工程计算结构力学丛书

GONGCHENG JISUAN JIEGOU LIXUE CONGSHU

曹富新 编

简明弹性力学

辽宁科学技术出版社

工程计算结构力学丛书

简明弹性力学

Jianming Tanxing Lixue

曹富新　编

辽宁科学技术出版社出版　（沈阳市南京街6段1里2号）
辽宁省新华书店发行　沈阳新华印刷厂印刷

开本：787×1092 1/32　印张：$10\frac{3}{8}$　字数：241,000
1984年4月第1版　1984年4月第1次印刷

责任编辑：李殿华　绘　图：凡恩开
封面设计：赵多良　责任校对：王　莉

印数：1—8,100

统一书号：15288·66　定价：1.05元

内 容 简 介

本书着重讲述了弹性力学的基本理论和概念，并介绍了弹性力学的各种求解方法，特别是为适应电算的需要，书中还加强了位移法的讲解。全书共分八章，主要内容有：弹性力学的基本假设、基本物理量和研究方法；平面问题（直坐标、极坐标的基本方程，按位移、应力、应力函数求解的方法）；空间问题；扭转、薄板和薄壳问题；能量法的应用等。

本书可供工程技术人员自学参考，或作高等院校工科专业师生的教学参考书或教材。

前言

计算结构力学是一门新兴的力学分支，是力学理论和近代数字电子计算机上的计算方法相结合的产物。它的产生和发展，对于分析工程中复杂的结构问题发挥了巨大的作用。

目前，广大科技人员迫切需要学习有关电算、力学的基本理论以及解决力学问题的新方法——有限元法等知识，许多工科院校已经开设了与此有关的课程，许多工厂和科研单位也都相继举办了短训班学习这方面的内容。为了适应这种新的需要，满足读者学习计算结构力学的要求，我们编写了这套工程计算结构力学丛书（简称丛书），包括：《工程力学中的计算方法》、《杆系结构矩阵分析》、《简明有限元法》、《简明弹性力学》、《有限元法的程序设计》等。

这套丛书，从数学的计算方法、力学的基本理论到具体计算的程序设计，都作了全盘考虑，力求做到前后呼应、相互联系，同时又注意保持各册的独立性，以便单册学习。叙述上力求简洁、易懂，并配有相当数量的例题。

这套丛书，可作工程技术人员的自学参考书，也可作高等院校工科专业及短训班学习计算结构力学的成套教学参考书或教材。

这本《简明弹性力学》，讲述了弹性力学的基本理论和方法，是学习电算的力学基础。全书共分八章，从理论力学

和材料力学方法开始，提出弹性力学的研究方法，然后重点讲述了弹性平面问题基本方程的建立和求解，还讲述了空间问题和等直柱体的扭转；薄板和薄壳属于应用弹性力学范围，书中较多地讲述了薄板基本方程的建立和求解，薄板的稳定和自由振动，对于薄壳只介绍了圆柱壳和回转壳的薄膜理论以及圆柱壳的轴对称弯曲，壳体的一般理论显然已超出了本书的范围。本书的最后一章介绍了能量法的应用。

弹性力学知识，无论是对结构计算模型的建立还是对计算结果的分析都是非常重要的，也是学习有限元法和固体力学其它学科所必不可少的。为了适应电算的需要，书中加强了位移法的讲解，并对某些公式采用了矩阵记法，暂时还不熟悉矩阵代数知识的读者，可以先越过这些内容，这样并不会影响后面的学习。

孙焕纯副教授仔细地阅读了全部书稿，提出了许多宝贵意见，余家璞副教授也对书稿提出了不少有益意见，凡恩开同志描绘了全部插图。所有这些，对提高书稿的质量都是有意义的，在此一并表示感谢。尽管如此，由于水平所限，错误和不当之处在所难免，敬请读者批评指正。

编　者

一九八三年三月

目　录

第一章　绪　论

弹性力学是固体力学的一个分支。它的基本任务，就是确定在外力作用下弹性体内各点的应力、应变和位移。它的理论基础是牛顿力学加上弹性物理关系，也就是把理论力学和材料力学的方法应用到一般的弹性体上。为此，在本章的开头，我们首先概略地回顾一下理论力学和材料力学的研究方法。

第一节　理论力学方法和材料力学方法

理论力学把物体抽象为质点或刚体，研究它们的运动，它的理论基础是牛顿三大定律。理论力学的静力学研究的是质点或刚体的平衡及平衡条件。

质点静力学的研究指出，作用于质点上的诸力处于平衡的充分必要条件是诸力的合力（几何和）为零。这通常称为静力平衡条件，表示为

$$\vec{F}_1+\vec{F}_2+\cdots+\vec{F}_n=\sum_{i=1}^{n}\vec{F}_i=0 \qquad (1—1)$$

或用向量在三个坐标轴上的投影表示，为

$$\sum_{i=1}^{n}F_{xi}=0,\quad \sum_{i=1}^{n}F_{yi}=0,\ \sum_{i=1}^{n}F_{zi}=0 \qquad (1—1')$$

式中　$\vec{F}_i$——作用于质点上的第 i 个力向量；

F_{xi}，F_{yi}，F_{zi}——向量$\vec{F}_i$ 在 x，y，z 轴上的分量。

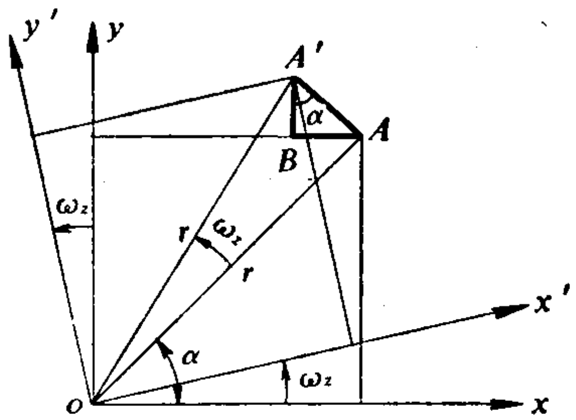
对于作用在刚体上的空间力系，保证平衡的充分必要条件是，合力（主向量）和合力矩（主矩）都为零。表示为

$$
\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{n}F_{xi}=0,\quad \sum_{i=1}^{n}F_{yi}=0,\quad \sum_{i=1}^{n}F_{zi}=0 \\
&\sum_{i=1}^{n}M_{xi}=0,\quad \sum_{i=1}^{n}M_{yi}=0,\quad \sum_{i=1}^{n}M_{zi}=0
\end{aligned}
\qquad (1—2)
$$

式中　M_{xi}，M_{yi}，M_{zi}——力矩向量$\vec{M}_i$在x，y，z方向的分量。

质点的运动由位移描述，位移是一个向量，用记号$\vec{f}$表示，它在三个坐标轴上的投影用 u、v、w表示，称为位移分量。

刚体的运动，可以分为平移和转动，平移对于刚体上的各点都是相同的，用位移向量$\vec{f}_p$或它的三个分量 u_p，v_p，w_p 表示；绕 x，y，z 轴的转动角分别用 ω_x，ω_y，ω_z 表示，它使刚体上各点产生了不同的位移。设有一刚体如图1—1所示。现求在微小转角情形下任意一点A的位移。先设刚体只绕 z 轴转动微角 ω_z，这时



$AB=u'$，$A'B=v'$

图1—1

$A(x,\ y,\ z)$移至$A'(x+u',\ y+v',\ z+w')$。由图1—1有

$$AA'=r\omega_z$$

$$u'=-AA'\sin\alpha=-\omega_z r\sin\alpha=-\omega_z y$$

$$v' = AA'\cos\alpha = \omega_z r\cos\alpha = \omega_z x$$

$$w' = 0$$

如果使用矩阵，可以表示为

$$\begin{Bmatrix} u' \\ v' \\ w' \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_z & 0 \\ \omega_z & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix} \tag{a}$$

今后，用“{ }”表示列阵（或列向量），用“[ ]”表示行阵（或行向量）和矩阵。

若继续绕 y轴和 x轴旋转微角 ω_y和 ω_x，可以得到相应的位移表达式，分别记为

$$\begin{Bmatrix} u'' \\ v'' \\ w'' \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \omega_y \\ 0 & 0 & 0 \\ -\omega_y & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix} \tag{b}$$

和

$$\begin{Bmatrix} u''' \\ v''' \\ w''' \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\omega_x \\ 0 & \omega_x & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix} \tag{c}$$

因此，当刚体产生三个微小转动角 ω_x，ω_y，ω_z 时，其上任意一点产生的位移为式（a），（b），（c）三式的迭加，记为

$$\{f_{r0}\} = \begin{Bmatrix} u_{r0} \\ v_{r0} \\ w_{r0} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_z & \omega_y \\ \omega_z & 0 & -\omega_x \\ -\omega_y & \omega_x & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix} \tag{1—3}$$

式中 $\{f_{r0}\}$——刚体转动位移列阵。

如记

$$[\omega] = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_z & \omega_y \\ \omega_z & 0 & -\omega_x \\ -\omega_y & \omega_x & 0 \end{bmatrix} \tag{1—4}$$

$$\{\zeta\}=[\,x\quad y\quad z\,]^T \tag{1—5}$$

$$\{f_p\}=[u_p\ \ v_p\ \ w_p]^T \tag{1—6}$$

$$\{f_r\}=[u_r\ \ v_r\ \ w_r]^T \tag{1—7}$$

则刚体位移（或称刚性位移）可以表示为

$$\{f_r\}=\{f_p\}+[\omega]\{\zeta\} \tag{1—8}$$

式中 $[\omega]$——旋转变换矩阵，是反对称矩阵；

$\{\zeta\}$——坐标列阵；

$\{f_p\}$——平移位移列阵；

$\{f_r\}$——刚体位移列阵。

矩阵符号$[\quad]$右肩上的记号T，表示该矩阵的转置。式（1—8）的展开式为

$$\begin{Bmatrix} u_r \\ v_r \\ w_r \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} u_p \\ v_p \\ w_p \end{Bmatrix}+\begin{pmatrix} 0 & -\omega_z & \omega_y \\ \omega_z & 0 & -\omega_x \\ -\omega_y & \omega_x & 0 \end{pmatrix}\begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix} \tag{1—8'}$$

材料力学与理论力学不同，它把物体简化为满足虎克定律的弹性体*)，但是只研究一维的杆件或几根杆件组成的简单结构。在外力作用下，杆件要发生变形，因而要产生抵抗变形的内力。材料力学为了把理论力学静力平衡的概念引入杆件内部，采用了截面法，假想把杆件用平面切开分为两部分，一部分对另一部分的作用根据牛顿第三定律要用力来代替，如弯矩、切力等，这些都是内力。

为了确定内力，对于静定结构，只要对杆件进行平衡分析就够了，例如在拉杆（或压杆）中所作的那样；但是，对于超静定结构，如图 1—2(a)，是由三根杆件组成的超静定结构，为了确定各杆的内力，必须进行三方面的分析，即节

---

*) 也有一些材料力学是研究塑性的。

点处轴力与外力的平衡分析；杆件伸长（或缩短）与节点位移的几何分析；杆件轴力与变形的物理关系分析。

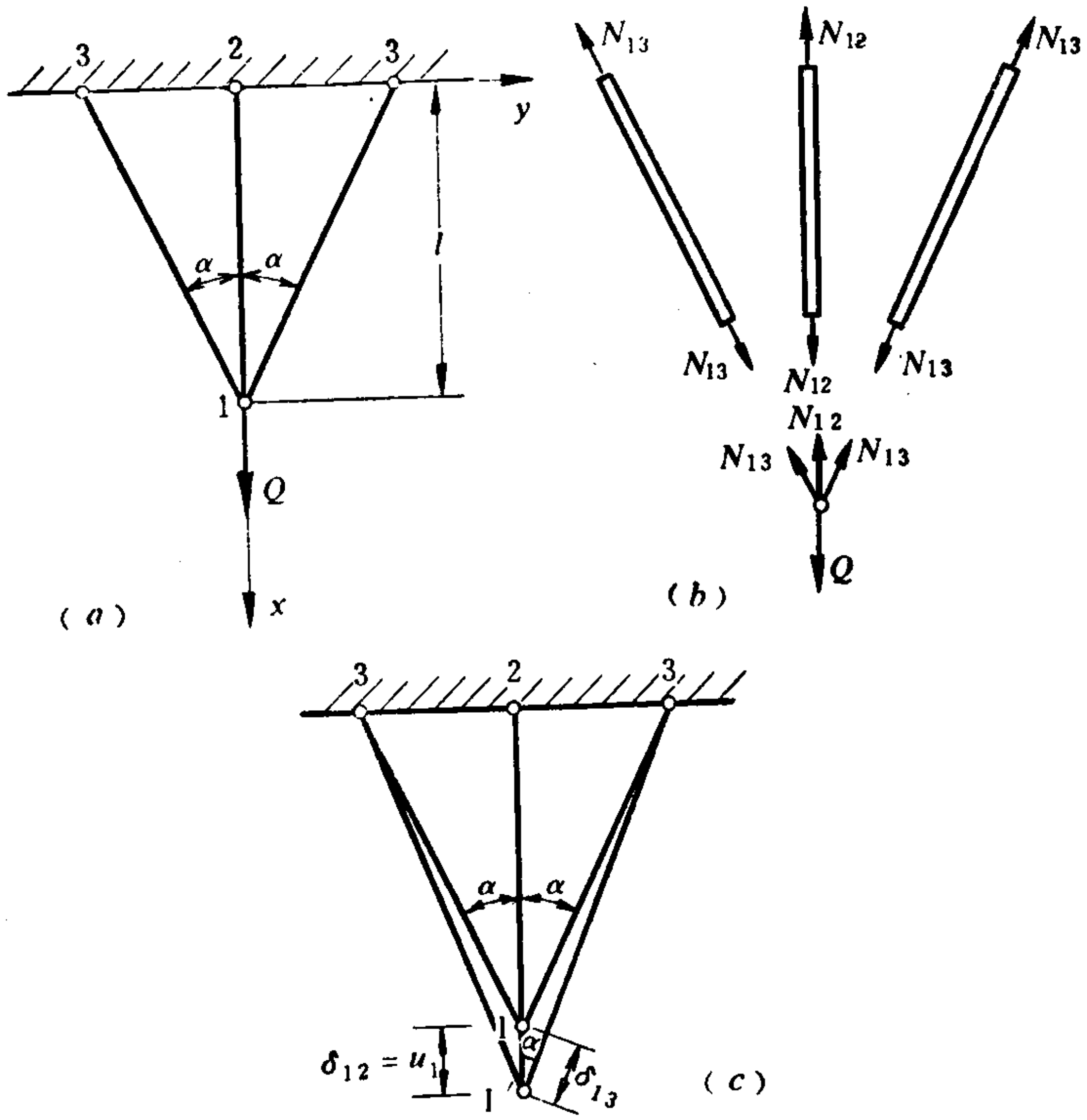


图1—2

下面简要地分析这一问题。设所给结构是对称结构，在节点1处作用向下的荷载Q，现假想地把各杆拆开，画出分离体如图 1—2(b)。设各杆的轴力为 N_{13}、N_{12}、N_{13}；伸长量为 δ_{13}、δ_{12}、δ_{13}；节点1在x方向的位移为 u_1。字母 N、δ 的两个数字下标表示杆件号码，用该杆两端的节点号表示。下面进行三方面分析：

1．平衡分析

列出节点1处轴力与外力的平衡方程，由图1—2(b)可写出

$$N_{12}+2N_{13}\cos\alpha=Q \qquad \text{(d)}$$

由于只能列出一个平衡方程，而有两个未知轴力，无法解出，必须考虑问题的变形方面。

2．几何分析

列出杆件的伸长变形与节点位移的关系式，称为几何方程，这些关系根据图 1—2(c)，可写为

$$\delta_{12}=u_1,\quad \delta_{13}=u_1\cos\alpha \qquad \text{(e)}$$

从上式消去位移 u_1，得

$$\delta_{13}-\delta_{12}\cos\alpha=0 \qquad \text{(f)}$$

该式表明各杆变形间的关系，称为变形协调条件（或连续条件）。几何分析增加了一个方程，但又多了两个未知数。因此，还必须进行物理方面的分析。

3．物理分析

建立伸长变形与轴力间的关系，称为物理方程。根据虎克定律，应力与应变成正比，有

$$\frac{N_{12}}{A_0}=E\frac{\delta_{12}}{l_{12}},\quad \frac{N_{13}}{A_0}=E\frac{\delta_{13}}{l_{13}} \qquad \text{(g)}$$

式中 A_0 ——杆件横截面面积（设三根杆横截面面积相等）；

E ——弹性模量（设三根杆材料相同）；

l_{12}、l_{13}——变形前杆件长度。设$l_{12}=l$，则 $l_{13}=\dfrac{l}{\cos\alpha}$。

通过三方面的分析，得到了(d)～(g)四个方程，显然，(e)和（f）是等价的，因此可以从两个方面综合所得到的方程。

（1）把内力、变形和位移作为未知数。综合方程式(d)、(e)、(g)，有

$$
\begin{aligned}
&N_{12}+2N_{13}\cos\alpha=Q \\
&\delta_{12}=u_1,\quad \delta_{13}=u_1\cos\alpha \\
&\frac{N_{12}}{A_0}=E\frac{\delta_{12}}{l},\quad \frac{N_{13}}{A_0}=E\frac{\delta_{13}\cos\alpha}{l}
\end{aligned}
\tag{1—9}
$$

（2）把内力、变形作为未知数。综合式（d)、(f)、(g)，有

$$
\begin{aligned}
&N_{12}+2N_{13}\cos\alpha=Q \\
&\delta_{13}-\delta_{12}\cos\alpha=0 \\
&\frac{N_{12}}{A_0}=E\frac{\delta_{12}}{l},\quad \frac{N_{13}}{A_0}=E\frac{\delta_{13}\cos\alpha}{l}
\end{aligned}
\tag{1—10}
$$

方程式（1—9）有五个方程和五个未知数，方程式（1—10）有四个方程和四个未知数，而且都是代数方程，故可直接求解。

在式（1—9）、（1—10）基础上，分别继续简化，就得到力学中常遇到的位移法和力法的方程。

（1）位移法。在式（1—9）中保留位移为未知数，将式（1—9）中间二式代入最后二式再代入第一式，就得到由位移表示的方程

$$\frac{A_0E}{l}(1+2\cos^3\alpha)u_1=Q \tag{1—11}$$

解此方程得到

$$u_1=\frac{Ql}{A_0E(1+2\cos^3\alpha)} \tag{1—12}$$

然后由式（1—9）的后四式可确定 δ_{12}、δ_{13}、N_{12}、N_{13}。

（2）力法。由式（1—10），只保留内力未知数，得

$$N_{12}+2N_{13}\cos\alpha=Q$$
$$N_{12}-\frac{N_{13}}{\cos^2\alpha}=0 \tag{1—13}$$

解此方程，得

$$N_{12}=\frac{Q}{1+2\cos^3\alpha},\ N_{13}=\frac{Q\cos^2\alpha}{1+2\cos^3\alpha} \tag{1—14}$$

然后由式（1—10）后二式求出 δ_{12}、δ_{13}，再由式（e）确定 u_1。

下面再举一个弯曲梁问题来说明材料力学方法。

设一简支梁如图 1—3(a)所示，现从三个方面的分析来建立轴线挠曲方程式。

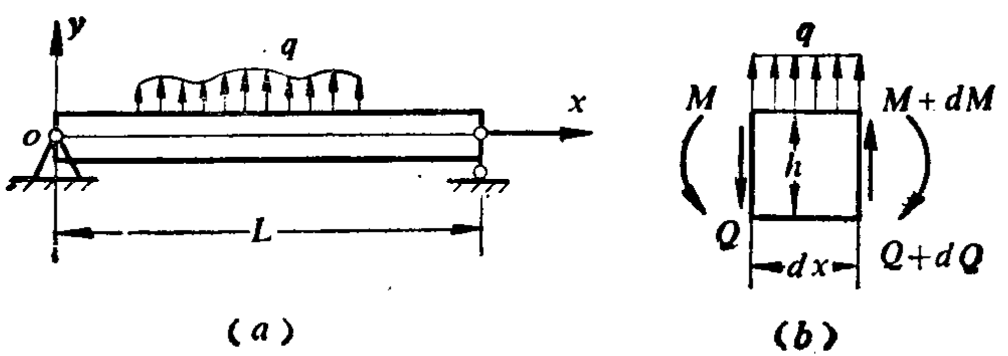


图1—3

1．平衡方面

在梁上切取一微段，两边其它部分对该微段的作用用力代替，如图1—3（b)，由于在外力和内力作用下微段处于平衡，根据理论力学的平衡条件，可以列出两个平衡方程式。

① $\Sigma F=0$，得

$$(Q+dQ)-Q+qdx=0$$

于是

$$\frac{dQ}{dx} = -q \tag{h}$$

② $\Sigma M = 0$，得

$$(M + dM) - M - Q \cdot \frac{dx}{2} - Q \cdot \frac{dx}{2} - \frac{1}{2} dQdx = 0$$

略去高阶项，得

$$\frac{dM}{dx} = Q \tag{i}$$

2．几何方面

在材料力学中，关于梁的变形采用了平截面假设，即变形前垂直轴线的平截面，在变形后仍垂直变形后的轴线，且保持为平面。根据这一假设，所取微段变形后的形状如图1—4。由图求得

$$\frac{y}{\rho} = \frac{\varepsilon_x dx}{dx} = \varepsilon_x \tag{j}$$

而曲率

$$\frac{1}{\rho} \approx \pm \frac{d^2 v}{dx^2} \tag{k}$$

式中，v 表示轴线的挠度，上式由于小变形略去了挠度导数的平方项。综合上面二式，得

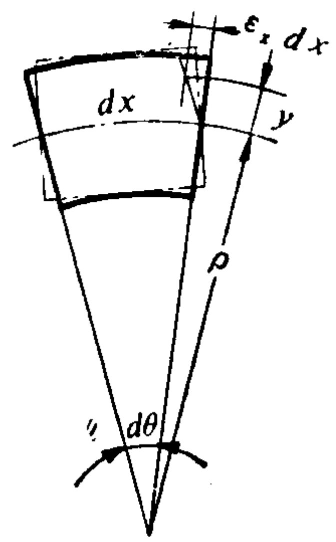


图1—4

$$\varepsilon_x = -y \frac{d^2 v}{dx^2} \tag{l}$$

式中的负号是因为负曲率(如图1—4中的曲率)使 $y>0$ 的纤维产生正的正应变（线应变）。上式说明，应变与 y成正