集合论学习手册

张　锦　文

中央广播电视大学出版社

集合论学习手册

张锦文

*

中央广播电视大学出版社出版
新华书店北京发行所发行
轻工业出版社印刷厂印刷

*

开本 787×1092 1/32 印张 3.5 千字 73
1984 年 9 月第 1 版 1984 年 9 月第 1 次印刷
印数 1—36,000
书号:13300·14 定价:0.38 元

前　　言

这本《集合论学习手册》的主要内容是电视大学《集合论与逻辑代数》课程关于集合论三十讲的讲授提要。主要教材是作者的《集合论浅说》(科学出版社，1984年出版，以下简称为《浅说》)。这本手册是为本届电大学员学习《浅说》写的概述，希望它对于减轻学员课堂作笔记的压力有一定的作用。也为学员指出了初读《浅说》时的重点和注意事项。换句话说；凡是三十讲中讲授的内容，都是初读《浅说》时要予以注意的。凡是三十讲中未提及的内容，初读《浅说》时均可略去，也不在教学大纲之内。

集合论课程的基本要求是：(1)正确理解集合论的基本概念，例如属于、包含、相等的概念、归纳原则、笛卡尔积、关系、函数、序数与集合的势、可数集合与不可数集合。(2)掌握并会运用：集合的初等运算；反证法；蕴涵推演法；幂集合运算；广义并、关系与函数。(3)本课程的重点是正确理解和运用外延原则，初步掌握反证法、蕴涵推演法和双蕴涵推演法；较熟练地掌握集合的基本运算(并、交、相对补、幂、广义并)；关系的性质(包括函数、超幂、超积与偏序)；集合的势(包括可数集合与实数的集合)。

电大学员在阅读《浅说》时，应首先把第一、二章中的基本概念与基本方法弄清，然后阅读重点章节，即第三章§1，第四

章§§1-2,第五章§§1-3,第六章§§1-3,第七章§§1-2,第八章§§1-3,第九章§§1-6(可略去关于逆、复合、限制的有关定理的证明,象的概念初学的读者可略去),第十章§3、第十一章§§1-3、第十二章§§1-4与§6,第十三章§1与§3,第十四章§§1-2(可略去定理的证明)、第十五章§§1-2、第十六章§§1-3、第十七章§1与§§3-5。

集合论既是一门纯数学,又是逻辑学的一个重要领域,它在计算机、人工智能等领域又有广泛的应用。学习这门课程应注重概念的严谨性和逻辑推演的技巧性,多做练习,熟能生巧。学习集合论,便于深入理解中学数学教材中的一些基本概念,从而对提高中学数学的教学质量有重要的意义。比如函数的概念是中学数学的一个基本概念,在初中与高中数学课本中,都给出了它的定义。我们从集合论角度对函数概念给以规范化,把它与映射作统一陈述并且从而加深理解一对一、单射、双射和一一对应等概念。又比如,怎样理解点、线、面的联系,在高中数学课本《立体几何》中,点A在直线a上,记做$A\in a$;点A在平面α上,记做$a\in\alpha$;直线在平面α上,记做$a\subset\alpha$。这些记号与概念表达了深刻的数学思想,对于缺少集合论知识的读者来讲它们是费解的,对于熟悉集合论的读者来讲它们都是一目了然的。学习集合论,对于清晰地表达数学思想和严格地进行逻辑推理都是有益的。因此,我们认为集合论知识对于中学数学教师来讲是不可缺少的。

限于水平,错误缺点在所难免,欢迎批评指正。

编者　1983年12月于庐山

目　　录

第一讲　集合的基本概念

一、讲授提要

1. 元素、集合与属于关系

每个人都知道许多集合，例如三支笔可以组成一集合，二本书可以组成另一集合。数 0，1，2 也可以组成一集合并且记做{0，1，2}。0，1 与 2 都是这一集合的元素(或称为元)。这些笔、书和数 0，1，2 都叫做对象，一支笔是直观上看得见的对象，一本书也是直观上看得见的对象，而有些对象是抽象的思维的对象，不管是直观或思维的对象，只要它们是确定的和能够区分的都可以成为集合的元素。

例如：令 $s:=\{0,1,2\}$这时我们用 $0\in s$ 表示 0 是集合的元，同时，用 $1\in s$，$2\in s$ 表示 1，2 为 s 的元，$4\notin s$ 表示 4 不是集合 s 的元。$\in$ 称为属于关系。$1\in s$ 读做 1 属于集合 s，或 1 是 s 的元。而 $4\notin s$ 读作 4 不属于 s 或 4 不是 s 的元。许多对象都可以作为集合的元，例如整式、方程式、图形，甚至集合也可作为对象成为集合的元。对象是某一集合的元，但它本身不是一集合时，就称为个体或本元(例如几何学中的点都是本元)。元素必须是确定的。所谓确定的意味着任一对象 a 属于某集合 s，或者不属于 s，二者必有其一，二者只有其一，不允许有含混其词、模棱两可的情形，例如高个子的人、甚大的数和直线上所有接近于 P 点的点等都不能组成一集合。

2. 集合的表示方法(列举法与描述法)

我们常常用左右花括号围起一些对象表示一集合，这些被围起的对象是这一集合的元素，其它的都不是它的元素，例如令

$$s_1:=\{0,1,2,3,4,5,6\}$$

表示一集合，它的元是 0, 1, 2, …, 6 这七个数。其它数都不是它的元。其中“: =”表示左边的集合是被右边的集合所定义的。

$$s_2:=\{0,1,2,\cdots,100\}$$

上式中的“…”表示整数 3 直至 99。这种表示集合的方法叫做列举元素的方法(亦称列举法)。有些集合不便于列举出它的所有元素来，还需求解某一方程才能知道该集合的元素。例如要求列举 18 与 24 之间包括 18 与 24 在内的数的三次方所获得的数组成的集合。这就是:

$$\{5832, 6859, 8000, 9261, 10648, 12167, 13824\} \tag{1.1}$$

显然式(1.1)所确定的集合是有规则的，我们也可换一种表示方法，即:

$$\{y \mid x \text{ 是一整数，且 } 18\leqslant x\leqslant 24 \text{ 并且 } y=x^3\} \tag{1.2}$$

这一花括号是意味着把满足竖杠“|”后边条件的那些数 y 都列举出来，放在竖杠“|”的前边，这就是所定义的集合的关系。这一集合的元素显然就是式(1.1)所列举的那些元素，这种定义集合的方式叫做“条件定义集合”的方式，亦称集合的描述法。列举集合:

$$\{y \mid x \text{ 是一整数，且 } y=x^3 \text{，并且: } 10\leqslant x\leqslant 10^5\} \tag{1.3}$$

将是极其烦琐的。然而用描述法却是十分简洁的。

3. 外延原则(外延公理)

式(1.1)与式(1.2)所决定的是否是同一集合呢？虽然它们的表述方法不同，但是它们的元素相同。外延原则肯定集合是它的元素决定的。既然，式(1.1)与式(1.2)所决定的集合元素相同，因此它们是同一个集合。

外延原则　对于任意给定的集合 s_1 与 s_2，如果对于任意的对象 a，若 $a \in s_1$，则 $a \in s_2$，并且若 $a \in s_2$，则 $a \in s_1$，那么 $s_1 = s_2$

由此可见，外延原则是说，对于任意的集合 s_1 与 s_2，如果 s_1 与 s_2 的元素相同，则 $s_1 = s_2$。这就是集合是由它的元素所决定的具体的表述。

4. 空集合

一集合可否没有任何元素呢？可以，这就是空集合。由外延原则，空集合是唯一的，因此记做 $\varnothing$。空集合的存在性是由公理所断定的。这就是：存在一集合，它没有任何元素。

5. 无序对集合、并、交与相对补

对于任意给定的集合 s_1 与 s_2，我们有

$$\{s_1, s_2\} \tag{1.4}$$

$$s_1 \cup s_2 \tag{1.5}$$

$$s_1 \cap s_2 \tag{1.6}$$

$$s_1 \dot{-} s_2 \tag{1.7}$$

式(1.4)称为集合 s_1 与 s_2 的无序对集合，这一集合有元素 s_1 与 s_2，当 $s_1 \neq s_2$ 时，它恰有两个元素 s_1 与 s_2，当 $s_1 = s_2$ 时，它有唯一的元 s_1，并记做 $\{s_1\}$，称为 s_1 的单元集合。断定 $\{s_1, s_2\}$ 是一集合的就是无序对集合存在公理。

式(1.5)称为集合 s_1 与 s_2 的并。它是把集合 s_1 的元素与 s_2 的元素搜集(汇合)到一起所形成的，它的存在性是由并集合存在公理所断定。

式(1.6)称为集合 s_1 与 s_2 的交，它是把集合 s_1 与 s_2 的公共元素搜集在一起所形成的。它的存在性由交集合存在公理所断定。当 s_1 与 s_2 的交为空集时，就称 s_1 与 s_2 是不交的。

式(1.7)称为集合 s_1 与 s_2 的相对补，更确切地说，是集合 s_2 相对于集合 s_1 的补，它是把集合 s_1 中含有 s_2 的所有元素删去后所剩的全部元素搜集(汇合)在一起所形成的。它的存在是由相对补存在公理所断定的。

对于任意的集合 s，有它的单元集合 $\{s\}$，从而有 $s\cup\{s\}$，这一集合称做集合 s 的后继，并记做 s^+。

6. 包含关系 $\subset$ 及其性质

当我们令集合 s_3 与 s_4 分别为集合 $\{0,1,2\}$ 与 $\{0, 1,2,3, 4\}$ 时，读者可以看出 s_3 的任一元素都是 s_4 的一个元素。这时，我们称 s_3 是 s_4 的一个子集合，并且记做 $s_3\subset s_4$，读做 s_3 包含在 s_4 中或 s_4 包含 s_3。

对于任意的集合 s_1 与 s_2，当 s_1 的每一元素都是 s_2 的元素时，就称做 s_1 是 s_2 的子集合，还有条件“有一 a 使得 $a\in s_2$ 且 $a\notin s_1$”成立时，就叫 s_1 是 s_2 的真子集合，并且记做 $s_1\subset_+ s_2$。在上述的例子中，不仅有 $s_3\subset s_4$，而且有 $s_3\subset_+ s_4$。因为 s_4 中有元素不在 s_3 中，所以 s_4 不包含在 s_3 中，或者说 s_3 不包含 s_4，并记做 $s_4\not\subset s_3$。

定理 1.1　对于任意的集合 s，都有 $\varnothing\subset s$。

定理 1.2 对于任意的集合 s, s_1 与 s_2, 下述三条成立:

(1) $s \subset s$

(2) 若 $s_1 \subset s_2$ 且 $s_2 \subset s_1$, 则 $s_1 = s_2$

(3) 若 $s_1 \subset s_2$ 且 $s_2 \subset s$, 则 $s_1 \subset s$

(1) 是可由包含的定义直接推得, (2)是外延原则的一种陈述方式, (3)叫做包含的传递性, 它的传递也是不难证明的。

推论 1.3 对于任一不空集合 s, 它至少有两个子集合, 一个是空集合 $\varnothing$, 一个是它自己, 即 s。

二、附注

1. 请注意 $\in$ 与 $\subset$ 两者之间的区别。

(1) $\in$ 是基本的不加定义的, 而 $\subset$ 是由 $\in$ 定义出来的;

(2) 由定理 1.2(3), $\subset$ 有传递性, 而 $\in$ 除了特殊集合外一般不具有传递性。

例如, 虽然 $2 \in \{2\}$ 和 $\{2\} \in \{\{2\}\}$ 都成立, 但是 $2 \notin \{\{2\}\}$, 因为 $\{\{2\}\}$ 仅有一元素 $\{2\}$。

2. 例题分析

分析 $\{3\} \not\subset \{\{3\}, 4, 2\}$。不妨令

$$s_1 := \{\{3\}, 4, 2\}$$

虽然有 $\{3\} \in s_1$, 但是集合 $\{3\}$ 中有一元素 3, 而 $3 \notin s_1$, 因此, 有 $\{3\} \not\subset s_1$ 成立。另一方面, 我们有 $4 \in s_1$, 因此 $\{4\} \subset s_1$。令

$$s_2 := \{\{3\}, 3, 2, 4\}$$

这时, 我们有 $\{3\} \in s_2$ 且有 $\{3\} \subset s_2$ (因为有 $3 \in s_2$)。

3. 请注意: $\varnothing$ 与 $\{\varnothing\}$ 的区别, $\varnothing$ 没有元素, $\{\varnothing\}$ 有一元素 $\varnothing$。因此, $\varnothing \in \{\varnothing\}$, 但 $\{\varnothing\} \notin \varnothing$, 且 $\varnothing \notin \varnothing$。

三、习题与提示

做《浅说》第一章习题 1-2，在做习题时，主要使用外延原则，理解集合是由它的元素决定的，和元素的次序无关，也和一元素出现的次数无关。

第二讲　证明与逻辑

一、讲授提要

1. 定理与证明

首先考察关于集合运算的一个性质，一性质就是集合论的一个定理，对于定理我们有依据集合论公理、定义和逻辑规则所逐步建立起来的严谨证明。在证明中出现的概念、逻辑定律和方法就是本讲和以下两讲的主要内容。

定理 2.1　对于任意的集合 s_1, s_2 与 s_3，都有

$$(s_1 \dot{-} s_2) \dot{-} s_3 = s_1 \dot{-} (s_2 \cup s_3) \tag{2.1}$$

成立。

证明：对于任意的对象 a，由定义 1.12，我们有：

(1) 若 $a \in (s_1 \dot{-} s_2) \dot{-} s_3$

则有　　$a \in (s_1 \dot{-} s_2)$　　且 $a \notin s_3$

从前一式，又得：$a \in s_1$，且 $a \notin s_2$。这就意味着 $a \in s_1$，且 $a \notin (s_2 \cup s_3)$，所以有：

$$a \in s_1 \dot{-} (s_2 \cup s_3)$$

(2) 若 $a \in s_1 \dot{-} (s_2 \cup s_3)$，则有 $a \in s_1$ 且 $a \notin (s_2 \cup s_3)$。由此有 $a \in (s_2 \cup s_3)$ 不成立，这意味着 $a \notin s_2$ 且 $a \notin s_3$。这样，就有

$a\in(s_1\dot{-}s_2)$，由此就有：

$$a\in(s_1\dot{-}s_2)\dot{-}s_3$$

在上述(1)与(2)中，由于对象 a 的任意性并依据外延原则，这就完成了上述性质的证明。

2. 命题的若干例子

在定理中的等式(2.1)，和上述证明过程中，多次谈到 $a\in s_1$，$a\notin s_2$，$a\notin s_3$，$a\in s_1\in s_2$ 等句子，也谈到若 $a\in s_1\dot{-}(s_2\cup s_3)$，则 $a\in(s_1\dot{-}s_2)\dot{-}s_3$，以及 $a\in s_1$ 且 $a\notin s_2$ 等句子。我们把 $a\in s_1$，$a\in s_2$，$a\in s_3$ 以及 $s_1=s_2$ 等句子叫做初级命题，把 $a\notin s_2$ 叫做初级命题 $a\in s_2$ 的否定式，并且把它记做$\neg(a\in s_2)$，$a\notin s_2$ 是$\neg(a\in s_2)$的简写形式，括号可以省去记为$\neg a\in s_2$。其中$\neg$叫做否定词。把"$a\in s_1$ 且 $a\in s_2$"记做"$a\in s_1\wedge a\in s_2$"，并把它叫做 $a\in s_1$ 与 $a\in s_2$ 的合取式，其中$\wedge$叫做合取词，把"$a\in s_1$ 或 $a\in s_2$"记做"$a\in s_1\vee a\in s_2$"并把它叫做 $a\in s_1$ 与 $a\in s_2$ 的析取式，其中$\vee$叫做析取词。把"若 $a\in s_1$，则 $a\in s_2$"记做"$a\in s_1\to a\in s_2$"并把它叫做 $a\in s_1$ 蕴涵 $a\in s_2$(亦称为蕴涵式)，其中$\to$叫做蕴涵词。有时我们还可以有句子"$a\in s_1$ 当且仅当 $a\in s_2$"亦即"如果 $a\in s_1$，则 $a\in s_2$，如果 $a\in s_2$，则 $a\in s_1$"我们把它记做"$a\in s_1\leftrightarrow a\in s_2$"，并把它称做 $a\in s_1$ 与 $a\in s_2$ 的等价式或双蕴涵式，其中$\leftrightarrow$称为双蕴涵词。有时，统称符号$\neg$，$\wedge$，$\vee$，$\to$，$\leftrightarrow$为命题连接词。把不含有命题连接词的命题叫做初级命题，含有连接词的命题叫做复合命题。

3. 命题与公式的形成规则

对于任意给定的对象 a 和确定的 s，s_1 与 s_2，形式为 $a\in s$ 和 $s_1=s_2$ 的句子叫做初级命题。不过，应当注意的是，我们

所说的命题 $a\in s$ 与 $s_1=s_2$, 不是指这几个字，而是指它的含义，指它们所表达的完整的意思或思想，语句或句子是语言学的概念，而命题(即语句表示的含义)是逻辑学的概念。只是为了简便起见，我们不再一一重复这一点了。初级命题也是命题；若 A 是一命题，则 $\neg A$ 是一命题；若 A 与 B 是命题，则 $(A\wedge B)$, $(A\vee B)$, $(A\rightarrow B)$, $(A\leftrightarrow B)$ 都是命题。这就是命题的形成规则。

在定义 $s_1\subset s_2$ 时，我们曾说，“对于任意的对象 a，若 $a\in s_1$，则 $a\in s_2$。”这里任意 a，就是指变元 a。对于变元我们常用 x 表示，用符号 $\forall x$ 表示“任意 x”或“所有 x”，$\forall$ 称为全称量词。这样，我们就有：$s_1\subset s_2:=\forall x(x\in s_1\rightarrow x\in s_2)$。

在谈到包含关系不成立，即 $s_1\not\subset s_2$ 时，我们曾说，“有一个对象 a，使得 $a\in s_1$ 且 $a\notin s_2$”其中，有一对象 a，用 $\exists a$，或 $\exists x$ 表示，这样，引号中的句子，就写成了 $\exists x(x\in s_1\wedge x\notin s_2)$，$\exists$ 称为存在量词。而上述 s_1 与 s_2 也都是任意的集合，都可以用变元与量词表示。这样，我们可以对命题再作进一步的刻画。为此，首先，给出公式的形成规则如下：

(1) 对于任意的变元或集合 x, y，有

$$x\in y,\ 与\ x=y \tag{2.2}$$

是公式，此时也称它们为初级公式。并且规定，对于 $x\in y$ 而言，y 不能是非集合的个体或意指个体的变元，如 y 不能意指“张三”，“李四”，“羊”，“牛”，英文字母“a”，“b”等等。在式(2.2)中变元 x 与 y 都是自由出现的。

(2) 若 A 与 B 为任意的公式，则 $\neg A$, $(A\wedge B)$, $(A\vee B)$, $(A\rightarrow B)$ 与 $(A\leftrightarrow B)$ 都是公式。

(3)若 $A(x)$是一公式，x是在其中自由出现的变元[$A(x)$还可以有其它变元自由出现，又可称它们为参变元]，则 $\forall xA(x)$, $\exists xA(x)$都是公式，并且称 x 在它们中为约束出现的变元。

(4) 所有的公式都是经(1)—(3)获得的。

任一公式 A, 当其中没有变元自由出现时就称为一命题。命题是逻辑学中一个最基本的概念。

4. 命题的真值与命题连接词的真值表

任一命题总是成立，或者不成立，分别称真命题或假命题，并分别记做 1 或 0。命题连接词的真值表参阅《浅说》第二章表 1-5。

二、附注

1. 本讲的重点是命题概念和由命题连接词和量词获得的命题的形成规则，并理解命题在定理及其证明中的重要性。

2. 本讲难点在于理解量词和由量词形成公式的规则，要抓住一变元在某一公式中自由出现，约束出现和不出现概念。

三、习题与提示

对于给定的集合 s_1 与 s_2，并且令 x, y 为集合变元，区分下述那些是命题；那些虽不是命题，但它是公式；那些既不是命题，也不是公式。分别其后边的括号中划上∨，* 与□。

1. $s_1 = s_2$ (　　)
2. $s_1 \in s_2$ (　　)
3. $s_1 \in s_2 \wedge \neg(s_1 = s_2)$ (　　)
4. $s_1 \in s_2 \rightarrow$ (　　)

5. $\wedge s_1 \in s_2$ (　)

6. $x \in s_1 \to y \in s_2$ (　)

7. $x_1 \in s_2 \to \wedge x \in s_2$ (　)

8. $\forall x(x \in s_1 \to y \in s_2)$ (　)

9. $\exists x(x \in s_1 \wedge x \notin s_2)$ (　)

10. $\exists x \forall y(\neg y \in x)$ (　)

提示：作题中根据命题与公式的形成规则，能在有穷步内知道是命题与公式、不能获得是公式与命题的划上□。例如，单独一个等号"＝"，"$s_1 =$"，"$s_1 \in$"，"$\in s_1 = s_2$"，等等都既不是命题，也不是公式。

第三讲　反证法

一、讲授提要

1. 永真命题

使用真值表方法，可以对不含有量词的每一命题进行赋值。在对其中出现的初级命题作任意赋值时，它都取 1 值的命题叫做永真命题。对于形式 $\forall xA(x)$的命题，当对 $A(x)$作任意的解释，x 取任意给定集合 x_0 使得，$A(x_0)$都取 1 值时，称 $\forall xA(x)$为永真命题；对于形式为 $\exists xA(x)$的命题，当有一个集合 x_0 使得 $A(x_0)$取 1 值时，称 $\exists xA(x)$为永真的。

2. 反证律

我们可以用真值表方法验证，对于任意命题A与 B，下式

$$(\neg A \to B) \to ((\neg A \to \neg B) \to A) \tag{3.1}$$

是一永真命题。

A	B	$\neg A \to B$	$\neg A \to \neg B$	$(\neg A \to \neg B) \to A$	式(3.1)
0	0	0	1	0	1
0	1	1	0	1	1
1	0	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1

式(3.1)我们称反证律，使用反证律进行证明定理的方法叫做反证法。

3. 使用反证法的一个例子以及对它的说明

第一讲的定理 1.1，对于任一集合 s，都有 $\varnothing \subset s$ 成立。这一定理的证明是，首先，假定有一集合 s 使得 $\varnothing \not\subset s$ 成立，再由 $\varnothing \not\subset s$ 获得有 a 使得 $a \in \varnothing$ 且 $a \notin s$，然而由 $\varnothing$ 的定义知道，对任一 x，都有 $x \notin \varnothing$，特别地，对于上述 a，有 $a \notin \varnothing$，为了显明起见，令 A 为 $\varnothing \subset s$，这时 $\neg A$ 为 $\varnothing \not\subset s$，令 B 为 $a \in \varnothing$，这时 $\neg B$ 为 $a \notin \varnothing$。这样，我们已有，若 $\neg A$，则可得到 B 与 $\neg B$ 同时成立。由此，我们得到了

$$\neg A \to B \text{ 和 } \neg A \to \neg B \tag{3.2}$$

成立。逻辑中还有一条重要的规则，称为分离规则，即：

$$\frac{\begin{array}{c} C \to D \\ C \end{array}}{D}$$

成立。其中 $C \to D$ 称做大前提，C 称做小前提，D 称做结论。当我们把式(3.1)作为大前提，把式(3.2)中的 $\neg A \to B$ 作为小前提时，使用分离规则就获得了结论：

$$(\neg A \to \neg B) \to A \tag{3.3}$$