GAOZHONG SHUXUE AOLINPIKE TONGBU JIAOCAI

高中数学

刘凯年 著

综合卷

奥林匹克

同步教材

西南师范大学出版社

GAOZHONG SHUXUE AOLINPIKE TONGBU JIAOCAI

高中数学

综合卷

刘凯年 著

奥林匹克

同步教材

西南师范大学出版社

责任编辑　胡小松
封面设计　王　煤

高中数学奥林匹克同步教材(综合卷)

刘凯年　　著

西南师范大学出版社出版、发行
(重庆　北碚)
重庆科情印务有限公司印刷
开本:850×1168　1/32　印张:9.5　字数:240 千
2000 年 6 月第 1 版　2001 年 1 月第 2 次印刷
印数:10 001～15 000
ISBN 7-5621-2381-0/G・1408

定价:11.00 元

作者简介

刘凯年，重庆师范学院数学系教授，硕士生导师，课程与教学论教研室主任。中国数学奥林匹克高级教练，全国初中数学联赛组委会委员。重庆市数学会理事，重庆市数学会普委会副主任，重庆市数学奥林匹克学校总教练，重庆市教育学会中学数学专业委员会常务理事，《数学教学通讯》编委。

“竞赛数学课程建设”课题获全国普通高校优秀教学成果四川省二等奖。获曾宪梓教育基金会1999年高等师范院校优秀教师奖。所指导的学生何旭华在第37届国际中学生数学竞赛中获得金牌。

主要著述有《竞赛数学解题思想研究》、《奥林匹克数学教程》、《几何变换》、《也谈Fermat-Steiner问题》、《圆周上有理点的分布》等。

奥林匹克金、银、铜牌得主指导教师

部分作者简介

吴国庆

多位金、银、铜牌得主的指导教师之一
担任数十届国际化学奥林匹克竞赛中国队领队
第 27 届国际化学奥林匹克学术委员会主任和命题组组长
中国化学会科普工作委员会主任
全国化学竞赛命题组组长
中国化学会理事
中国化学会化学教育委员会副主任
教育部高师教改指导委员会委员兼化学学科组组长

曹居东

多位金、银牌得主的指导教师之一
北京市化学奥林匹克竞赛集训队主教练
中国化学会理事
中国化学会化学教育委员会副主任
中国化学会有机化学学科委员会委员
教育部高校有机化学及高分子专业指导组成员

严宣申	多位金、银、铜牌得主的指导教师之一 第 27 届、第 28 届、第 29 届 国际中学生化学奥林匹克竞赛国家集训队主教练 全国化学竞赛命题组成员
轩植华	多位金、银、铜牌得主的指导教师之一 第 28 届、第 29 届、第 30 届 国际中学生物理奥林匹克竞赛国家队主教练 第 28 届、第 29 届、第 30 届 国际中学生物理奥林匹克竞赛国家队教学领队
缪钟英	第 26 届、第 28 届国际中学生物理奥林匹克竞赛 2 位金牌得主的指导教师之一 全国中学生物理奥林匹克竞赛委员会委员
范小辉	第 26 届 国际中学生物理奥林匹克竞赛 1 位金牌得主的指导教师 全国“五一”劳动奖章获得者
刘凯年	第 37 届国际中学生数学奥林匹克竞赛 金牌得主的指导教师 全国初中数学联赛组委会委员
施　华	第 29 届、第 30 届 国际中学生化学奥林匹克竞赛 2 位银牌得主的指导教师

卷首语

亲爱的读者，我们正在迈向一个崭新的世纪，怎样树立创新意识，跟上时代前进的步伐，已成为广大青少年面临的富有挑战性的课题。面对世界范围方兴未艾的奥林匹克竞赛，我们把视角投向挖掘广大青少年的创新潜力，推崇发现、发明、革新、开拓、进取的百折不挠的奥林匹克精神。该系列教材在选材和编写结构上，对推进中学学科素质教育，拓展中学生的知识视野，训练中学生的实验操作能力以及培养中学生的社会活动参与意识等方面做出了有益的尝试，并在保持该系列教材初中版优势的基础上再创特色：

同 步 与课堂教学同步进行初赛训练，使竞赛训练既是课堂教学的巩固和延伸，又有利于中学生参与高考角逐。

递 进 知识水平由浅入深、循序渐进地拓宽和提高，能力训练由初赛的热身训练（见各分册）自然过渡到初赛实战训练（见综合卷），并在保持每分册相对

独立的基础上体现出较强的系统性。

融 合 知识生长点注重与新教学思想和新课程标准融合,能力训练注重与社会生活和科研情景融合。

新 颖 人有我新的魅力所在

——《高中数学奥林匹克同步教材》注重数学方法的渗透,提高数学竞赛的综合素质能力和应变技能。

——《高中物理奥林匹克同步教材》专题点拨竞赛难点,浓缩物理竞赛解题方法精华,启迪发展多向思维。

——《高中化学奥林匹克同步教材》追踪最新竞赛动态,提问式地分析归纳重点、难点、热点,独具新颖、直观的思维训练匠心。

——《高中英语奥林匹克同步教材》知识水平高于现行人教版教材,能力训练模拟新高考题型,其综合卷与即将实施的新课程标准接轨,听力试题配有录音磁带。

该系列教材凝结着一大批为我国奥林匹克竞赛事业做出成绩的教练员们的热情与心智,他们为了使奥赛训练的宝贵经验连同他们对奥林匹克竞赛内涵的深刻理解尽可能完美地跃然纸上,不辞辛劳地几易其稿,用爱与心的奉献沐浴奥林匹克竞赛的花蕾。

亲爱的读者,我们衷心祝愿高中奥林匹克同步教材伴你走向成功!

前　言

1985年，中国数学会派出两名选手参加了在芬兰举办的第26届国际数学奥林匹克(IMO)，从此揭开了中国数学竞赛活动的新的一页。在很短的时间内，我国在IMO中取得了令世界瞩目的成绩。从第26届到第40届国际数学奥林匹克，中国代表队7次获得团体总分第一名，3次获得第二名。这样好的成绩归功于选手和各级数学奥林匹克教练员，也是全国广大中学师生在大面积提高数学教学质量的基础上，各地广泛开展数学竞赛活动的结果。

作为课堂学习的补充，数学竞赛活动在扩大知识领域、开发智力、培养能力、激发学生学习兴趣、开拓视野、交流信息，以及激励学生的爱国热情、树立为科学献身的志向等方面都起着积极的促进作用。事实证明，大量在数学竞赛活动中涌现出来的优胜者，他们在学校里也是各科成绩拔尖的姣姣者，品学兼优的好学生。数学竞赛培训产生的强大素质教育功能已普遍为广大中学师生和社会各界所认同。可以说，数学竞赛活动(以及培训活动)已成为中学数学教育活动的一个有机组成部分。

为适应高中学生在牢固灵活地掌握数学基础知识的基础上系统地学习竞赛数学知识；学习并掌握大量现代数学中的数学思想方法，

我们编写了这套《高中数学奥林匹克同步教材》。教材分“第一册”、“第二册”和“综合卷”。第一册和第二册为系统学习基础知识、基本技能使用;综合卷更加突出数学奥林匹克的思维训练功能,作系统学习后的强化提高培训使用。

数学是锻炼思维的体操,奥林匹克数学更是如此。本教材立足基础,突出数学思想方法,结合学生课堂学习进度,注意学生各阶段接受能力,注重启迪数学思维,适合不同层次的学习需要。竞赛能力训练及解答为高中数学竞赛培训班使用本教材提供了极大的方便。

本套教材可供各级数学奥林匹克学校(培训班)作高中数学竞赛培训教材使用,也可供教练员和教师参考。

编　者

目 录

MU LU

第 1 课

函数与函数方程

【竞赛知识点拨】

含有未知函数的等式叫函数方程，使等式成立的函数叫做函数方程的解. 求解函数方程通常有换元法、递归法、数学归纳法以及一些特殊的解法. 有关函数方程的问题涉及知识面宽、灵活性强，有较大的难度.

【竞赛例题剖析】

【例 1】 令 $A=(-\infty,0)\cup(0,1)\cup(1,+\infty)$，设函数 $f(x)$ 在 A 上定义，满足条件：对任意 $x\in A$，

$$f(x)+f\left(\frac{x-1}{x}\right)=1+x. \tag{1}$$

求 $f(x)$.

【分析】 需要利用变量代换消去 $f\left(\frac{x-1}{x}\right)$.

【解】 在(1)式中令 $u=\frac{x-1}{x}$，得 $x=\frac{1}{1-u}$，

所以 $f\left(\frac{1}{1-u}\right)+f(u)=1+\frac{1}{1-u}$.

易知仍有 $u\in A$，

所以 $$f\left(\frac{1}{1-x}\right)+f(x)=1+\frac{1}{1-x}. \tag{2}$$

再令 $u=\frac{1}{1-x}$，得 $x=\frac{u-1}{u}$，代入(1)式，得

$$f\left(\frac{u-1}{u}\right)+f\left(\frac{1}{1-u}\right)=1+\frac{u-1}{u},$$

所以 $$f(\frac{x-1}{x})+f(\frac{1}{1-x})=1+\frac{x-1}{x}. \quad (3)$$

(1) + (2) − (3),得

$$2f(x)=\frac{1+x^2-x^3}{x(1-x)},$$

所以 $$f(x)=\frac{1+x^2-x^3}{2x(1-x)} \quad (x\in A).$$

【例 2】 已知 $f(n)$ 是在正整数集 $\mathbf{N}$ 上定义并在 $\mathbf{N}$ 上取值的函数,对任意 $n\in\mathbf{N}$,$f(n+1)>f(f(n))$,求 $f(n)$.

【解】 显然,对正整数 m,有 $f(m)\geqslant 1$,假设当 $m\geqslant n(n\in\mathbf{N})$ 时,有 $f(m)\geqslant n$ 成立,则当 $m\geqslant n+1$ 时,$m-1\geqslant n$,$f(m-1)\geqslant n$.

所以 $f(m)>f(f(m-1))\geqslant n$,

即 $f(m)\geqslant n+1$ 也成立.

所以对任意 $n\in\mathbf{N}$,只要正整数 $m\geqslant n$,则恒有 $f(m)\geqslant n$ 成立. 特别地,$f(n)\geqslant n$.

因为 $f(n+1)>f(f(n))\geqslant f(n)$,

所以 $f(n+1)>f(n)$,$f(n)$ 严格单调增. 若有某个 $n_0\in\mathbf{N}$,使 $f(n_0)>n_0$,则 $f(n_0)\geqslant n_0+1$,所以 $f(f(n_0))\geqslant f(n_0+1)$,这与 $f(n_0+1)>f(f(n_0))$ 相矛盾.

综上,对任意 $n\in\mathbf{N}$,恒有 $f(n)=n$.

【例 3】 令 $\mathbf{N}_0=\mathbf{N}\cup\{0\}$,函数 $f:\mathbf{N}_0\to\mathbf{N}_0$,对任意 $n\in\mathbf{N}_0$,有

$$f(f(n))+f(n)=2n+3,$$

求 $f(n)$.

【分析】 $f(n)$ 在 $\mathbf{N}$ 中取值,$f(f(0))+f(0)=3$,易知 $f(0)\neq 0$,且 $f(0)\leqslant 3$,假若 $f(0)=1$,则有 $f(1)=2$,从而又有 $f(2)=3$,……,猜想:是否恒有 $f(n)=n+1$?

【解】 设 $f(0)=n_0$,

则 $f(n_0)+n_0=3$,$1\leqslant n_0\leqslant 3$,

$f(f(n_0))+f(n_0)=2n_0+3$.

所以 $f(3-n_0)=3n_0$.

从而又有

$f(f(3-n_0))+f(3-n_0)=2(3-n_0)+3$,

所以 $f(3n_0)=9-5n_0$.

所以 $n_0<2$.

所以 $n_0=1$,即 $f(0)=1$.

所以 $f(1)=2$.

假设当 $n=k(k\in\mathbf{N})$ 时,有

$f(k)=k+1$,

则 $f(f(k))+f(k)=2k+3$,

所以 $f(k+1)=k+2$.

故对任何 $n\in\mathbf{N}_0$,有

$$f(n)=n+1.$$

【例4】 函数 $f:\mathbf{Q}\to\mathbf{Q}$,满足:

(1) $f(1)=2$;

(2) 对任意 x、$y\in\mathbf{Q}$,有

$$f(xy)=f(x)f(y)-f(x+y)+1.$$

求 $f(x)$.

【分析】 当 $y=1$ 并注意到 $f(1)=2$,可得当 $x\in\mathbf{Z}$ 时 $f(x)$ 的表达式,再考虑有理数与整数的关系则问题不难解决.

【解】 令 $y=1$,有

$f(x)=2f(x)-f(x+1)+1$,

$f(x+1)=f(x)+1$,

所以对任意 $x\in\mathbf{Z}$,有

$f(x)=x+1$.

对任意 $\frac{m}{n}\in\mathbf{Q}(m,n\in\mathbf{Z},n\neq0)$,令 $y=n$,有

$f(m)=f(\frac{m}{n})(n+1)-f(\frac{m}{n}+n)+1$,

因为对 $x\in\mathbf{Q}$,有

$f(x+1)=f(x)+1$,

所以 $f(\frac{m}{n}+n)=f(\frac{m}{n})+n$.

所以 $m+1=f(\frac{m}{n})(n+1)-f(\frac{m}{n})-n+1$.

所以 $f(\frac{m}{n})=\frac{m}{n}+1$.

故对一切 $x\in\mathbf{Q}$, $f(x)=x+1$.

【评注】 代入特殊值,利用函数方程隐含的递归关系探索函数性质,有利于确定求解方向.用数学归纳法来证明我们的猜想也是函数方程求解中常用的手段.

【例 5】 令 $A=(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$,求定义在 A 上的函数 $f(x)$,满足条件:

(1) 对任意 $x\in A$, $f(x)=xf(\frac{1}{x})$;

(2) 对任意 $x,y\in A$,且 $x+y\neq 0$,

$$f(x)+f(y)=1+f(x+y).$$

【解】 $f(x)=xf(\frac{1}{x})$, $f(-x)=-xf(-\frac{1}{x})$,

在(2)中,令 $y=1$,得

$f(x)+f(1)=1+f(x+1)$;

再用 $-x$ 换 x, $x+1$ 换 y,得

$f(-x)+f(x+1)=1+f(1)\quad(x\neq 0, x\neq -1)$,

从而有

$$f(x)+f(-x)=2. \qquad ①$$

又有 $f(\frac{1}{x})+f(-\frac{1}{x})=2$,

$$\begin{aligned}所以\ f(x)&=xf(\frac{1}{x})=x(2-f(-\frac{1}{x}))\\&=2x-xf(-\frac{1}{x})\\&=2x+f(-x).\end{aligned}$$

所以 $$f(x)-f(-x)=2x. \qquad ②$$

由①、②,得

$$f(x)=x+1.$$

【例 6】 函数 $f(n)$ 在 $\mathbf{N}$ 上定义且满足条件: $f(n+2)+f(n+1)-2f(n)=2^n$, $f(1)=0$, $f(2)=1$.求 $f(n)$.

【分析】　在 N 上定义且满足一定递推关系的函数，其函数方程的处理方法与递归数列相同.

【解】　$(f(n+2)+2f(n+1))-(f(n+1)+2(f(n))=2^n$. 令 $g(n)=f(n+1)+2f(n)$，则 $g(1)=1$，且 $g(n+1)-g(n)=2^n$，

依次令 $n=1,2,\cdots$，迭加得

$$g(n)-g(1)=2^1+2^2+\cdots+2^{n-1}$$

所以 $g(n)=2^n-1$.

即 $f(n+1)+2f(n)=2^n-1$，

所以 $\dfrac{f(n+1)}{2^{n+1}}+\dfrac{f(n)}{2^n}=\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2^{n+1}}$.

令 $h(n)=\dfrac{f(n)}{2^n}$，有 $h(1)=0$，且

$$h(2)+h(1)=\frac{1}{2}-\frac{1}{2^2},$$

$$h(3)+h(2)=\frac{1}{2}-\frac{1}{2^3},$$

……

$$h(n)+h(n-1)=\frac{1}{2}-\frac{1}{2^n}.$$

所以当 n 为奇数时，

$$h(n)=\frac{1}{2^2}-\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^4}-\cdots-\frac{1}{2^n}$$
$$=\frac{2^{n-1}-1}{3\cdot 2^n},$$

当 n 为偶数时，

$$h(n)=-\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}-\frac{1}{2^4}+\cdots-\frac{1}{2^n}+\frac{1}{2}$$
$$=\frac{2^n-1}{3\cdot 2^n}.$$

故所求函数为

$$f(n)=\begin{cases}\dfrac{1}{3}(2^{n-1}-1), & n\text{ 为奇数},\\[2ex] \dfrac{1}{3}(2^n-1), & n\text{ 为偶数}.\end{cases}$$

【评注】　数列就是在 N 上定义的函数.