经济数学

下册

刘兴权　王家兴　主编
马文祥　陈晓英　副主编

JING JI SHU XUE JING JI SHU XUE

黑龙江教育出版社

编 者 的 话

《经济教学》一书是按国家教委，人事部有关文件精神，由全国经济管理干部学院校际数学研究会委托黑龙江省工业交通管理干部学院，吉林省长春市中国农业银行管理干部学院，黑龙江省科技职工大学，黑龙江省电力职工大学，哈尔滨市工人业余大学，哈尔滨市经济管理干部学院，哈尔滨市建委建筑工程学院，黑龙江省尼龙厂，黑龙江省纺织印染厂，牡丹江市一轻局，内蒙古自治区兴安盟梨子山铁矿，内蒙古鄂旗吉文林业水泥厂，哈尔滨锅炉厂平山分厂，哈尔滨建成机械厂分厂，甘南县柴油机厂等编写的经济、管理、财会，金融等大专科层次的数学教材。

本书分上、下两册，是按140～190学时编写的，具有一定弹性，其中上册包括一元微积分，多元微分学和线性代数的基础知识（80～100学时），下册包括概率与数理统计初步和线性规划的基础知识（60～90学时）。

全套书坚持体现成人教育的特点，力求深入浅出，通俗易懂，便于自学，每一概念都从实例引入，使用方法条理化，每章备有习题并附有答案。

全书由刘兴权副教授主编，参加编写人员有：上册朱宪章(主编)，陈晓燕（副主编)、李德祚（副主编)，彭秋艳，沈喜成、李玉祥、李明放、牛双民、翼中立。

下册王家兴副教授（主编），马文祥（副主编），陈晓英（副主编)，王印平、吴金锋，孔祥德，岳秋春，刘为。

全书由黑龙江省工业交通管理干部学院教务长朱少毅副教授，全国经济管理干部学院校际数学研究会理事长刘生锋副教授，常务理事朱宪章担任主审。

编者水平有限，时间又仓促，错误在所难免，恳请读者批评指正。

一九九〇年十二月

目　　录

第七章　概率与概率分布

概率论是从数量侧面研究偶然现象规律性的数学学科。它的理论与方法在应用上是很广泛的，几乎遍及所有科学领域，工农业生产和国民经济的各个部门之中。

§7.1　概 率 的 概 念

一、随机事件与样本空间

首先看几个例子：

同一箱灯泡的使用寿命是有差异的。

同一储蓄所每天接收的存款额是不相同的。

同一地区的年降水量是不一样的。

类似的现象可以举出很多。这些现象的一个共同特点是，在基本条件不变的情况下，重复进行多次试验或观察，得到的结果带有偶然性。即在试验或观察前，完全不能对结果进行预测。这种现象称为随机现象，对随机现象进行的试验或观察称为随机试验，简称试验。试验的每一个可能发生的结果称为随机事件，简称事件。事件可用大写字母A、B、C等表示。

例如，观察某个灯泡的使用寿命是一次试验，若这个灯泡使用了80小时，则80小时就是一个事件。显然$[0, +\infty)$内的任何一个实数都可以是这个试验的事件。

研究随机现象，首先需要知道试验的所有可能出现的结

果。例如，在掷一次硬币时，可能出现正面或者出现反面，有两个结果。在掷两次硬币时，则可能出现的结果有（正、正），（正，反），（反，正），（反，反）四种。在掷三次硬币时，结果还要复杂，但也可以把它们描述出来。每次试验可能出现的各种结果称为样本点，一般用 ω 表示，样本点组成的集合称为样本空间，用 Ω 表示。下面举一些例子。

在研究英文字母使用情况时，把样本空间选为 $\Omega=\{A, B, \cdots, E\}$ 是适宜的，这个样本空间只有有限个样本点，是比较简单的样本空间。

考查某电话交换台一年内处理的呼叫次数时，可把样本空间选为 $\Omega=\{0, 1, 2, 3, \cdots\}$，这个样本空间含有无穷多个样本点。

观测某地区的气温时，当然可以把样本空间取为 $\Omega=(-\infty, +\infty)$，但是为了应用方便，也可根据气象学的有关知识，把样本空间取为 $\Omega=(-100, +100)$。这个样本空间含有的样本点数比前两个例子的都多，是比较复杂的样本空间。

同一试验可以选取不同的样本空间。一般地，往往把每次试验时可能出现的最简单的结果确定为样本点，这对研究复杂问题是有利的。

建立样本空间后，就可以确切地定义事件，即事件是某些样本点的集合，称某事件发生当且仅当它所包含的某一个样本点出现。只含一个样本点的事件是最简单的事件，称为基本事件。

进行连续掷两次硬币的试验时，“第一次出现正面”这

个事件是由（正，正）与（正，反）两个样本点构成的。“至少出现一次反面”这个事件则是三个样本点（正，反），（反，正），（反，反）的集合。“两次皆出现正面”这一事件只含有一个样本点（正，正），是基本事件。

根据事件的定义，样本空间也可以是一个事件，因为在每次试验中必然出现 Ω 中的某个样本点，即 Ω 必然发生，所以常称 Ω 为必然事件。空集 ϕ 也可以看作一个事件，因为其不含有任何一个样本点，在任何一次试验中都不会发生，称其为不可能事件。

必然事件 Ω 在试验中必然发生，相反地，不可能事件在任何试验中都不发生，因此，必然事件与不可能事件不是随机事件。但为了研究问题方便，今后把这两个特殊事件看做随机事件的特殊情况。

二、事件的关系与运算

在一个样本空间中显然可以定义不止一个事件。在实际问题中，往往要求我们同时考察同一样本空间的几个事件以及它们之间的联系。详细地分析事件之间的关系，不仅可以帮助我们更深刻地认识事件的本质，而且可以把对复杂事件的研究转化为几个简单事件的研究，这将为具体问题的计算带来很大的方便。

例如，某工厂生产一批产品，其中有正品也有次品，现从中任意抽取三件，观察其出现次品数的情况，在这一试验中可有下列事件：

$A_1=\{$只有第一件是正品$\}$；

$A_2=\{$只有第三件是次品$\}$；

$A_3=\{$三件都是正品$\}$；

$A_4=\{$三件都是次品$\}$；

$A_5=\{$至少有一件是正品$\}$；

$A_6=\{$恰好有一件是正品$\}$；

$A_7=\{$次品数不超过两个$\}$；

$A_8=\{$正品数不多于一个$\}$；

$A_9=\{$至多有一件正品$\}$。

这九个事件间是有一定联系的，如 A_1 与 A_2 可能同时发生，而 A_3 与 A_4 不可能同时发生，A_5 与 A_7 实际上是同一事件等。

下面给出事件间的关系以及运算的定义。以下将事件简化为 A，B，C 等

1．包含关系

若 A 中的每一个样本点都在 B 中，则称 B 包含了 A，这时事件 A 发生必然导致事件 B 发生，记作 $B\supset A$ 或 $A\subset B$。如上例中 $A_5\supset A_3$。参见图7—1。

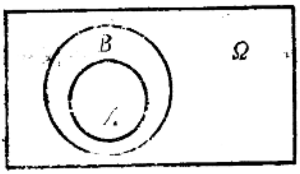

图 7—1

如果 $A\supset B$ 与 $B\supset A$ 同时成立，则称 A 与 B 相等，记作 $A=B$。相等的事件含有相同的样本点，必然同时发生，可以看作是一样的。如上例中 $A_5=A_7$。

2．事件的和

A 与 B 中所有的样本点的集合，称为 A 与 B 的和，记作 $A\cup B$。事件 $A\cup B$ 表示 A 发生或者 B 发生，或者 A 与 B 同时发生，即 A 与 B 至少发生一个。如上例中，$A_8=A_4\cup A_6$。参见图7—2。

图 7—2

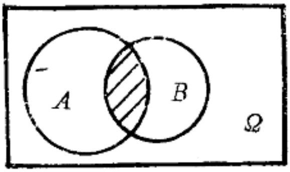

图 7—3

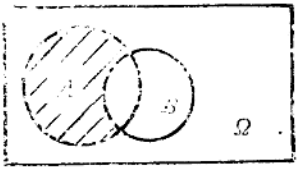

图 7—4

一般地，设A_1，A_2，…，A_n为n个事件，则这n个事件的和记作：

$$A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n$$

它表示这个n事件至少有一个发生。

3．事件的积

同时属于A与B的样本点的集合，称为A与B的积，记作$A \cap B$或AB。事件AB表示A与B同时发生。如上例中 $A_5 = A_5A_8$。参见图 7 — 3 。

一般地，设A_1，A_2，…，A_n为n个事件，则这n个事件的积记为：

$$A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n$$

它表示这 n 个事件同时发生。

4．事件的差

包含在A中而不包含在B中的样本点的集合，称为A与B的差，记作$A - B$。事件$A - B$表示A发生而B不发生。如上例中，$A_4 = A_9 - A_6$。参见图 7 — 4 。

5．互不相容

若$AB=\phi$，则称A与B互不相容，或称A与B互斥。互斥相容的两个事件不含有相同的样本点，因此不可能同时发生。如上例中A_3与A_4互斥。参见图7—5。同一样本空间中的各个基本事件是互不相容的。若事件A与B是互不相容的，则将A与B的和记作$A+B$。

图 7—5

图 7—6

6．对立事件

对于事件A，由样本空间Ω中所有不包含在A内的样本点所组成的集合称为A的逆事件，或称为A的对立事件，记为$\overline{A}$。知有$\overline{A}=\Omega-A$。$\overline{A}$表示A不发生。显然，若$\overline{A}$是A的对立事件，则A也是$\overline{A}$的对立事件，即$\overline{\overline{A}}=A$。必然事件$\Omega$与不可能事件$\phi$互为对立事件。参见图7—6。

应注意对立事件与互不相容事件的联系与区别：若$AB=\phi$，且$A+B=\Omega$，即A与B不可能同时发生，同时在每次试验中，A与B中又必然有一个发生，则A与B为对立事件。而只要有$AB=\phi$，即只要A与B不可能同时发生，则A与B互不相容。可知对立的两个事件一定互不相容，而互不相容的两个事件不一定是对立的。

事件间的运算遵循以下法则：

(1) 交换律：$A\cup B=B\cup A$

$$AB=BA$$

(2) 结合律：$(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$

$$(AB)C=A(BC)$$

(2) 分配率：$(A\cup B)C=AC\cup BC$

$$(AB)\cup C=(A\cup C)(B\cup C)$$

(4) 对偶律：$\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}$

$$\overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}$$

以上法则证明从略。对于事件的运算，有如下的约定：先进行逆的运算，再进行积的运算，最后进行和或差的运算。

例 1 设 $\Omega=\{1, 2, 3, \cdots, 10\}$，$A=\{2, 3, 4\}$，$B=\{3,4,5\}$，$C=\{5,6,7\}$，具体写出下列各式：(1) $\overline{A}B$；(2) $\overline{A}\cup B$，(3) $\overline{\overline{A}\,\overline{B}}$；(4) $A(B\cup C)$。

解 (1) $\overline{A}=\Omega-A=\{1, 5, 6, \cdots 10\}$，题设，$B=\{3, 4, 5\}$，可得$\overline{A}B=\{5\}$。

(2) 易得$\overline{A}\cup B=\{1, 3, 4, 5, \cdots, 10\}$。

(3) $\overline{\overline{A}\,\overline{B}}=\overline{\overline{A}}\cup\overline{\overline{B}}=A\cup B=\{2, 3, 4, 5\}$。

(4) $A(B\cup C)=AB\cup AC=\{3, 4\}\cup\phi=\{3, 4\}$。

例 2 设A、B、C为三个随机事件，试将下列事件用A、B、C的运算表示出来。

(1) 仅A发生；(2) A、B、C都发生；(3) A、B、C都不发生；(4) A、B、C中至少有一个发生。

解 (1) "仅A发生"，意即A发生而同时B与C都不发生，因而这一事件可表为$A\overline{B}\,\overline{C}$或$A-B-C$或$A-B\cup C$。

(2) "A、B、C都发生"，即三个事件同时发生，由事件积的定义，这一事件可表为ABC。

(3) "A、B、C都不发生"，由逆事件的意义，这一事件可表为$\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}$。

（4）“A、B、C中至少有一个发生”，由和事件的定义可表为$A\cup B\cup C$。

三、统计概型

1．频率稳定性

若事件 A 在 n 次重复试验中发生 k 次，则比值 k/n 称为事件A发生的频率，记为$f_n(A)$，即

$$f_n(A)=\frac{K}{n}$$

由频率的定义，易知

（1）$0\leqslant f_n(A)\leqslant 1$

（2）$f_n(\Omega)=1$，$f_n(\phi)=0$。

人们经过长期反复试验后，发现某具体事件在一次试验中可能发生也可能不发生，但在大量重复试验中却呈现出明显的规律性。即当试验的次数逐渐增加时，事件发生的频率逐渐稳定于某个常数。这个现象，称为频率稳定性。

投掷一枚均匀的硬币，出现反面与出现正面的可能性应该是相同的。即如果考查出现正面这一事件的频率，其值应该非常接近 0.5，历史上有人做了大量的试验，得到如下数据：

实验者	抗掷硬币的次数	出现正面的次数	频率
蒲丰	4040	2048	0.5069
皮尔逊	12000	6019	0.5016
皮尔逊	24000	12012	0.5001

结果同我们的想像和经验是一致的。类似地，人们发现

了英语中各个字母被使用的频率也是相当稳定的。对其他随机现象的研究也得到了相同的结果。由此，人们认识到频率稳定性是随机事件本身固有的客观属性，即某随机事件发生的可能性大小是确定的，是可以度量的。

2，统计概型

定义 1　进行足够多次重复试验，如果随着试验次数逐渐增加，事件 A 出现的频率将逐渐地稳定于某个常数 p，则称 p 为事件 A 的概率，记为 $P(A)=p$。

频率稳定性是由事物的本质所决定的，由定义 1 可知，当试验次数很大时，可把某事件发生的频率，近似地看作该事件的概率，并且误差是很小的。这为许多实际问题提供了求概率的有效方法。例如我们经常接触到的产品“合格率”“人口出生率”等等就是用频率代替概率的。

易知概率有下面的性质：

（1）$0\leqslant P(A)\leqslant 1$；

（2）$P(\Omega)=1$，$P(\phi)=0$。

四、古典概型

定义 2　对某随机试验，Ω 是其样本空间，如果（1）Ω 中所含样本点的个数是有限多个；（2）每个样本点发生的可能性相同；（3）在每次试验中，样本点能且只能有一个发生，则称此试验为古典概型或等可能概型。

古典概型在概率论中占有相当重要的地位。一方面，由于它简单，对它的讨论有助于直观地理解概率论的许多基本概念，另一方面，古典概型概率的计算在产品质量抽样检查等实际问题以及理论物理等的研究中都有重要作用。古典概

型是概率论初期的主要研究对象，因而得名。

定义 3 在古典概型下，设样本空间 Ω 中所含有的样本点总数为 N，事件 A 所包含的样本点个数为 M，则比值 M/N 称为事件 A 的概率，即

$$P(A)=\frac{M}{N}$$

定义 3 称为概率的古典定义，定义 1 称为概率的统计定义。由于定义的方法不同，导致了概率的求法不同，在处理具体问题时，应加以注意。

由概率的古典定义，亦有：

(1) $0\leqslant p(A)\leqslant 1$；

(2) $P(\Omega)=1$，$p(\phi)=0$。

例 3 袋中有 2 个白球，3 个黑球，从袋中任意取出一个，求取出的球是黑球的概率。

解 为了区别，我们设想 5 个球已经进行了从 1 到 5 的编号。由于是任意从袋中抽取，每个球被取到的机会是相同的。则本题可以看作是样本点总数为 5 的古典概型。

设 A = {取出的是黑球}，，由于有 3 个黑球，则 A 中所含样本点数为 3。

根据概率的古典定义

$$p(A)=\frac{M}{N}=\frac{3}{5}$$

如果把白球看作是次品，黑球看作是合格品，则本题就是求合格率的问题。事实上，古典概型的大部分问题都能形象化地用摸球模型来描述。

例 4 设有10件产品，其中不合格的有三件，从中任取