高維的数値积分

徐利治

科学出版社

高維的数值积分

徐利治 著

科学出版社
1963

內容簡介

本书討論了各种类型的求积公式的构造方法与誤差估計問題．大致說来，前三章主要是"代数方法"与"算子方法"，其中某些方法特别适用于对称的积分区域与乘积区域，并和"代数精确度"的概念相联系．第四章講"降維法"和二維求积公式的一种构造法．第五、六两章专門討論高維矩形区域上的求积程序与誤差估計．第七章討論誤差上限的精确計算問題；对于給定的求积公式和某种函数类，建立了誤差上限的精确表示式．最后一章主要是討論含有一个或数个参数的"振蕩型积分"的計算問題，指出了在一般情况下可以把这些較难計算的积分轉化为通常的高維积分．

高維的数值积分

徐利治著

*

科学出版社出版（北京朝阳門大街 117 号）

北京市书刊出版业营业許可証出字第 061 号

中国科学院印刷厂印刷　新华书店总經售

*

1963年8月第一版　书号：2780　字数：121,000

1963年8月第一次印刷　开本：850×1168 1/32

（京）0001—4,000　印张：4 3/4

定价：0.80元

序

1961 年間，著者曾为吉林大学計算数学专业五年級生及部分进修教师开設了一門选修課程，这本小书便是当时所用講义的一个加工品. 这书采用了一个紧縮的簡称，它的詳名应該是“高維积分的数值計算方法”. 书的內容有八章，主要是重点地介紹近十余年来国內外数学工作者們在这一方向上所貢献的成果. 从第四章至第八章还重点地总結了著者自己的若干工作.

我們知道，高維积分数值計算法的研究，由于种种原因，近年来显得十分活跃，成果也极为丰富(見本书引言). 因此理应作番总結，以便給有志于这一門学間的人，提供一个起点，而作出更多更好的工作来. 不过这一本书还不可能完全胜任这个任务. 假如这本小书的題材，能对优秀的技术科学工作者們及从事計算方法研究的人有所帮助，那将是著者的极大愉快. 同时讀者們对本书的任何批評意見，著者亦将以感激的心情来对待.

这本书幷不論述无旁維积分的估值問題与 Monte Carlo 方法. 著者認为，特别是对于后者应該用专书来論述，而目前还缺乏这样的主观条件.

讀者們大概都已見到华罗庚教授、王元先生的有趣著作“积分的近似計算”. 显然該书的題材內容和本书是很不相同的. 只有在本书的第六章中，才在个别的場合出現着彼此类似的題材；而且两书題材的性質亦是各异其趣.

在整理謄写本书的原稿时，計算数学专业的年青同志李百煌、孙革、滕德貴及助教王仁宏等曾給予协助；計算数学教研室对开設本課程以至著述本书均予以支持. 这是应該在这里向他們表示感謝的.

徐 利 治　　1963 年 6 月

于长春吉林大学

目　　錄

引　言

最近十余年来，特别是从 1956 年以来，高維数值积分方法的研究，已越来越引起人們的注意．一些专門性杂志上出現的成果之多，也远非 1950 年前的情况可比．就目前而論，例如在苏联、美国、英国以及东欧某些国家，都有一些数学工作者致力于这方面的专题研究．在我們国內，有关这一方面的研究工作，也在与时俱增．

很明显，人們对于高維积分数值計算的研究兴趣的增长，并不是偶然的．这里，除了近代統計数学、流体力学、理論物理等領域中不断出現的积分計算問題引起刺激之外，Monte Carlo 方法的发展，也提供了間接的推动力．此外，如我們所知，高維求积公式又是一种近似求解高維积分方程及其它数学物理方程的有效工具之一，因此对这工具本身的研究，人們也就自然产生了很大的兴趣．

然而，高維数值积分法的研究要比定积分的情形困难得多．这主要是由于下列几个原因：(一)函数的定义域或积分域可以是各种各样的，而区域形状的多样性与不規則性，造成了“計值点”配置与选择上的困难．(二)現有的多元函数插值法理論还很不成熟，因而还不可能用来构造各种高維区域上的“插值型求积公式”，特别是带有余項的求积公式．(三)現有的多元直交多項式理論还很不完备，因而，例如古典的 Gauss 型求积公式理論迄今还不可能一般地推广到高維积分的情形．(四)通常的矩陣代数与二次形式的理論，只能用来分析低次代数精确度的求积公式的构造問題．要想研究高于三次以上的求积公式，現有的代数工具还感到很不够用．

指出上述的情况，也就使我們看出，高維数值积分方法的研究

內容，要远比定积分的情形丰富得多；而且在一定程度上，它的研究进展多少依賴于别种数学工具的发展程度.

大体說来，在高維数値积分法的研究中，人們主要注意三个方面的問題：一是关于各种类型的求积公式的构造問題；二是关于誤差余項的估計問題；三是有关应用方面的問題（例如应用現成的求积公式去近似求解积分方程等問題）. 特别是，关于构造各种近似求积公式的問題，近年来研究得最为活跃，出現的成果也最丰富.

在本书中，我們以极大的篇幅討論了各种类型的求积公式的构造方法与誤差估計問題. 从章节的标題中当可約略看出各章內容所涉及的大致范围. 粗略說来，前三章所講述的，主要是"代数方法"与"算子方法". 其中某些方法特别适用于对称的积分区域与乘积区域，并和"代数精确度"的概念相联系. 但这些方法本身并不包含余項估計. 第四章所講述的"降維法"和二維求积公式的一种构造法，原則上适用于任意形状的积分域，而前者是一种解析性質的方法. 第五、第六两章专討論高維矩形区域上的求积程序与誤差估計. 这里所考虑的求积程序都要用到大量的計値点，通常称之为"拟 Monte Carlo 积分法"；因此和前面几章所討論的近似求积公式，在构造原則上是完全不同的. 特别是第六章，討論的是多元周期函数在周期区間上的累次积分的求积程序，无論是对象或方法都具有更大的特殊性（因此，在这里应該順便向讀者指出：不可以把这章所討論的問題看作是高維数値积分法中的主要問題，虽然方法与結果还是値得注意的）. 第七章专討論誤差上限的精确計算問題. 对于給定的求积公式（具有指定的"代数精确度"）和某种函数类，我們建立了关于誤差上限的精确表示式. 这一章所敍述的方法，可說是具有相当的一般性. 本书的最后一章（即第八章），主要是討論含有一个或数个参数的"振蕩型积分"的計算問題，指出了在一般情况下可以把这些較难計算的积分轉化为通常的高維积分. 換句話說，利用高維积分的数値計算方法，可以較簡便地計算"振蕩型积分"的近似值. 而且，利用我們的展开定理可以把近似計算的准确性提高到任意高度.

本书在陈述形式上，偏重于各种方法原理及其意义的闡明. 在論証定理的过程中，常常略去某些对成熟的讀者說来无需一一布列的簡单算式. 另一方面，各章中也附有少量的例題，以資說明方法原則的应用. 估計每一个具有良好的数学分析学訓練与高等代数学知識的讀者，都将能够較順利地閱讀这本书. 当然，本书的个别章节也还涉及到数論与有限差分学的某些知識，这对于有些讀者說来，是需要自己去补充那些知識的.

本书中还述及某些尙未解决得很好的問題，这可以作为讀者們进一步去研究的題材. 此外，每一章之末，都附有"簡单总結"，这是供讀者复习思考时参考的.

至于各章有关的参考文献，都一律置于书末. 希望有志于研究高維积分数值計算的讀者們，結合本书的閱讀，随时去查閱所开列的参考文献，并宜經常注意一些专业性杂志上不断出現的新文献.

第一章

关于高維求积公式的某些簡单定理

在本章及下一章中，我們将概述 Hammer，Wymore，Stroud 等人的某些工作(它們全部发表在 1957 至 1960 年的美国"計算数学杂志"上)．其中有些結果只是一些十分簡单的命題，但由于有相当的实用价值，所以值得在这里加以介紹(参考文献[1]—[4])．

§1. 变换定理

設 R 是 n 維欧氏空間 E_n 中的一个 n 維区域，$x\equiv(x^{(1)},\cdots,x^{(n)})$ 表示 E_n 的点向量．对于給定的权函数 $W(x)$ 和某一类函数 $\{f\}$ 而言，假如我們有如下形式的近似积分公式

$$\int_R W(x)f(x)dx\approx\sum_{j=1}^{m}a_jf(x_j),\tag{1}$$

此处 dx 表 E_n 中的 n 維体积元素，a_j 是 m 个固定的"求积系数"(实值或复值)，而 $x_1,\cdots,x_m$ 为属于 f 定义域中的固定的"計值点"．特别，R 可以是一个有界閉域，而 $W(x)$ 和 $f(x)$ 是区域上的連續函数．

对于每个給定的 f，下列的差称之为求积公式 (1) 所相应的"誤差泛函"：

$$E(f)=\sum_{1}^{m}a_jf(x_j)-\int_R W(x)f(x)dx.\tag{2}$$

有时为了表明区域 R，我們記 $E(f)=E(R,f)$．

假設 S 是 E_n 中的另一区域，并設存在某个連續变换 $J:y==Jx(x\in R)$ 使得 S 由 R 变换而来，而 J 的 Jacobian 行列式为連續函数且具有正的絕对值

$$|J| = \left|\frac{\partial(y)}{\partial(x)}\right| > 0, \quad (x \in R).$$

在这样的情形下，J 是一个"一对一的变换"，因而存在逆变换 $J^{-1}: x = J^{-1}y(y \in S)$. 又設

$$W_1(y) = W_1(Jx) = W(x).$$

則对于 S 区域上的每一連續函数 $g(y)$ 显然有

$$\int_S W_1(y)g(y)dy = \int_R W_1(y)g(y)|J|dx. \tag{3}$$

記 $y_j = Jx_j(j = 1, \cdots, m)$, $|J_j| = |J|_{x=x_j}$, 則于(2)中取 $f \equiv |J| \cdot g(y) \equiv |J| \cdot g(Jx)$时可知有

$$E(R, |J|g) = \sum a_j|J_j|g(y_j) - \int_R W(x)|J|g(y)dx =$$

$$= \sum b_j g(y_j) - \int_S W_1(y)g(y)dy,$$

此处 $b_j = a_j|J_j|(j = 1, \cdots, m)$. 显然上面的最后一式可以看作是 S 区域上某个求积公式的誤差泛函. 这样一来，我們便总結出如下的簡单命題:

变换定理. 設 S 区域上的求积公式

$$\int_S W_1(y)g(y)dy \approx \sum_1^m b_j g(y_j) \tag{4}$$

所相应的誤差泛函为

$$E(S, g) = \sum_1^m b_j g(y_j) - \int_S W_1(y)g(y)dy, \tag{5}$$

則有下列关系式

$$E(S, g) = E(R, |J|g). \tag{6}$$

这定理表明在区域 R 上的每个具有型式(1)的求积公式，都对应地存在一个具有型式(4)的求积公式(而后者的积分区域为 S)，而且，两者的誤差泛函之間成立着如(6)所示的关系式.

推論 1. 若 $|J|$ 在 R 上为一常数，則 $E(S, g) = |J| \cdot E(R, g)$. 此时若 $E(R, g) = 0$, 則 $E(S, g)$ 亦同时成为 0 (注意: 当 J 是一个非奇异綫性变换——仿射变换时，$|J|$ 便是一常数).

推論 2. 若在(1)中令 $W(x)=W_1(y)|J|$, $f(x)=g(y)$, 則得

$$E(S, g) = E(R, g) = \sum_{1}^{m} a_j g(y_j) - \int_S W_1(y) g(y) dy. \tag{7}$$

上述的变换定理及其推論可用以导出多种多样区域上的求积公式. 例如,取 J 为仿射变换时,便可把球域上的求积公式变换成椭球区域上的求积公式;而且根据推論 1, 可以断言它們还具有同样的代数精确度. 亦卽假如某球域上的求积公式对所有不高于 k 次的 n 元代数多項式为精确成立时 (相当于 $E(R, g) = 0$), 那末經过变换后所得到的椭球域上的求积公式亦必对一切不高于 k 次的多項式为精确成立(相当于 $E(S, g \cdot |J|) = 0$). 事实上, 旣然 J 为仿射变换, 故当 g 为多項式时,則 $g \cdot |J|$ 与 g 具有完全相同的次数, 从而 $E(R, g) = 0$ 与 $E(S, g \cdot |J|) = 0$ 表征着完全相同的代数精确度.

§2. 乘积定理

設 R_1 与 R_2 为低于 n 維的空間 E_{r_1} 与 E_{r_2} 中的两个区域, 而 $r_1 + r_2 = n$. 又設 $R = R_1 \times R_2$ 为 R_1 与 R_2 的乘积区域. 因而每一点 $x \in R$ 可記作

$$x \equiv (y, z)(y \in R_1, z \in R_2).$$

相应的誤差泛函可以記作

$$E(R_1, f_1) = \sum a_i f_1(y_i) - \int_{R_1} W_1(y) f_1(y) dy, \tag{8}$$

$$E(R_2, f_2) = \sum b_j f_2(z_j) - \int_{R_2} W_2(z) f_2(z) dz. \tag{9}$$

对于定义在 $R=R_1 \times R_2$ 上的連續函数 $f(x)=f(y, z)$ 有誤差泛函

$$\begin{aligned}E(R, f) &= \sum\sum a_i b_j f(y_i, z_j) - \int_{R_1}\int_{R_2} W_1(y) W_2(z) f(y, z) dy dz = \\ &= \sum b_j \sum a_i f(y_i, z_j) - \sum b_j \int_{R_1} W_1(y) f(y, z_j) dy + \\ &+ \sum b_j \int_{R_1} W_1(y) f(y, z_j) dy - \int_{R_1}\int_{R_2} W_1(y) W_2(z) f(y, z) dy dz = \\ &= \sum b_j E(R_1, f(y, z_j)) + \int_{R_1} W_1(y) E(R_2, f(y, z)) dy,\end{aligned}$$

由于对称性又可得

$$E(R,f)=\sum a_iE(R_2,f(y_i,z))+$$
$$+\int_{R_2}W_2(z)E(R_1,f(y,z))dz. \tag{10}$$

于是总結出如下的簡单命題:

乘积定理. 誤差泛函 $E(R_1\times R_2,f(y,z))$ 可通过关于 $E(R_1,f)$ 与 $E(R_2,f)$ 的某种綫性运算(綫性組合或积分)来表示. 其具体形式如(10)或其对称形式所示.

下面两个簡单而有用的推論值得注意:

推論 1. 若 $E(R_1,f(y,z))=0$ (对每个 $z\in R_2$), 且 $E(R_2,f(y,z))=0$ ($y\in R_1$), 則 $E(R,f)=0$, 而此时 R 区域上的求积公式对 f 为精确成立.

假如 F_1 是以 R_1 为定义域的函数类, F_2 是以 R_2 为定义域的函数类, 那末 $F=F_1\times F_2$ 便代表 $R_1\times R_2$ 区域上的函数类. 換言之, F 中包含着所有这样的函数 $f(y,z)$, 而对每个固定的 $z\in R_2$, $f(y,z)\in F_1$; 对每个固定的 $y\in R_1$, $f(y,z)\in F_2$.

推論 2. 若对 $f_1\in F_1$ 恆有 $E(R_1,f_1)=0$, 对 $f_2\in F_2$ 恆有 $E(R_2,f_2)=0$, 則必有

$$E(R_1\times R_2,f)=0,\quad (f\in F_1\times F_2). \tag{11}$$

事实上, 这由乘积定理或(10)式即可得出. 显然这推論的主要意思表明了这样一个事实: 若(8), (9)中的求积公式精确成立(即誤差为 0), 則在乘积区域 $R_1\times R_2$ 上的求积公式

$$\iint\limits_{R_1\times R_2}W_1(y)W_2(z)f(y,z)dydz\approx\sum\sum a_ib_jf(y_i,z_j) \tag{12}$$

亦必精确成立(亦即 $E(R_1\times R_2,f)=0$).

此外, 如下的簡单命題, 有时也有参考价值:

命題. 若函数类 F 和 G 分别以 R_1 和 R_2 为定义域, 而且其中的函数都能分别以基底函数

$$f_1,\cdots,f_p;\quad g_1,\cdots,g_q$$

的綫性組合表示之, 則 $F\times G$ 中的一切函数必是以 f_ig_j 为基底的

綫性組合.

証. 若$h=\sum_i\sum_j c_{ij}f_ig_j$($c_{ij}$为常数系数),則自然有$h\in F\times G$. 現在需要証明的是，如果$h\in F\times G$，則$h$必是那些$f_ig_j$的綫性組合. 首先，固定$z\in R_2$，則可知$h=\sum_i a_if_i$，其中$a_i$是含有参数$z$的唯一确定的数値（亦即为$z$的唯一确定的函数). 同理，可表$h=\sum_j b_jg_j$，而$b_j$是参变量$y$的唯一确定的函数. 故有如下的等式:

$$\sum_i a_if_i(y)=\sum_j b_jg_j(z).$$

根据$\{f_i\}$的綫性无关性，自然可选取R_1中的p个定点$y_1, y_2, \cdots, y_p$使得行列式

$$\det[f_i(y_j)]\neq 0.$$

事实上，由綫性无关性的定义可知

$$\lambda_1f_1(y)+\cdots+\lambda_pf_p(y)\equiv 0\Longleftrightarrow\lambda_1=\cdots=\lambda_p=0.$$

这表明只有零向量$(\lambda_1, \cdots, \lambda_p)=(0, \cdots, 0)$才和一切向量$(f_1(y), \cdots, f_p(y))$相正交. 换言之，所有形如$(f_1(y), \cdots, f_p(y))$的向量构成$p$維空間$E_p$. 因此自然存在$p$个綫性无关向量$(f_1(y_j), \cdots, f_p(y_j))$, $(j=1, \cdots, p)$使得$\det[f_i(y_j)]\neq 0$. 于是代入得

$$\sum_i a_i(z)\cdot f_i(y_k)=\sum_j b_j(y_k)\cdot g_j(z),\quad (k=1, \cdots, p).$$

上式显然是$z\in R_2$的恆等式，故解出a_i便得到$a_i=\sum_j c_{ij}g_j(z)$，此处c_{ij}为唯一确定的常数. 因此可知

$$h=\sum_i a_if_i=\sum_i\sum_j c_{ij}g_j(z)f_i(y).$$

例 1. Gauss 的 4 点公式对不超过 7 次的单变数代数多項式是精确成立的. 因此根据推論 2 或(11)式，可見乘积区域上的 16 点求积公式

$$\sum_1^4\sum_1^4 a_ia_jf(x_i, x_j)\approx\iint_R f(x, y)dxdy \tag{13}$$

对于一切形如$f=\sum c_{ij}x^iy^j(0\leqslant i\leqslant 7, 0\leqslant j\leqslant 7)$的二元多項

式必精确成立，此处 R 为二維正方区域，a_i 为 Gauss 求积系数，x_i 为 Legendre 多項式 $P_4(x)$的零点(分布于$(-1,1)$内). 类似地可得出立方区域上的 64 点求积公式，它对于一切三元多項式

$$f=\sum c_{ijk}x^iy^jz^k \quad (0\leqslant i,\ j,\ k\leqslant 7)$$

为精确成立.

例 2. Laguerre 的 3 点求积公式(以 $(0,\ \infty)$ 为区間，以 e^{-x} 为权函数)系对一切 5 次多項式为精确成立，因而組合而成的 9 点求积公式

$$\sum_1^3\sum_1^3 a_ia_jf(x_i,\ x_j)\approx\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-(x+y)}f(x,\ y)dxdy \qquad (14)$$

便对一切形如 $f=\sum\sum_{i\leqslant 5,j\leqslant 5} c_{ij}x^iy^j$ 的二元多項式为精确成立，此处 x_i 为 Laguerre 多項式 $L_3(x)$ 的零点. 經过仿射变換(非奇异綫性变換)显然还可将公式(14)改換成无穷平面扇形域上的求积公式.

显然易見，当 Gauss 求积公式与 Laguerre 求积公式組合起来时，可获得无穷带形区域上的求积公式；当 Laguerre 公式与 Hermite 求积公式相結合时，则可得出半平面区域上的求积公式. 同理，一个平面有界区域上的求积公式，可借助于乘积定理导出柱形域上的求积公式. 至于它們以代数多項式次数来衡量的“代数精确程度”，則可按推論 2 或 3 来加以判断(例如象例 1 及例 2).

附記. P. Davis 和 P. Rabinowitz (1956，[5])曾經作过一次关于应用 Monte Carlo 方法計算多重积分的实驗，他們取 $f=$ $=\exp(x_1x_2x_3x_4)$为例，用 Monte Carlo 方法計算此函数展布于 4 維单位正方体上的积分值. 但是采用 $2^{15}=32768$ 个計值点所得的結果，其誤差却要比 Hammer 等利用 Gauss 二点公式的四次乘积公式(即 16 点公式)所产生的誤差大一倍. 由此看来，利用古典求积公式有时是更为有效的. 正因为这里所遇到的被积函数，恰好能展成 $x_1x_2x_3x_4$ 的冪級数，因此利用 Gauss 公式自然是最为合适的.

§3. 对称求积公式的构造原则

在 Hammer-Wymore (1957, [1])的工作中,曾首先指出过构造对称区域上的近似求积公式的一个普遍原則. 他們也曾利用这个原則性的方法去构造了一系列具体公式.

設 R 是一个 n 維区域. 假如 R 包含一点 x 时, 它必同时包含 x 的一切"对称点"(亦即交换 x 的坐标分量并添加正負号后所得的一切异于 x 的点). 这样便称 R 为对称区域.

显然,一般說来,对称区域 R 中的每一个点及与其对称的点所构成的"对称点組"共包含 $2^n\cdot n!$ 个点. 例如在三維空間区域中,通常每个对称点組便含 48 个点(在特殊情况下,也可以少于 48 个点).

同理,一个数值求积公式(求积和)中所用到的計值点,假如能划分为若干对称点組,且同一組內諸点所对应的求积系数都相等,那末便称該公式为对称的求积公式.

令 $t_1, t_2, \cdots, t_n$ 表 E_n 中一点的 n 个坐标(变量),則 $t_1^{a_1}\cdots t_n^{a_n}$ 便称为 n 元独項式,而 $a_1, \cdots, a_n$ 称为相应的次数或方冪(非負整数). 根据对称区域的定义,容易看出下列的定理为眞:

定理 1. 每一个包含奇次方冪的多元独項式在对称区域上的积分值恆为零. 凡只含偶次方冪的多元独項式在对称区域上的积分值只依賴于方冪的数值組,而与它們的排列順序无关.

事实上,由于区域的对称性,含奇次方冪的那个坐标(变量)在积分区域中有正有負,故在整个区域上的积分值相互抵消为零. 至于定理中的第二句断語,則由多重积分的定义方式即可知其为眞.

定理 2. 設 R 为对称区域,而 $\int_R f(x)dx \approx \sum a_j f(x_j)$ 为对称的求积公式(右端为对称求积和),那末使得

$$\sum a_j f(x_j) - \int_R f(x)dx = 0 \tag{15}$$

对一切次数 $\leqslant 2k+1$ 的 n 元多項式恆成立的充分必要条件是,

公式(15)对于所有如下形式的独項式

$$t_1^{2k_1}t_2^{2k_2}\cdots t_n^{2k_n}\quad\begin{pmatrix}0\leqslant k_1\leqslant k_2\leqslant\cdots\leqslant k_n\\ k_1+k_2+\cdots+k_n\leqslant k\end{pmatrix}$$

都精确成立.

这里为什么不必考虑含奇次方幂的独項式呢？原因是，当含有奇次方幂的独項式代入对称的求积和 $\sum a_j f(x_j)$时,其值必为零,因而(15)恆成立.

上述的定理 2 可作为构造对称区域上的对称求积公式的指导原則. 首先是在对称区域 R 內,設定一批对称分布的計值点 x_j,使所有属于同一个对称点組的計值点所相应的权系数（求积系数）a_j 都相同. 然后将一切只含偶次方幂的独項式 $t_1^{2k_1}t_2^{2k_2}\cdots t_n^{2k_n}$ 代入(15)式,而得出一組以 x_j 与 a_j 为未知元的代数方程式. 最后从这个方程組中确定 x_j 与权系数 a_j 的值,便造出一个对称的求积公式

$$\int_R f(x)dx\approx\sum a_j f(x_j).\tag{16}$$

例. 設 R 是三維空間中以原点(0, 0, 0)为中心的边长为 2 的正立方体. 假定我們的目标是要去构造一个对所有不高于 7 次的三元多項式恆精确成立的对称求积公式,那末根据定理 2，只須考虑該公式对如下的七个独項式

$$1,\ x^2,\ x^4,\ x^2y^2,\ x^6,\ x^4y^2,\ x^2y^2z^2$$

成为精确等式卽可. 让我們設定如下的对称点組及权系数:

$$(x_1, 0, 0),\ a_1(6);\quad (x_2, x_2, 0),\ a_2(12);$$
$$(x_3, x_3, x_3),\ a_3(8);\quad (x_4, x_4, x_4),\ a_4(8).$$

括号中的数字代表个数. 例如，以$(x_1, 0, 0)$为代表的对称点組包含

$$(\pm x_1, 0, 0),\quad (0, \pm x_1, 0),\quad (0, 0, \pm x_1),$$

故連正負号一并算在內,共有 6 个对称点,它們相应的权系数都是 a_1.

为簡便計，記 $u_1=x_1^2$, $u_2=x_2^2$, $u_3=x_3^2$, $u_4=x_4^2$，于是将七个独項式依次代入(15),便得到如下的方程組