+(x-x_0)\frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}.$$

用这个 $y(x)$ 近似代替 $f(x)$ 就叫线性插值．

$n=2$ 时，找插值多项式 $y=y(x)$ 相当于找过三点 $(x_i, f(x_i))$ $(i=0, 1, 2)$ 的抛物线．不难验证

$$y(x)=\frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}f(x_0)+\frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)}f(x_1)$$

$$+\frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}f(x_2)$$

确实满足所提的条件．

插值，除了用于对 $f(x)$ 作近似外，还特别用于推导数值微分、数值积分、求常微分方程数值解的公式．

(2) 一致逼近　设用多项式 $g(x)$ 对 $[a, b]$ 上的给定函数 $f(x)$ 作近似，考虑 $|E(x)|=|f(x)-g(x)|$ 在 $[a, b]$ 上的最大值，并记作

$$\delta=\delta(f, g)=\max_{x\in[a, b]}|f(x)-g(x)|$$

如 $\delta(f, g)$ 小于某一正数 ε，那么用 $g(x)$ 近似代替 $f(x)$ 时，对 $[a, b]$ 上任何一点 x，误差 $|E(x)|$ 都小于 ε．因此不妨说，在 $[a, b]$ 上用 $g(x)$ 近似代替 $f(x)$ 时误差按一致意义小于 ε．

用多项式 $g(x)$ 按一致意义近似(或逼近)给定函数 $f(x)$，在计算方法中对于 $f(x)$ 之函数值计算具有实际意义，这是十分明显的．可是我们不仅希望找到满足精确度要求的多项式，而且希望多项式的次数越低越好，因为多项式次数越低，要用的计算工作量就