福姆斯題解叢書

1986

傅立葉分析
原理及題解

陳瑞琳 譯

含205個問題及解答

曉園出版社
世界图书出版公司

傅立葉分析

原理及題解

陳 瑞 琳 譯

曉 園 出 版 社
世界图书出版公司
北京·广州·上海· 安

傅立叶分析原理及题解

M. R. 施皮格尔　原著

陈瑞琳　译

*

晓园出版社出版

世界图书出版公司北京公司重印

北京朝阳门内大街 137 号

北京中西印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行　　各地新华书店经售

*

1993 年 11 月第　一　版　　开本：787×1245 1/20

1993 年 11 月第一次印刷　　印张：11.5

印数：0001－1000　　字数：17.9万字

ISBN：7－5062－1635－3/O·84

定价：9.80元（W_B9304/5）

譯　　序

傅立葉分析在工程數學的領域裏一直扮演著重要的角色，它可解微分方程上的複雜問題，更能在頻譜的分析上提供強大的協助。這本書的原作者史比吉爾的確是位這方面的專家，他精彩而豐富的將傅立葉的種種精神與技巧傳達給諸位讀者，使得本書也成為休姆斯系列中的姣姣者之一。譯者在此將原著翻成中文，目的即在使更多的讀者能夠受益此書，不管是自修的，或是參考的，譯者儘希望讀者能夠從譯本中得到原著最忠實的信念，獲取傅立葉分析中最重要的精華。

譯者　陳瑞琳

1986 年 12 月

原　　序

十九世紀初期，法國數學家傅立葉（J.B.J. Fourier）在他的熱傳導研究中獲致了某些三角級數的重大突破，這個成果使得他至今仍享有盛名。也就從那時起，傅立葉級數、傅立葉積分廣義式及正交級數都成了科學家、工程師以及數學家在應用和理論領域裏的主要知識背景。

這本書的主要目的，在表達傅立葉級數、傅立葉積分和正交函數（如貝賽爾、賴勤特、厄密特、和拉各耳函數等）的基本概念和應用。

本書除作爲傅立葉分析正式課程裏的教科書外，也可作爲所有現行標準課程中的理解性補充教材。尤其對於常用到本書裏重要方法的工程、科學和數學等學科，這本書是相當有價值的。而對於以傅立葉方法從事研究工作的人，或是在這方面有興趣的自學者，本書同樣是非常有用的參考材料。

每一章的開頭，都對永久定義式、原理和定理作了清楚的描寫，同時以圖解性和其他敍述性的教材做爲輔助。而且，我們還以問題的解答來作爲定理的說明和例證，藉此可幫助讀者有效地學習基本定理之運用。所以，大多數定理的證明和公式的導法都包含在問題的解答裏。每一章也以爲數不少的補充問題作爲此章教材的完整複習。

本書所包含的題材比大部份開頭課程要多出很多，目的在讓本書更具有彈性，不但使它能成爲一本有用的參考書，也讓讀者在研習的章節中會激起更大的興趣。

我要藉此感謝亨利・海頓及大衞・別克韋斯兩人所提供的最大協助。

史比古爾

1974年1月

目　錄

第一章

邊界值問題

物理問題之數學立式與解答

下列步驟通常用來解決科學與工程的問題。

1. **數學立式**：我們常採用**數學模式**(mathematical models)去研究近似一個真實的情況，而得到此式。

例題 1.1

在研究地球或其他行星相對於太陽的運動時，我們選擇點(points)來當作太陽和地球的數學模式。而當我們要研究地球對其自軸的運動時，數學模式便不再是一個點，而必須是一個球，或甚至精確一些，應該是一個橢球。

在數學立式時，我們用已知的物理定律去推導描述問題的方程式。如果這些定律並非已知，我們爲了瞭解它們，甚至必須去設計實驗。

例題 1.2

在描述行星對於太陽的運動時，我們用**牛頓定律**(Newton's law)去推導出一個包含在任何時間行星與太陽距離的**微分方程式**(differential equation)。

2. **數學解答**：當一問題已用方程式來設定，我們必須根據給定或隱含的限制條件去解出其中的未知數。重要的是，如此之解是否眞正**存在**(exist)?如果存在，它們是否唯一(unique)呢？

   爲了求得解答，必須有新的數學分析方法——因此產生了新的數學問題。

例題 1.3

傅立葉嘗試以偏微分方程式去解決一熱流問題時，他發明了將數學問題展開成包含正弦與餘弦級數的方法。這個級數，現在稱爲**傅立葉級數**(Fourier series)。在第二章時我們將會發現，從數學理論和物理應用的觀點來看，此級數是很有趣的。

3. **物理解釋**：在得到一個解答之後，用物理的觀點去解釋它是很有用的。這種解釋方法在其他問題的聯想上很具價值，同時常因而發現了數學與物理本質的新知識。

在本書中我們主要著眼於以**偏微分方程式**(partial differential equation)來表達物理問題的數學立式及其方程式之解答，此種方法通常稱爲**傅立葉方法**(Fourier methods)。

有關偏微分方程式之定義

偏微分方程式(partial differential equation)是一包含兩個或以上變數的未知函數以及對於這些變數之偏導數所構成之方程式。

而偏微分方程式之**階數**(order)即爲方程式中導數之最高階數。

例題 1.4

$\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 2x - y$ 爲一二階偏微分方程式。此處 u 爲**因變數**(dependent variable)，而 x 與 y 爲**自變數**(independent variable)。

微分方程式之解(solution)是一恒滿足方程式之任意函數。

一包含與階數相同數目之任意獨立函數之解稱爲方程式之**通解**(general solution)。

而從通解中經過特別選擇其任意函數後所得之解稱爲**特解**(particular solution)。

例題 1.5

經過代換後可知 $u = x^2 y - \frac{1}{2} x y^2 + F(x) + G(y)$ 爲例 4 微分方程式之一解。因爲它包含了兩個獨立函數 $F(x)$ 及 $G(y)$，所以它是通解。特殊情形下，當 $F(x) = 2\sin x$, $G(y) = 3y^4 - 5$ 時，我們可得特解

$$u = x^2 y - \tfrac{1}{2} x y^2 + 2\sin x + 3y^4 - 5$$

奇異解(singular solution)是指一無法從通解中經過特別選擇其任意函數所得之解。

例題 1.6

若 $u = x\frac{\partial u}{\partial x} - \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2$，其中 u 爲 x 及 y 之函數，經過代換可知 $u = xF(y) - [F(y)]^2$ 及 $u = x^2/4$ 爲其解。前者是一包含任意函數 $F(y)$ 之通解。而後者卻無法從通解中經過對 $F(y)$ 之任何選擇而得到，爲一奇異解。

邊界值問題(boundary value problem)是一其解需滿足所謂的**邊界條件**(boundary condition)之偏微分方程式求解問題。而有關其存在及唯一性之定理稱爲**存在**(existence)及**唯一定理**(uniqueness theorems)。

線性偏微分方程式

包含兩個自變數之二階**線性偏微分方程式**(linear partial differential equation)其通式為

$$A\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+B\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}+C\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+D\frac{\partial u}{\partial x}+E\frac{\partial u}{\partial y}+Fu=G \tag{1}$$

其中A，B，⋯，G可隨x及y而變，但不隨u而變。若一含有自變數x及y之二階方程式不為(1)式之形式則稱為**非線性**(nonlinear)。

若恒有$G=0$稱方程式為**齊次**(homogeneous)，若$G\neq 0$則稱為**非齊次**(nonhomogeneous)。這可以輕易地推論至較高階的情況。

由於(1)式之解的性質，我們可以根據B^2-4AC分別是小於、大於或等於0之情況，將方程式區分為**橢圓型**(elliptic)，**雙曲線型**(hyperbolic)或**拋物線型**(parabolic)三種形式。

一些重要的偏微分方程式

1.　振動繩索方程式　$\boxed{\dfrac{\partial^2 y}{\partial t^2}=a^2\dfrac{\partial^2 y}{\partial x^2}}$

本方程式應用在一起始位於x軸然後使其運動之拉緊彈性繩索，例如小提琴之弦，之橫向微小振動(見圖1-1)。函數$y(x,t)$是繩索在時間t，任意點x之位移。常數$a^2=\tau/\mu$，其中τ為繩索之(常數)張力，而μ為繩索單位長度之(常數)質量，通常假設無外力作用於繩索，其振動之原因為其自身之彈性。

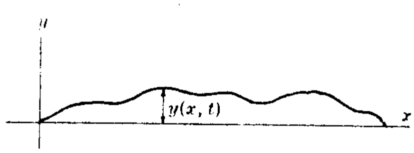

圖 1-1

此方程式可以推廣至較高維次，例如二維之薄膜或鼓膜振動。在二維之情形下，方程式為

$$\frac{\partial^2 z}{\partial t^2}=a^2\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right)$$

2. 熱傳導方程式
$$\boxed{\frac{\partial u}{\partial t} = \kappa \nabla^2 u}$$

此處 $u(x, y, z, t)$ 爲在時間 t 時，個體中位置 (x, y, z) 之溫度。常數 k 稱爲擴散係數(diffusivity)，其值等於 $K/\sigma\mu$ 。其中 K 爲熱傳導係數(thermal conductivity)，而比熱(specific heat) σ 及密度(單位體積之質量) μ 都假設爲常數。我們稱 $\nabla^2 u$ 爲 u 之拉普拉斯算子(Laplacian)，在三維之直角座標 (x, y, z) 中其形式爲

$$\nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$

3. 拉普拉斯方程式
$$\boxed{\nabla^2 v = 0}$$

本方程式出現於很多領域中。例如在熱傳導理論中，v 爲一穩定態溫度(steady-state temperature)，即經過一段長時間後之溫度。其方程式是將 $\partial u/\partial t = 0$ 代入熱傳導方程式中而求得。在重力或電學理論中，v 代表重力或電位能(gravitational or electric potential)。所以我們通常稱此方程式爲位能方程式(potential equation)。

解位於區域 R 中之 $\nabla^2 v = 0$ 問題，通常稱爲狄里西雷問題(Dirichlet problem)，其中 v 爲某些位於 R 之邊界上的已知函數。

4. 樑之縱向振動
$$\boxed{\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}}$$

本方程式描述一可縱向振動(在 x 方向)之樑的運動(圖1-2，第5頁)，但假設其振動很小。變數 $u(x, t)$ 表示在 x 處從截面平衡位置算起之縱向變位。而常數 $c^2 = E/\mu$ ，其中 E 爲彈性模數(應力除以應變)，隨著樑之性質而異，μ 爲密度(單位體積之質量)。

請注意本方程式與振動繩索之形式是一樣的。

5. 樑之橫向振動
$$\boxed{\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + b^2 \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} = 0}$$

此方程式描述一橫向振動(即垂直於 x 方向)之樑的運動(起始位於 x 軸上，見圖1-3)。此處 $y(x, t)$ 表示在任意時間 t ，任意點 x 之橫向變位。常數 $b^2 = EI/A\mu$ ，其中 E 爲彈性模數，I 爲任意截面關於 x 軸之慣性矩，A 爲截面

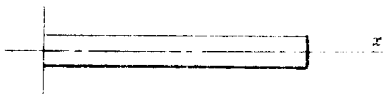

圖 1.2

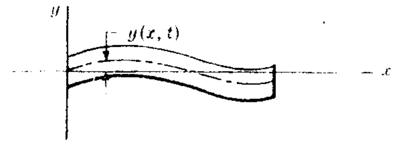

圖 1.3

之面積，μ 爲單位長度之質量。若有橫向外力 $F(x,t)$ 作用於其上，則本方程式之右邊需代入 $b^2F(x,t)/EI$ 。

不同座標系統下之拉普拉斯算子

拉普拉斯算子常常出現於科學及工程上之偏微分方程式。由於問題型態之不同，選擇適當之座標系統對於求解將很重要。例如，若問題包含一圓柱體，以柱面座標(cylindrical coordinates ）來求解通常較方便，而如果問題包含一球體，則以球面座標(spherical coordinates ）來求解較爲便利。

柱面座標（ρ,ϕ,z）（見圖1-4）之拉普拉斯算子爲

$$\nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial u}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \tag{2}$$

直角與柱面座標間之轉換爲

$$x = \rho\cos\phi, \quad y = \rho\sin\phi, \quad z = z \tag{3}$$

其中 $\rho \geq 0$ ，$0 \leq \phi < 2\pi$ ，$-\infty < z < \infty$ 。

球面座標（r,θ,ϕ）（見圖1-5）之拉普拉斯算子爲

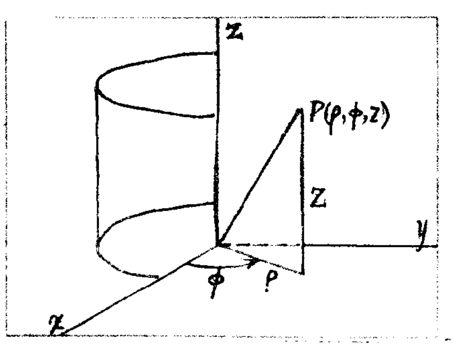

圖 1.4

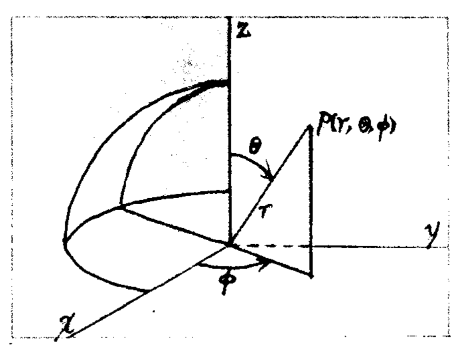

圖 1.5

$$\nabla^2 u = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial u}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 u}{\partial\phi^2} \tag{4}$$

直角與球面座標間之轉換爲

$$x = r\sin\theta\cos\phi,\quad y = r\sin\theta\sin\phi,\quad z = r\cos\theta \tag{5}$$

其中 $r \geq 0$ ，$0 \leq \theta \leq \pi$ ，$0 \leq \phi < 2\pi$ 。

邊界值問題的解法

有許多方法可解包含線性偏微分方程式之邊界值問題。在本書中我們將著眼於兩種觀點有些對立的解法。

第一種方法是先找出偏微分方程式之通解，然後以邊界條件去求得眞正的答案。第二種方法是先找出偏微分方程式之特解，再由這些特解中去求得眞正之解。這兩種方法中，後者之應用性往往比前者來得大。

1. 通解 ： 在本法中我們首先找出通解，然後再求得滿足邊界條件之特解。下列定理是最基本及重要的。

定理 1-1 （疊加原理）：若 u_1 ，u_2 ，…，u_n 爲一線性齊次偏微分方程式之解，則 $c_1u_1 + c_2u_2 + \cdots + c_nu_n$ 亦爲其一解。其中 c_1 ，c_2 ，…，c_n 爲常數。

定理 1-2：一線性非齊次偏微分方程式之通解等於齊次方程式之通解加上非齊次方程式之特解而得。

有時我們也以常微分方程式之求解方法去找出通解。見問題1.15及1.16。

若(1)式中之 A ，B ，…，F 爲常數，則此齊次方程式之通解可由假設 $u = e^{ax+by}$ 而求得。其中 a 及 b 是未定之常數。見問題1.17 - 1.20 。

2. **以分離變數法求特解**　本法非常簡單然而卻很有用，它是假設其解可表爲許多未知函數之乘積且每一函數只隨其中單獨一個自變數而變。本法成功之處，在於其能將整理後之方程式寫爲一邊只決定於一個變數，另一邊決定於其他變數之形式，結果我們可以推知每一邊都必須是常數。重複此種方法，則未知函數便可決定。再利用疊加方法則可找出眞正的答案。見問題1.21 - 1.25 。

習題與解答

物理問題之數學立式

1.1　請導出第 3 頁之振動繩索方程式。

答　參照圖 1-6，假設 Δs 爲繩索弧長元素。因爲張力假定爲常數，故作用於 Δs 向上之垂直力爲

$$\tau \sin\theta_2 - \tau \sin\theta_1 \tag{1}$$

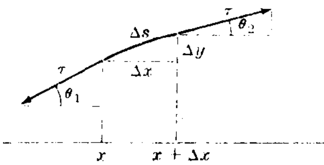

圖 1-6

由於在小角度時可近似 $\sin\theta = \tan\theta$，此力便爲

$$\tau \left.\frac{\partial y}{\partial x}\right|_{x+\Delta x} - \tau \left.\frac{\partial y}{\partial x}\right|_{x} \tag{2}$$

上式中用到了斜率 $\tan\theta = \dfrac{\partial y}{\partial x}$ 之性質。此處我們以 $\left.\dfrac{\partial y}{\partial x}\right|_x$ and $\left.\dfrac{\partial y}{\partial x}\right|_{x+\Delta x}$ 來分別表示於 x 及 $x+\Delta x$ 處 y 對 x 之偏導數。根據牛頓定律，淨力等於繩索質量（$\mu\,\Delta s$）乘以 Δs 之加速度 $\dfrac{\partial^2 y}{\partial t^2} + \epsilon$。其中當 $\Delta s \to 0$ 時 $\epsilon \to 0$。所以我們可以近似

$$\tau\left[\left.\frac{\partial y}{\partial x}\right|_{x+\Delta x} - \left.\frac{\partial y}{\partial x}\right|_{x}\right] = (\mu\,\Delta s)\left(\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + \epsilon\right) \tag{3}$$

若振動很小，我們可近似 $\Delta s = \Delta x$，所以(3)式在除以 $\mu\,\Delta x$ 後變爲

$$\frac{\tau}{\mu}\,\frac{\left.\frac{\partial y}{\partial x}\right|_{x+\Delta x} - \left.\frac{\partial y}{\partial x}\right|_{x}}{\Delta x} = \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + \epsilon \tag{4}$$

取 $\Delta x \to 0$ 之極限（其中 $\epsilon \to 0$），可得

$$\frac{\tau}{\mu}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \quad \text{或} \quad \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = a^2\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}, \quad \text{其中 } a^2 = \tau/\mu$$

1.2　寫出一長度 L 之振動繩索的邊界條件於 (a) 端點 $x=0$ 及 $x=L$ 都爲固定，(b) 起始之形狀爲 $f(x)$，(c) 起始之速度分佈爲 $g(x)$，(d) 在任意時間 t，任意點 x 變位皆爲有界。

答　(a) 若繩索固定於 $x=0$ 及 $x=L$，則在 $x=0$ 及 $x=L$ 處之變位 $y(x,t)$ 對

所有時間 $t>0$ 都必須爲 0 ，即

$$y(0,t)=0,\quad y(L,t)=0\qquad t>0$$

(b) 由於繩索之起始形狀爲 $f(x)$ ，我們有

$$y(x,0)=f(x)\qquad 0<x<L$$

(c) 由於繩索在任意點 x 之起始速度爲 $g(x)$ ，我們有

$$y_t(x,0)=g(x)\qquad 0<x<L$$

請注意 $y_t(x,0)$ 即爲在 $t=0$ 時之 $\partial y/\partial t$ 。

(d) 因爲 $y(x,t)$ 爲有界，我們可找到一個與 x 及 t 無關之常數 M 使得

$$|y(x,t)|<M\qquad 0<x<L,\ t>0$$

1.3 寫出一振動繩索之邊界條件於 (a) 端點 $x=0$ 處以 $G(t)$ 之時間函數來運動，(b) 端點 $x=L$ 處並不固定，而是使其自由運動。

圖 (a) 在 $x=0$ 處之變位爲 $y(0,t)$ ，故我們有

$$y(0,t)=G(t)\qquad t>0$$

(b) 若 τ 爲張力，則作用在任意點 x 處之橫向力爲

$$\tau\frac{\partial y}{\partial x}=\tau y_x(x,t)$$

由於端點 $x=L$ 處可自由運動，所以無力量作用其上，邊界條件便表爲

$$\tau y_x(L,t)=0\quad \text{或}\quad y_x(L,t)=0\qquad t>0$$

1.4 假設問題 1.1 中繩索之張力爲變數，即決定於所取之特別點。以 $\tau(x)$ 來表示張力，請證明該振動繩索方程式爲

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[\tau(x)\frac{\partial y}{\partial x}\right]=\mu\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

圖 此處我們將問題 1.1 之(2)式寫爲

$$\tau(x)\frac{\partial y}{\partial x}\bigg|_{x+\Delta x}-\tau(x)\frac{\partial y}{\partial x}\bigg|_{x}$$

則對應於(4)式寫爲

$$\frac{\tau(x)\frac{\partial y}{\partial x}\Big|_{x+\Delta x} - \tau(x)\frac{\partial y}{\partial x}\Big|_{x}}{\mu\,\Delta x} = \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + \epsilon$$

當取 $\Delta x \to 0$ 之極限（其中 $\epsilon \to 0$），則我們可得

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[\tau(x)\frac{\partial y}{\partial x}\right] = \mu\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

上式是乘以 μ 後所得。

1.5　證明通過一傳導介質平面之熱通量為 $-K\dfrac{\partial u}{\partial n}$，其中 u 為溫度，n 為垂直於該平面之一法線，而 K 為該介質之熱導數。

圖　假設我們有相隔 Δn 之兩平行平面 I 和 II（見圖 1-7），其分別具有溫度 u 及 $u+\Delta u$。則熱流將從溫度較高之平面流向溫度較低之平面。而且單位時間單位面積之流量，稱為熱通量（heat flux），將正比於溫差 Δu 及反比於距離 Δn。所以我們有

$$\text{從 I 至 II 之熱通量} = -K\frac{\Delta u}{\Delta n} \qquad (1)$$

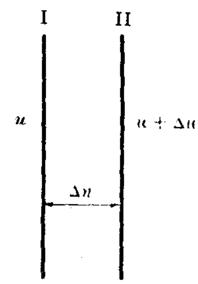

圖 1-7

其中 K 是比例常數，稱為熱導數。由於若 $\Delta u > 0$，熱流實際上是從 II 流到 I，故在(1)式中取了負號。

將(1)式中 Δn 及 Δu 取趨近於 0 之極限，我們可如預期中得到

$$\text{經過平面 I 之熱通量} = -K\frac{\partial u}{\partial n} \qquad (2)$$

有時我們稱 $\dfrac{\partial u}{\partial n}$ 為 u 之梯度（gradient），其向量形式為 ∇u，所以(2)式可寫為

$$\text{經過平面 I 之熱通量} = -K\,\nabla u \qquad (3)$$

1.6　若一固定於任意時間 t 任意點 (x, y, z) 處之溫度為 $u(x, y, z, t)$，而 K，σ 及 μ 分別是該固體之熱傳導係數，比熱及密度，且都假設為常數，證明

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \kappa\nabla^2 u \qquad \text{及} \qquad \kappa = K/\sigma\mu$$

圖　考慮圖 1-8 中固定 V 之微小體積元素，圖 1-9 並將其放大了。從問題 1.5 可知

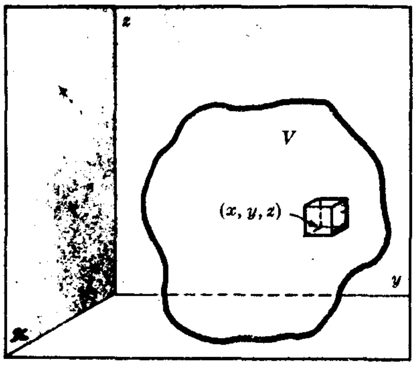

圖 1-8

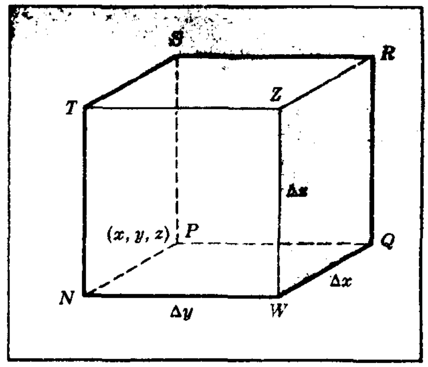

圖 1-9

單位時間單位面積通過面$PQRS$之熱量爲$-K\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_x$，其中$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_x$表示在$x$位置$u$對於$x$之導數。由於面$PQRS$之面積爲$\Delta y\Delta z$，在$\Delta t$時間內經由面$PQRS$進入元素內之所有熱量爲

$$-K\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_x \Delta y\,\Delta z\,\Delta t \tag{1}$$

同樣地，經由面$NWZT$離開元素之熱量爲

$$-K\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x+\Delta x} \Delta y\,\Delta z\,\Delta t \tag{2}$$

其中$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x+\Delta x}$爲$x+\Delta x$處$u$對於$x$之導數。

留在元素中的熱量爲進入量減去離開量，由(1)及(2)式可知其爲

$$\left\{K\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x+\Delta x} - K\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_x\right\}\Delta y\,\Delta z\,\Delta t \tag{3}$$

以類似的方法可得知在y-及z-方向上由於熱傳遞所留在元素內之熱量分別爲

$$\left\{K\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{y+\Delta y} - K\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_y\right\}\Delta x\,\Delta z\,\Delta t \tag{4}$$

及

$$\left\{K\left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_{z+\Delta z} - K\left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_z\right\}\Delta x\,\Delta y\,\Delta t \tag{5}$$

該元素得到的所有熱量等於(3)、(4)及(5)式之和。這些熱量便用來使溫度增高Δu。我們現知欲使質量m之物體增高Δu之溫度需要$m\sigma\,\Delta u$的熱量，其中σ爲比熱。若此固體之密度爲u，則質量$m=u\,\Delta x\,\Delta y\,\Delta z$。則(3)、(4)及(5)式之熱量總和便等於

$$\sigma\mu\,\Delta x\,\Delta y\,\Delta z\,\Delta u \qquad (6)$$

假如現在我們將(3)、(4)及(5)式之和代入(6)式，然後除以$\Delta x\,\Delta y\,\Delta z\,\Delta t$，可得到

$$\left\{\frac{K\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x+\Delta x}-K\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x}}{\Delta x}\right\}+\left\{\frac{K\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{y+\Delta y}-K\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{y}}{\Delta y}\right\}+\left\{\frac{K\left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_{z+\Delta z}-K\left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_{z}}{\Delta z}\right\} = \sigma\mu\frac{\Delta u}{\Delta t}$$

將上面之方程式取Δx，Δy，Δz及Δt全部趨近於0之極限後變爲

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(K\frac{\partial u}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(K\frac{\partial u}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(K\frac{\partial u}{\partial z}\right) = \sigma\mu\frac{\partial u}{\partial t} \qquad (7)$$

或當K爲常數時

$$K\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right) = \sigma\mu\frac{\partial u}{\partial t} \qquad (8)$$

上式可寫爲

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \kappa\nabla^2 u \qquad (9)$$

其中 $k=\dfrac{K}{\sigma\mu}$ 稱爲擴散係數。

1.7 以向量方法解問題1.6。

圖　令V爲該固體中之一任意體積，且S爲其表面（見圖1-8）。通過S之所有熱通量，或是單位時間內離開S之熱量爲

$$\iint_S (-K\nabla u)\cdot\mathbf{n}\,dS$$

其中$\mathbf{n}$爲S上之一往外的單位法向量。則由發散定理可得單位時間內進入S的熱量爲

$$\iint_S (K\nabla u)\cdot\mathbf{n}\,dS = \iiint_V \nabla\cdot(K\nabla u)\,dV \qquad (1)$$

體積V內所含之熱量爲

$$\iiint_V \sigma\mu u\,dV$$

則熱量之時間增加率爲

$$\frac{\partial}{\partial t}\iiint_V \sigma\mu u\,dV = \iiint_V \sigma\mu\frac{\partial u}{\partial t}\,dV \qquad (2)$$