经济应用数学基础(一)

# 微积分

主编 王吉春

吉林大学出版社

参加本书编写的有(以姓氏笔划为序)：

卜昭红　王吉春　王安心　王　强

刘宝琪　杨艳茹　何英凯　张淑兰

金淑华


经济应用数学基础(一)

**微　积　分**

王吉春　主编

吉林大学出版社出版　吉林大学出版社发行

(长春市东中华路29号)　长春电影制片厂印刷厂印刷

开本：850×1168毫米 1/32　1990年8月第1版

印张：12.5625　1990年8月第1次印刷

字数：312千　字印数：1—1 000册

ISBN 7-5601-0552-1/O·64　定价：6.50元

# 前　　言

本书是从经济管理类各专业的需要及教学实际出发，在原有教材的基础上，结合我们的教学实践和体会编写的．编写中力求重点突出，由浅入深，通俗易懂，简明扼要，又有一定的严密性；注意了在经济学方面的应用，做到理论联系实际，几乎每章都有一节讲经济应用；在体系上作了新的尝试，讲完一元微分法后，紧接着讲多元函数微分法，再讲积分学，这样衔接可能更紧凑些；各章均配备了基本练习题，供读者复习思考，以便加深理解和掌握基本概念和基本理论；习题搭配侧重计算能力和在经济管理中应用能力的培养，对难题特别是生僻题则不编选，使得难易适中．

本书可作为财经院校本科教材或参考书，亦可作为同类院校的专科、函大夜大专科及自学考试的教材或参考书，还可供经济管理工作者参考．

本书是集体编写的，最后由王吉春总纂并定稿．

在编写的过程中，参考了兄弟院校编写的教材，得到吉林财贸学院有关领导、教务处、成人教育处和科研处的支持和鼓励，在此一并表示衷心感谢．

限于水平，加之编写和出版时间仓促，不当乃至错误之处，在所难免，恳请读者不吝赐教！

编　　者

1990 年 3 月于长春

# 目　　录

# 第一章　函　　数

高等数学与初等数学的根本区别在于：前者是以变量为研究对象的，后者基本是以常量为研究对象的．函数关系是变量间的依赖关系，是微积分研究的主要对象．本章将对初等数学做简单的复习和拓宽，并给出几个在经济工作中常用的经济函数．

## §1.1　集合与区间

### 一、集合

集合是数学的基本概念之一，它在现代数学中起着较重要的作用．

我们常常把具有某种属性的一些事物作为一个整体加以考察，例如一批产品，一个城市的人口，全体自然数等．具有某种属性的事物的总体称为集合．组成一个集合的单个事物或个体称为这个集合的元素．

**例 1**　某班级全体男同学组成一个集合．

**例 2**　某商店的全部商品组成一个集合．

**例 3**　全体偶数组成一个集合．

**例 4**　方程 $x^2-5x+6=0$ 的根组成一个集合．

**例 5**　直线 $y=x$ 上的所有点组成一个集合．

通常，我们用大写字母 $A$，$B$，$C$ 等表示集合，用小写字母 $a$，$b$，$c$ 等表示集合的元素．如果元素 $a$ 是集合 $A$ 的元素，则记作 $a\in A$，读作 $a$ 属于 $A$ 或 $a$ 在 $A$ 中；如果 $a$ 不是集合 $A$ 的元

素，则记作 $a\overline{\in}A$. 读 作 $a$ 不属于 $A$ 或 $a$ 不在 $A$ 中.

**例 6** 全体自然数组成一个集合，记为 $N$，则 $10\in N$，$\frac{1}{2}\overline{\in}N$.

由有限多个元素组成的集合称为有限集合，如例 1、例 2、例 4；由无限多个元素组成的集合称为无限集合，如例 3、例 5、例 6.

特别地，不含有任何元素的集合称为空集，记为 $\phi$.

**例 7** 方程 $x^2+1=0$ 的实根集合为空集.

**例 8** 全班学生考试都及格，则不及格学生的集合为空集.

## 二、集合的表示法

通常，集合有两种表示方法：

1. *列举法*

把集合中的元素一一列举出来，并加上花括号.

例如，把例 4 的集合记为 $A$，则可表示为

$$A=\{2,3\}$$

列举时要求元素一个不漏、一个不重.

2. *描述法*

通过描述集合里全体元素的共同属性来表示集合的方法.

如例 4 的集合又可表示为

$$A=\{x|x^2-5x+6=0\}$$

再如，若把例 3 中的集合记为 $B$，则可表示为

$$B=\{x|x=2n,\ n\text{ 为整数}\}$$

## 三、子集

在两个集合 $A$ 和 $B$ 之间，有时存在这样的情况：集合 $A$ 中的每个元素都是集合 $B$ 中的元素. 例如集合 $A=\{x|x$ 是全体偶

数}和 $B=\{x|x$ 是全体整数}. 显然 $A$ 中的每个元素都是 $B$ 中的元素. 这时，称 $A$ 为 $B$ 的子集.

**定义 1.1** 设 $A$，$B$ 是两个集合. 若对任一 $a\in A$，都有 $a\in B$，则称 $A$ 为 $B$ 的子集. 记为 $A\subset B$ 或 $B\supset A$，读作 $A$ 包含于 $B$ 或 $B$ 包含 $A$.

集合 $A$ 是集合 $B$ 的子集这一关系可用图 1-1 表示.

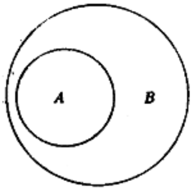

图 1-1

**例 9** 设 $F$ 表示全体有理数的集合 $R$ 表示全体实数集合，则有

$$N\subset F\subset R$$

**例 10** 设 $A$ 表示全部产品的集合，$B$ 表示全部废品的集合，则有

$$B\subset A$$

我们特别约定：

(1). $A\subset A$，即集合 $A$ 是其本身的子集；

(2). $\phi\subset A$，即空集是任何集合的子集.

若 $A$ 与 $B$ 互为子集，即 $A\subset B$，且 $B\subset A$，则称 $A$ 与 $B$ 相等，记为 $A=B$.

## 四、集合的运算

集合之间也可以进行运算，主要的运算有三种.

1. 并集

**定义 1.2** 设有集合 $A$ 和 $B$，由 $A$ 和 $B$ 的所有元素组成的集合，称为集合 $A$ 与 $B$ 的并集，记为 $A\cup B$. 即

$$A\cup B=\{x|x\in A \text{或} x\in B\}$$

并集的关系如图 1-2 所示.

**例 11** 设

$$A=\{1, 2, 3, 4\}$$
$$B=\{3, 4, 5, 6\}$$

则

$$A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

2. 交集

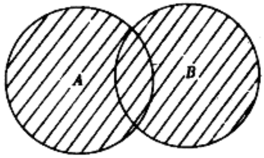

图 1-2

**定义 1.3** 设有集合 $A$ 和 $B$. 由 $A$ 和 $B$ 的所有公共元素组成的集合，称为集合 $A$ 与 $B$ 的交集，记为 $A \cap B$. 即

$$A \cap B = \{x | x \in A \text{ 且 } x \in B\}$$

交集的关系如图 1-3 所示.

**例 12** 设

$$A = \{1, 2, 3, 4\}$$

$$B = \{3, 4, 5, 6\}$$

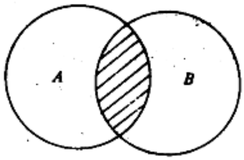

图 1-3

则

$$A \cap B = \{3, 4\}$$

3. 差集

**定义 1.4** 设有集合 $A$ 和 $B$，属于 $A$ 而不属于 $B$ 的所有元素构成的集合，称为 $A$ 与 $B$ 的差集，记为 $A-B$，如图 1-4 所示. 即

$$A - B = \{x | x \in A \text{ 且 } x \notin B\}$$

**例 13** 设

$$A = \{1, 2, 3, 4\}$$

$$B = \{3, 4, 5, 6\}$$

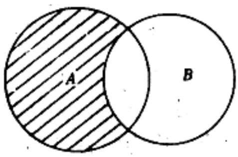

图 1-4

则

$$A - B = \{1, 2\}$$

同理有

$$B - A = \{5, 6\}$$

## 五、区间

所谓区间，是指介于两个实数之间的全体实数所组成的集

合，它是实数集合的子集.

设 $a$，$b$ 为实数，且 $a<b$，则：

(1) 满足不等式 $a<x<b$ 的所有实数 $x$ 的集合，称为以 $a$，$b$ 为端点的开区间，记作 $(a, b)$，如图 1-5 所示. 即

$$(a, b) = \{x \mid a < x < b\}$$


图 1-5

(2) 满足不等式 $a\leqslant x\leqslant b$ 的所有实数 $x$ 的集合，称为以 $a$，$b$ 为端点的闭区间，记作 $[a, b]$，如图 1-6 所示. 即

$$[a, b] = \{x \mid a \leqslant x \leqslant b\}$$

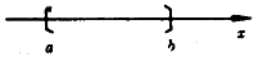


图 1-6

(3) 满足不等式 $a<x\leqslant b$（或 $a\leqslant x<b$）的所有实数 $x$ 的集合，称为 $a$，$b$ 为端点的半开区间，记作 $(a, b]$，如图 1-7 所示（或 $[a, b)$，如图 1-8 所示）. 即

$$(a, b] = \{x \mid a < x \leqslant b\}$$

或

$$[a, b) = \{x \mid a \leqslant x < b\}$$


图 1-7

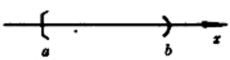


图 1-8

以上三类区间称为有限区间．有限区间的右端点 $b$ 与左端点 $a$ 的差 $b-a$ 称为区间的长．

还有下面三种类型的无限区间：

(4) $$(a,\ +\infty)=\{x|a<x\}$$

$$[a,\ +\infty)=\{x|a\leqslant x\}$$

(5) $$(-\infty,\ b)=\{x|x<b\}$$

$$(-\infty,\ b]=\{x|x\leqslant b\}$$

(6) $$(-\infty,\ +\infty)=\{x|x\in R\},$$

即全体实数的集合．

## 六、绝对值

为了表示一个变量的变化范围，还常常要用到实数绝对值的概念．

**定义 1.5** 一个实数 $x$ 的绝对值记为 $|x|$，定义为

$$|x|=\begin{cases} x & \text{当 } x\geqslant 0 \\ -x & \text{当 } x<0 \end{cases}$$

$|x|$ 的几何意义：$|x|$ 表示数轴上的点 $x$（不论 $x$ 在原点左边还是右边）与原点之间的距离．

绝对值有下面几条性质：

(1) $|x|=\sqrt{x^2}$

(2) $|x|\geqslant 0$

(3) $|-x|=|x|$

(4) $-|x|\leqslant x\leqslant |x|$

(5) 设 $a>0$，则有

$$\{x\,|\,|x|<a\}=\{x|-a<x<a\}$$

(6) 设 $b>0$，则有

$$\{x\,|\,|x|>b\}=\{x|x<-b\}\cup\{x|x>b\}$$

(7) $|x+y|\leqslant |x|+|y|$

(8) $|x-y|\geqslant |x|-|y|$

(9) $|xy|=|x|\cdot|y|$

(10) $\left|\dfrac{x}{y}\right|=\dfrac{|x|}{|y|}\quad y\neq 0$

**例 14** 解不等式$|3x-1|\leqslant 2$.

**解** 由性质(5)知$-2\leqslant 3x-1\leqslant 2$，则

$$-\frac{1}{3}\leqslant x\leqslant 1$$

**例 15** 解不等式$|2-5x|>1$.

**解** 由性质(6)知，$2-5x>1$ 或 $2-5x<-1$，则

$$x<\frac{1}{5}\qquad 或\qquad x>\frac{3}{5}$$

## 七、邻域

由绝对值的性质(5)可知，实数集合

$$\{x\,|\,|x-x_0|<\delta,\ \delta>0\}$$

在数轴上是一个以点 $x_0$ 为中心、长度为 $2\delta$ 的开区间$(x_0-\delta,\ x_0+\delta)$，称为点 $x_0$ 的 $\delta$ 邻域. $x_0$ 称为邻域的中心，$\delta$ 称为邻域的半径. 如图 1-9 所示.

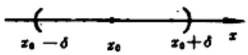


图 1-9

例如，$\left\{x\,|\,|x-5|<\dfrac{1}{2}\right\}$，即为以点 $x_0=5$ 为中心，以$\dfrac{1}{2}$为半径的邻域，也就是开区间$(4.5,\ 5.5)$.

在微积分中还常常用到集合

$$\{x\,|\,0<|x-x_0|<\delta,\ \delta>0\}$$

这是在点 $x_0$ 的 $\delta$ 邻域中去掉点 $x_0$ 后，由其余的点所组成的集合，即集合$(x_0-\delta,\ x_0)\cup(x_0,\ x_0+\delta)$，称为以 $x_0$ 为中心，半径为 $\delta$ 的空心邻域. 如图 1-10 所示.

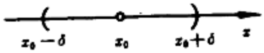


图 1-10

例如，$\{x \mid 0<|x-5|<\frac{1}{2}\}$，即为以点 $x_0=5$ 为中心、半径为$\frac{1}{2}$的空心邻域$(4.5, 5)\cup(5, 5.5)$.

## §1.2 函　　数

函数是高等数学的基本概念之一. 也是微积分研究的主要对象. 在经济问题中涉及的数量关系，很多可以用函数关系来表达.

### 一、函数定义

一切事物都是在不停地运动变化. 在同一个变化过程中，我们所遇到的变量总不止一个，往往同时有几个. 这些变量不是孤立存在，而是相互联系，相互制约，相互依存，遵循一定的规律而变化. 这种关系在数学上就叫做函数关系.

**定义 1.6**　设在某过程中有两个变量 $x$ 和 $y$，如果变量 $x$ 在某一范围内每取定一值以后，变量 $y$ 按某种规律总有唯一确定的值与之对应，则称 $y$ 是 $x$ 的函数，记作

$$y=f(x)$$

其中 $x$ 称为自变量，$y$ 称为因变量.

**例 1**　设某种布料每米价格为 13 元，则此种布料的销售量 $x$ 与销售额 $y$ 之间的关系是：

$$y=13x$$

这里 $x$ 是自变量，$y$ 是因变量，也可称 $y$ 是 $x$ 的函数.

函数 $y=f(x)$中的“$f$”代表某一确定的规律，$f(x)$是一个完

整的符号．对于不同的函数，可用不同的符号表示．如 $y=\phi(x)$，$y=F(x)$等．

值得注意的是，根据定义，对自变量 $x$ 所取定的每一个值，仅要求 $y$ 有唯一确定的值与之对应，并没有要求 $y$ 一定变化．因此，作为函数的特例，可以把常量也看作是函数，即 $y=C$．

## 二、函数值和函数的定义域

对于自变量 $x$ 所取的每一数值，因变量 $y$ 所对应的值叫函数值．若已知函数 $y=f(x)$当 $x=x_0$ 时有对应函数值存在，则记为 $f(x_0)$或$y|_{x=x_0}$．此时我们称函数 $y=f(x)$在 $x_0$ 处有定义．若 $f(x_0)$不存在，则称 $f(x)$在 $x_0$ 处无定义．

**例 2** 设 $y=f(x)=x^2+2x-3$，求 $f(0)$，$f(-1)$，$f(2)$，$f(x_0)$，$f(\sin x)$．

**解**：$f(0)=0^2+2\cdot 0-3=-3$

$f(-1)=(-1)^2+2\cdot(-1)-3=-4$

$f(2)=2^2+2\cdot 2-3=5$

$f(x_0)=x_0^2+2x_0-3$

$f(\sin x)=\sin^2 x+2\sin x-3$

在函数 $y=f(x)$中，使得函数有意义的自变量 $x$ 的取值范围称为函数 $y=f(x)$的定义域，记作 $D(f)$．在函数 $y=f(x)$中，当 $x$ 取遍定义域值时相应的函数对应值构成的集合称为函数 $y=f(x)$的值域，记作 $Z(f)$．

**例 3** 求函数 $y=f(x)=x^2$ 的定义域和值域．

**解**：因为 $x$ 取任何实数值，该函数都有意义．所以

$$D(f)=(-\infty,+\infty)$$

因为 $x^2\geqslant 0$，所以

$$Z(f)=[0,+\infty)$$

**例 4** 求函数 $y=\sqrt{1-x^2}$的定义域和值域．

解：因为 $1-x^2\geqslant 0$，即当 $-1\leqslant x\leqslant 1$ 时，函数才有意义，所以

$$D(f)=[-1,1]$$

当 $-1\leqslant x\leqslant 1$ 时，$0\leqslant\sqrt{1-x^2}\leqslant 1$，所以，

$$Z(f)=[0,1]$$

## 三、函数的表示法

1. 列表法

就是把一系列自变量的值，以及与它对应的函数值，列成表格来表示函数关系的一种方法. 如三角函数表、对数表等都是用表格表示函数的方法. 这种方法的优点是用起来方便，缺点是数据不全，不能查出函数的任意值.

2. 图示法

就是用图形表示两个变量之间函数关系的方法. 其优点是鲜明、直观，缺点是不便于作理论分析和演算.

3. 解析法(公式法)

就是用数学式子表示两个变量之间函数关系的方法. 微积分中涉及的函数关系大多数用此种方法来表示. 其优点是形式简明、准确，适于理论分析和计算. 缺点是不能明显地看出函数的变化状态. 所以用解析法表达函数关系时，常用图形来帮助了解函数的变化状态.

## 四、分段函数

使用解析法时，有的函数在整个定义域上不能用统一的一个公式表示，而要用两个或更多个式子来表示.

**例 5** 某运输公司规定货物的吨公里运价为：在不超过 $a$ 公里时，每公里 $k$ 元；超过 $a$ 公里时，每增一公里为 $\frac{4}{5}k$ 元. 把运价和里程 $s$ 之间的函数关系用公式表示出来为：

$$m=\begin{cases} ks & 0<s\leqslant a \\ ka+\dfrac{4}{5}k(s-a) & a<s \end{cases}$$

这种表示函数关系的方法称为函数的分段表示法．用分段表示法表示的函数叫做分段函数．求分段函数的函数值时，要注意自变量的取值范围，把自变量的属于某一区段数值，要代入相应式子中去求函数值．分段函数的定义域是各段表达式的定义域的并集．如例 5 的定义域为

$$(0,\ a]\cup(a,\ +\infty)$$

即$(0,\ +\infty)$．

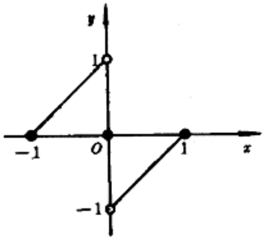

图 1-11

**例 6**　函数

$$y=f(x)=\begin{cases} x+1 & -1\leqslant x<0 \\ 0 & x=0 \\ x-1 & 0<x\leqslant 1 \end{cases}$$

是由三个式子表示的分段函数，如图 1-11 所示，求 $f\left(-\dfrac{1}{2}\right)$，$f(0)$，$f\left(\dfrac{1}{2}\right)$及 $D(f)$．

**解**：$f\left(-\dfrac{1}{2}\right)=-\dfrac{1}{2}+1=\dfrac{1}{2}$

$f(0)=0$

$f\left(\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{1}{2}-1=-\dfrac{1}{2}$

$D(f)=[-1,\ 0)\cup\{0\}\cup(0,\ 1]=[-1,\ 1]$