材料力学500题详解

〔日〕冲岛喜八著　伍洪泽译
常振檝　王嘉新校

（修订再版）

湖南科学技术出版社

第一章　拉(压)时的应力和应变

基 本 内 容

1.单位制

除特殊问题外，本书中所用单位是：在公制中用C.K(厘米、公斤)制，而在英制中用I.P(吋、磅)制。

		C.K 制	I.P 制
弹性模量		公斤/厘米^2	磅/吋^2
应　　力		公斤/厘米^2	磅/吋^2
变形	正应变	无单位	
	剪应变	弧　度	

1 弧度 $=57°17'45''$

$180°=\pi(3.1416)$弧度

$$1\text{公斤/厘米}^2=\frac{2240}{1016}\times 2.54^2=14.225\text{磅/吋}^2$$

$$1\text{磅/吋}^2=\frac{1}{14.225}=0.0703\text{公斤/厘米}^2$$

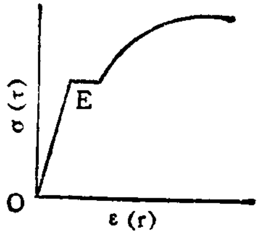
2.虎克定律与弹性模量

弹性限度内应力与应变成正比，其比例常数称为弹性模量。

$$\frac{\sigma}{\varepsilon}=E \quad 即 \quad \varepsilon=\frac{\sigma}{E}$$

$$\frac{\sigma_v}{\varepsilon_v}=K \quad 即 \quad \varepsilon_v=\frac{\sigma_v}{K}$$

$$\frac{\tau}{\gamma}=G \quad 即 \quad \gamma=\frac{\tau}{G}$$



基1—2

3.广义虎克定律

弹性体内任一点的应力分量，均能表为该点的应变分量的一次函数，即

$$\varepsilon_x=\frac{1}{E}\left(\sigma_x-\frac{\sigma_y+\sigma_z}{m}\right)$$

$$\varepsilon_y=\frac{1}{E}\left(\sigma_y-\frac{\sigma_z+\sigma_x}{m}\right)$$

$$\varepsilon_z=\frac{1}{E}\left(\sigma_z-\frac{\sigma_x+\sigma_y}{m}\right)$$

式中：σ ——正应力

τ ——剪应力

σ_v——体积应力(正应力)

σ_x、σ_y、σ_z——正应力分量

ε ——正应变

ε_v——体积应变

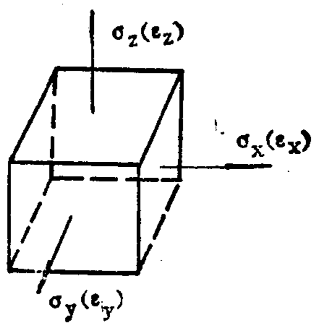
γ ——剪应变

ε_x、ε_y、ε_z——正应变分量

E ——纵向弹性模量或杨氏模量

G —— 横向弹性模量或剪切弹性模量

K ——体积弹性模量　　m——泊桑系数



基1—3

4.不遵守虎克定律的材料

$$E_1=\frac{PK}{OK}=\frac{\sigma}{\varepsilon}=tg\alpha$$

$$E_2=\frac{PK}{LK}=\frac{d\sigma}{d\varepsilon}=tg\beta$$

式中：σ ——正应力

ε ——正应变

α ——$\angle POK$

τ ——剪应力

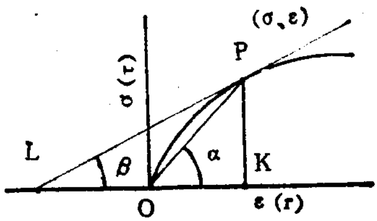
γ ——剪应变

β ——$\angle PLO$

LP——$\sigma\sim\varepsilon$曲线上P点的切线

E_1——正割模量

E_2——正切模量



基1—4

5.各种弹性模量间的关系

$$K=\frac{mE}{3(m-2)} \qquad G=\frac{mE}{2(m+1)}$$

$$\frac{9}{E}=\frac{3}{G}+\frac{1}{K}$$

6.应力和应变

(1) 正应力和正应变

$$\sigma=\pm\frac{P}{A}$$ （等截面 ＋拉伸 －压缩）

$$\sigma=\pm\frac{dP}{dA}$$ （变截面 ＋拉伸 －压缩）

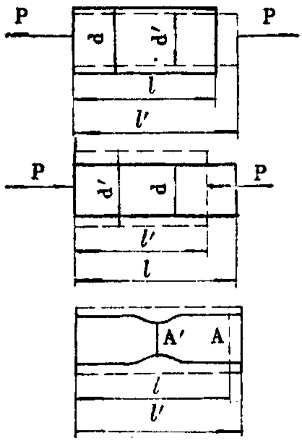
$$\varepsilon_1=\frac{l'-l}{l}$$ （纵向应变）

$$\varepsilon_2=\frac{d'-d}{d}\quad\text{（横向应变）}$$

$$\nu=\frac{1}{m}=\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}\quad\text{（泊桑比）}$$

$$\phi=\frac{A'-A}{A}\times 100\quad\text{（截面收缩率）}$$

$$e=\frac{l'-l}{l}\times 100\quad\text{（延伸率）}$$



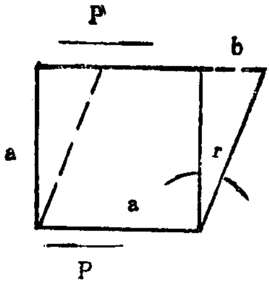
基1—6（1）

（2）剪应力与剪应变

$$\tau=\frac{P}{A}\quad\text{（等截面）}$$

$$\tau=\frac{dP}{dA}\quad\text{（变截面）}$$

$$\gamma=\mathrm{tg}\frac{b}{a}\cong\frac{b}{a}\quad\text{（剪应变）}$$



基1—6（2）

（3）体积应力与体积应变

$$\sigma=\pm\frac{P}{A}\quad\text{（等截面、+拉伸、-压缩）}$$

$$\sigma=\pm\frac{dP}{dA}\quad\text{（变截面、+拉伸、-压缩）}$$

$$\varepsilon_v=\frac{a^3(1+\varepsilon)^3-a^3}{a^3}\cong 3\varepsilon\quad\text{（体积应变）}$$

式中：l、a——变形前的长度

l'——变形后的长度

b——变形量

d——变形前的直径

d′——变形后的直径

A——横截面面积或侧面面积

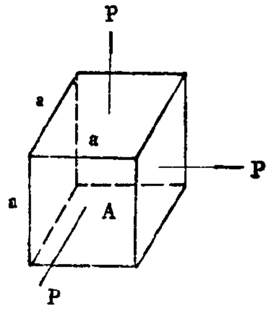
P——外载荷

7.斜截面上的应力

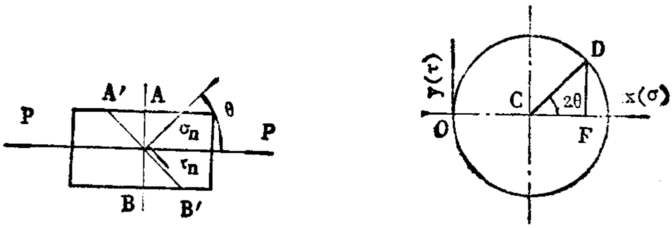
$$\sigma_n=\sigma_0\cos^2\theta$$

$$\tau_n=\sigma_0\sin\theta\cos\theta$$

$$\sigma_0=\frac{P}{A}$$



基 1—6(3)



(a)　　(b)

基 1—7

莫尔应力圆方程

$$\left(\sigma_n-\frac{\sigma_0}{2}\right)^2+\tau_n^2=\frac{\sigma_0^2}{4}$$

σ_0——横截面上的应力

σ_n——斜截面上的正应力

τ_n——斜截面上的剪应力

P——轴向载荷

A——横截面面积

θ——轴线与斜截面法向间的夹角

8.组合材料的应力

$$\sigma_{A_0}=\frac{P}{A_0+\frac{E_1}{E_0}A_1+\frac{E_2}{E_0}A_2+\cdots\cdots+\frac{E_n}{E_0}A_n}$$

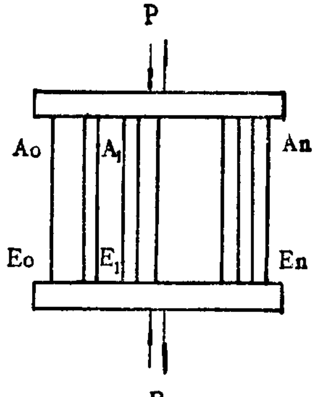
$\frac{E_1}{E_0}A_1$，$\frac{E_2}{E_0}A_2$……$\frac{E_n}{E_0}A_n$ 是相对于A_0的等价当量截面面积。

E——各种材料的纵向弹性模量

σ——各种材料所产生的应力

A——各种材料的横截面面积

P——作用在组合材料上的外力



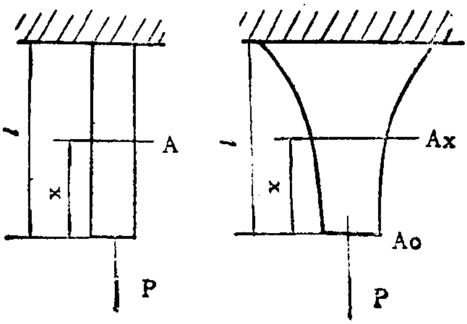
基1—8

9.悬杆内的应力

$$\sigma_x = \frac{P}{A} + \rho x \qquad \text{（等截面杆）}$$

$$\sigma_x = \frac{P}{A_x} + \rho\int_0^x A_x d_x \qquad \text{（等强度杆）}$$

$$A_x = A_0 e^{\frac{\rho}{\sigma}x} \qquad (A_0 = A_{x=0})$$



基1—9

$$\lg A_x = \lg A_0 + 0.4343\frac{\rho}{\sigma}x \qquad (\ln = 2.3\lg)$$

$\sigma_z = \rho l_z \qquad l_z = \frac{\sigma_z}{\rho}$ （自重时的破坏应力或自重时的破坏长度）

ρ ——杆的单位体积的重量（比重）

P ——悬挂于杆下端的载荷

A、A_x——杆的截面面积

σ、σ_x——吊杆内的应力

σ_z——自重时的破坏应力

l_z——自重时的破坏长度

x ——距原点的距离

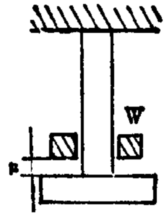
e ——自然对数的底

10.突加载荷时的应力和应变

$$\sigma_1 = \frac{2P}{A} = 2\sigma_0$$

$$\varepsilon_1 = \frac{2P_0}{AE} = 2\varepsilon_0$$

设 $\mu \leqq 0$



基1—10

11.冲击应力与应变

$$\sigma_2 = \sigma_0\left(1+\sqrt{1+\frac{2AEh}{Wl}}\right) = \sigma_0\left(1+\sqrt{1+\frac{EAV^2}{Wgl}}\right)$$

$$\varepsilon_2 = \varepsilon_0\left(1+\sqrt{1+\frac{2AEh}{Wl}}\right) = \varepsilon_0\left(1+\sqrt{1+\frac{AEV^2}{Wgl}}\right)$$

σ_0，ε_0——相对于静载下的应力与应变

σ_1，ε_1——相对于突加载荷的应力与应变

σ_2, ε_2——相对于冲击载荷的应力与应变

W——突然加载或冲击时的载荷

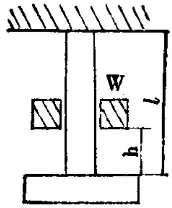
V——载荷落下速度

A, l——杆的截面面积和长度

h——载荷冲击高度

$V^2 = 2gh$

g——重力加速度



基1—11

12.应力集中

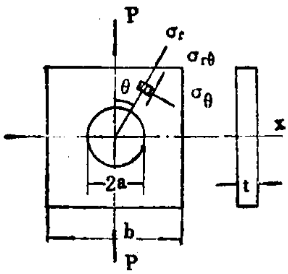
σ_γ——径向应力

σ_θ——周向应力

$\tau_{\gamma,\theta}$——剪应力

a——圆孔半径

b、t——板的宽度和厚度



基1—12(a)

$$\sigma_0 = \frac{P}{bt}$$

$$\sigma_\gamma = \frac{\sigma_0}{2}\left(1 - \frac{a^2}{r^2}\right) + \frac{\sigma_0}{2}\left(1 - \frac{4a^2}{r^2} + \frac{3a^4}{r^4}\right)\cos 2\theta$$

$$\sigma_\theta = \frac{\sigma_0}{2}\left(1 + \frac{a^2}{r^2}\right) - \frac{\sigma_0}{2}\left(1 + \frac{3a^4}{r^4}\right)\cos 2\theta$$

$$\tau_{\gamma,\theta} = -\frac{\sigma_0}{2}\left(1 + \frac{2a^2}{r^2} - \frac{3a^4}{r^4}\right)\sin 2\theta$$

当 $\theta = \frac{\pi}{2}$ （x 轴截面)时

$$\sigma_\gamma = \frac{3}{2}\sigma_0\frac{a^2}{r^2}\left(1 - \frac{a^2}{r^2}\right)$$

$$\sigma_\theta = \sigma_0 \left(1 + \frac{a^2}{2r^2} + \frac{3a^4}{2r^4}\right)$$

$$\tau_{\nu,\theta} = 0$$

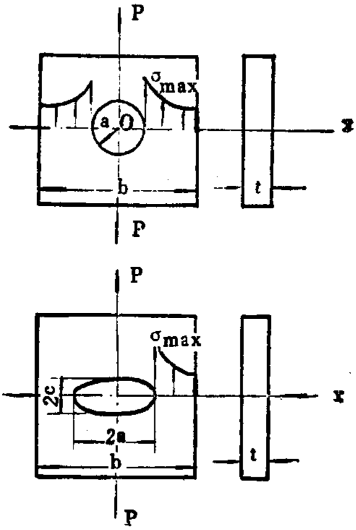
$$(\sigma_\theta)_{max} = (\sigma_\theta)_{r=a} = 3\sigma_0$$

$$(\sigma_\nu)_{r=a} = 0$$

$$(\tau_{\nu,\theta})_{r=a} = 0$$

$$(\sigma_\theta)_{max} = \sigma_0\left(1 + \frac{2a}{c}\right)$$

$$(\tau_{\nu,\theta})_{max} = \tau_0\left(1 + \frac{a}{c}\right)$$



基 1 —12(b)

$$\alpha_k = \frac{\sigma_{max}}{\sigma_m}$$

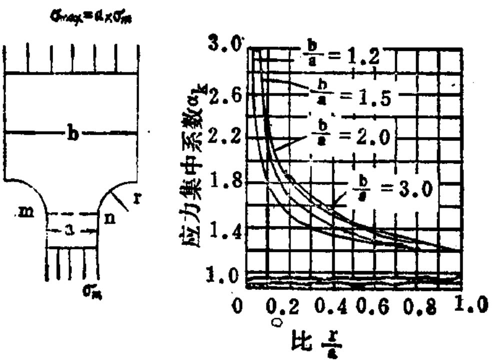
$$= \frac{\text{最大应力}}{\text{最小截面的平均应力}}$$

$$\sigma_m = \frac{P}{(b-2a)t}$$

α_k——形状系数或应力集中系数

应力集中系数算例

$$\sigma_{max} = \alpha_k \sigma_m$$



基 1 —12(c)

13.弹性变形能

(1) 单向应力变形能

$$U_1=\frac{\sigma^2}{2E}\qquad U_1'=\frac{\tau^2}{2G}$$

(2) 二向应力变形能

$$U_2=\frac{1}{2}(\sigma_x\varepsilon_x+\sigma_y\varepsilon_y+\tau_{xy}\gamma_{xy})=\frac{1}{2}\left(\frac{(\sigma_x-\sigma_y)^2}{E}+\frac{\tau_{xy}^2}{G}\right)$$

$$U_2'=\frac{1}{2E}(\sigma_1-\sigma_2)^2$$

σ_1、σ_2为主应力

(3) 三向应力变形能

$$U_3=\frac{1}{2}(\sigma_x\varepsilon_x+\sigma_y\varepsilon_y+\sigma_z\varepsilon_z+\tau_{xy}\gamma_{xy}+\tau_{yz}\gamma_{yz}+\tau_{zx}\gamma_{zx})$$

$$=\frac{1}{2E}\left\{\sigma_x^2+\sigma_y^2+\sigma_z^2-\frac{2}{m}(\sigma_x\sigma_y+\sigma_y\sigma_z+\sigma_z\sigma_x)\right\}+$$

$$+\frac{1}{2G}(\tau_{xy}^2+\tau_{yz}^2+\tau_{zx}^2)$$

$$U_3'=\frac{1}{2E}\left\{\sigma_1^2+\sigma_2^2+\sigma_3^2-\frac{2}{m}(\sigma_1\sigma_2+\sigma_2\sigma_3+\sigma_3\sigma_1)\right\}$$

σ_1、σ_2、σ_3为主应力

14.许用应力

$$\sigma\alpha,(\tau\alpha)=\frac{\sigma_s}{S}$$

$\sigma\alpha,(\tau\alpha)$——许用应力

σ_s——材料的危险应力

S——安全系数

15.材料的危险应力

(1) 静载荷

塑性材料：$\sigma_s = \sigma_y$　　σ_b——强度极限

脆性材料：$\sigma_s = \sigma_b$

高温情况下取$\sigma_s = \sigma_l$

σ_l——蠕变极限应力

(2) 交变载荷

$\sigma_s = \sigma_n$

σ_n——疲劳极限

16.安全系数

(1) 静载下的塑性材料

$$S = \frac{\sigma_y}{\sigma_s}$$

$$\left.\begin{array}{ll} \dfrac{\sigma_y}{\sigma_b} < 0.7 & S = 1.4 \\ \dfrac{\sigma_y}{\sigma_b} > 0.7 & S = 1.6 \sim 1.8 \end{array}\right\} \text{最小值}$$

$S = 3 \sim 4$　最大值

$S = 2$　平均值

组合应力

$$S = \frac{\sigma_y}{2\tau_{max}}$$

(2) 静载下的脆性材料

单一应力时

$$S = \frac{\sigma_b}{\sigma_s} \quad \text{或} \quad S = \frac{\sigma_{-b}}{\sigma_{-s}}$$

组合应力时

$$S = \frac{\sigma_b}{\sigma_s} \qquad \text{(拉伸破坏)}$$

$$S=\frac{\sigma_{-b}}{\sigma_{-a}}\quad（剪切破坏）$$

（3）高温静载下材料

$$S=\frac{\sigma_{l}}{\sigma_{a}}\quad（S的最小值为1.5\sim3.0）$$

（4）交变载荷下材料

$$\frac{1}{S}=\frac{\sigma_a}{\sigma_w}+\frac{\sigma_m}{\sigma_y}$$

σ_m——静载平均应力为$\frac{1}{2}(\sigma_{max}+\sigma_{min})$

σ_a——交变应力幅为$\frac{1}{2}(\sigma_{max}-\sigma_{min})$

σ_w——对称循环弯曲疲劳极限

σ_y——静载屈服应力

Cardullo 安全系数（$S=a\times b\times c\times d$ 的最小值）

材料	S	静载系数（a）	交变系数（b）	冲击系数（c）	其他（d）
铸铁	4	2	1	1	2
软钢	3	2	1	1	1.5
退火钢	3	2	1	1	1.5
镍钢	2.25	1.5	1	1	1.5
青铜黄铜	3	2	1	1	1.5

Unwin 安全系数(考虑强度极限平均值)				
材　料	静载荷	脉动循环载荷	对称循环载荷	冲击载荷
铸铁、脆性材料	4	6	10	15
软　钢	3	5	8	20
铸　钢	3	5	8	15
铜、软金属	5	6	9	15
木　材	7	10	15	20
砖　石	20	30	—	—

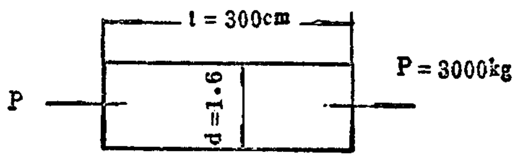
习　题　详　解

1. 一直径为1.6厘米，长为 3 米的圆杆，在3000公斤的轴向载荷作用下伸长了 2.2 毫米，试求杆内拉应力和材料的纵向弹性模量(单位以公斤/厘米^{2}和磅/吋^{2}计)。

〔解〕 $\sigma = \dfrac{P}{A} = \dfrac{3000}{\dfrac{\pi}{4}d^2} = \dfrac{4\times3000}{\pi\times1.6^2} = 1493$(公斤/厘米^2)

$$\varepsilon = \frac{\lambda}{l} = \frac{2.2}{3000} = 0.00073$$

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon} = \frac{1493}{0.00073} = 2.04\times10^6\text{(公斤/厘米}^2\text{)}$$



1·1

其次，因为　1公斤/厘米^2 = 14.225磅/吋^2

所以　$\sigma = 1493 \times 14.225 = 21240$磅/吋^2

$E = 2 \times 10^6 \times 14.225 = 2.9 \times 10^7$磅/吋^2

答：$\sigma = 1493$公斤/厘米^{2}或21240磅/吋^2

$E = 2.04 \times 10^6$公斤/厘米^{2}或2.9×10^7磅/吋^2

2. 在边长分别为10厘米、5厘米的两方形截面杆上，作用着相同的载荷，试比较其应力的大小。

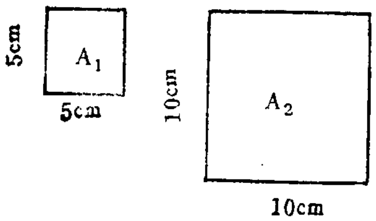
〔解〕 因$A_1 = 5^2 = 25$厘米^2　$A_2 = 10^2 = 100$厘米^2

故杆内应力分别为：

$$\sigma_1 = \frac{P}{A_1} = \frac{P}{25}$$

$$\sigma_2 = \frac{P}{A_2} = \frac{P}{100}$$

$$\frac{\sigma_1}{\sigma_2} = \frac{\frac{P}{25}}{\frac{P}{100}} = \frac{4}{1}$$



$\sigma_1 : \sigma_2 = 4:1$

答：$\sigma_1 : \sigma_2 = 4:1$

1·2

3. 一长为l，横截面面积为A的等截面圆杆，将其一端固定悬挂，试求因自重所引起的伸长。设圆杆的比重为γ公斤/厘米^3。

〔解〕 设距杆下端为x处的横截面内的应力为σ_x，则

$$\sigma_x = \frac{P_x}{A_x} = \frac{A_x x\gamma}{A_x} = x\gamma$$

又设伸长为$d\lambda$，则

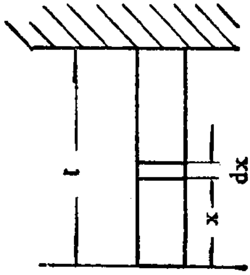
$$\varepsilon_x = \frac{d\lambda}{dx} = \frac{\sigma_x}{E} = \frac{x\gamma}{E}$$

因此 $d\lambda = \frac{\gamma}{E} x dx$

所以 $\lambda = \int_0^l \frac{\gamma}{E} x dx = \frac{\gamma}{E}\left(\frac{x^2}{2}\right)_0^l = \frac{\gamma l^2}{2E} = \frac{Pl}{2EA}$

〔$Al\gamma = P$〕

答：$\lambda = \frac{Pl}{2EA}$



1·3

4．在直径为10毫米，长为15米的钢杆上，悬挂一800公斤的重物，试求此杆内的应力和伸长，设杆的 $E = 2.1 \times 10^6$ 公斤/厘米²。

〔解〕 $\sigma = \frac{P}{A} = \frac{4 \times 800}{\pi \times 1^2} = 1019.1$

$= 1019$ 公斤/厘米²

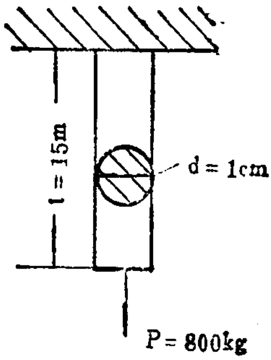
$\delta = \varepsilon l = \frac{\sigma}{E} l = \frac{Pl}{EA}$

$= \frac{800 \times 15 \times 100 \times 4}{2.1 \times 10^6 \times \pi \times 1^2}$

$= 0.727 = 0.73$ 厘米

答：$\sigma = 1019$ 公斤/厘米²

$\delta = 0.73$ 厘米



1·4

5。在一方形的安山岩上，放置15吨的物体，如安山岩的许用应力为80公斤/厘米²，试求其尺寸。

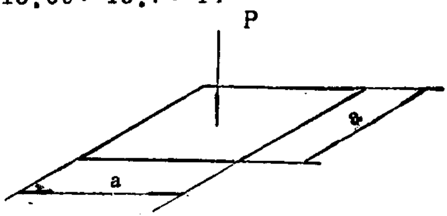
〔解〕 $P = 15$ 吨 $= 15 \times 1000 = 15000$ 公斤

$\sigma = \frac{P}{A} = \frac{15000}{a^2} = 80$

$a^2 = \frac{15000}{80} = 187.5$

$a=\sqrt{187.5}\doteq13.69\doteq13.7\doteq14$

答：a＝14厘米

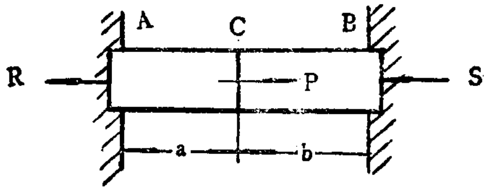


1·5

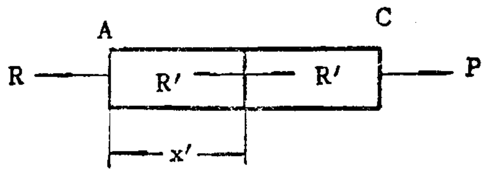
6. 刚性墙壁AB相距为（a＋b），一杆固定其间，力P作用在截面C处，试求墙壁AB的反力。

〔解〕 由静力学平衡方程得：

$$\Sigma H=0 \qquad R+S=P \qquad (1)$$



（a）



（b）

1·6

其次，设作用在AC段任意截面x′处的反力为R′，今考虑x′截面的左侧，因为外力只有R，所以R′和R是等值反向，且在AC段的各截面上都相同，这样AC段只受拉力R作用。

然后，设作用在CB段任一截面x″处的反力为R″，考虑x″截面的右侧，因为外力只有S，所以R″和S是等值反向的，而且在