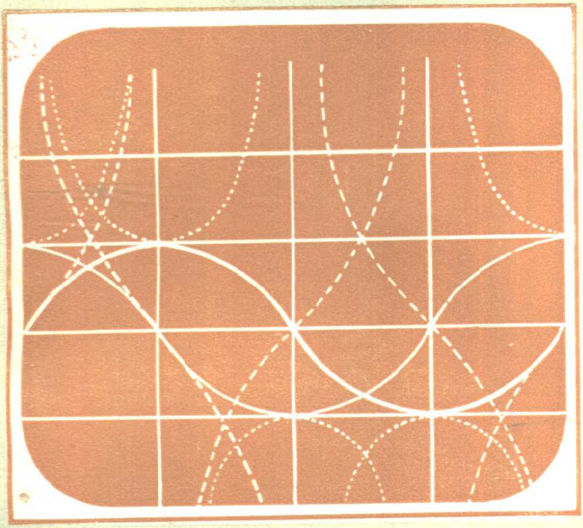

〔波兰〕史坦因豪斯编著　庄亚栋译

又一百个数学问题

上海教育出版社

又一百个数学问题

〔波兰〕史坦因豪斯编著

庄 亚 栋 译

上 海 教 育 出 版 社

ЗАДАЧИ И РАЗМЫШЛЕНИЯ

Гуго Штейнгауз

Издательство «мир» (1974 年)

又一百个数学问题

〔波兰〕史坦因豪斯编著

庄 亚 栋 译

上海教育出版社出版

(上海永福路 123 号)

新华书店上海发行所发行 上海中华印刷厂印刷

开本 787×1092 1/32 印张 5.125 字数 111,000

1980 年 2 月第 1 版 1980 年 2 月第 1 次印刷

印数 1—100,000 本

统一书号: 7150·2164 定价: 0.43 元

译 者 的 话

本书译自«问题与思考»(«Задачи и размышления» 1974 年)第二部分“又一百个问题”(Ещё сто задач). 原书是把著名的波兰数学家古伏·史坦因豪斯(1887～1972 年)所写的一些通俗读物合编而成的.

作者以前著有«一百个数学问题»(中译本也由上海教育出版社出版). 仿照这本书的体例,俄文编译者在作者逝世后,从分散于波兰«数学»杂志上的问题中编了这又一百个问题. 对这些问题,基本上引用了这本杂志的读者所提出的解答.

这些问题的形式是简单的,涉及的知识面是广泛的,而且是相当有启发性的——从初等的形式出发,引导读者灵活运用中学数学知识,以及进入数学王国的某些领域. 仔细地研读这些问题,对提高学生的数学水平无疑是有益的. 虽然除两个问题外都附有解答,但译者希望在读者中会出现新的更好的解答,并且能解决那两个遗留问题(第 11 题、第 97 题).

还要说明一点,这不是一本通常的习题集. 可能有些读者对某些问题暂时还不会有彻底的了解,这正是史坦因豪斯的三本小册子(«数学万花镜»«一百个数学问题»及本书)的共同特点:随着读者的知识水平的提高,每隔一定时间重读的话,会得到一层深一层的理解.

对原文除改正了一些刊误或错误外,只在个别地方作了删节,其它都照译. 此外,为帮助部分读者阅读,加了一些注释. 限于译者的水平,无论是译文或注释都会有不当之处,望批评指正.

庄 亚 栋　1979 年 1 月 15 日

目　录

一、点阵，不等式和序列

1. 圆上的整点 在直角坐标系内，x 表示点 (x, y) 的横坐标，y 表示纵坐标．平面上坐标只取整数值的所有点 (x, y) 的集叫做整点阵（整数格，或简称为格）．整点阵的点通常叫整点．

证明：以点 $(\sqrt{2}, \sqrt{3})$ 为圆心的圆至多通过一个整点，就是或者通过一个整点，或者不通过任何整点，但不可能通过两个或两个以上的整点．

2. 圆内的整点 考虑落在圆 K 内（由圆 K“包围”）的整点．在圆 K 上的整点不算在 K 内．

证明：存在这样的圆，它的内部有一个整点，两个整点等等．一般地，对任何 n（自然数或 0），可以给出一个内部恰好有 n 个整点的圆．

3. 圆和整点阵 作内部分别有下列各个整点的最大的圆：(1) 0 个；(2) 1 个；(3) 2 个；(4) 3 个；(5) 4 个；(6) 5 个．计算各种情况的圆的直径．

4. 在点阵里移动的圆 存在这样的圆，随着它在点阵内位置的不同，在其内部可以有 1, 2, 3, 4 个整点．换句话说，存在直径固定的圆，对它来说，这四种情形（而且只有这四种）都可以出现．这样的圆的直径应该满足什么条件？

内部含有 4 个整点（在某个位置）的最大的圆，可以移动到使它内部出现 9、8 或 7 个整点的位置．能不能把它移动到使它内部出现 5、6 或 10 个整点的位置？

5．四个数 用几何方法证明：满足条件

$$0<a<b<c<d,\ a+d=b+c,\ a^2+d^2=b^2+c^2$$

的四个数 a, b, c, d 不存在.

6．两个集 把区间[0, 1]分成不相交的两个集 A 和 B（例如，把坐标 x 为有理数的所有点作为集 A，把坐标 x 为无理数的所有点作为集 B）.

在[0, 1]上定义一个连续函数 $f(x)$，使对属于集 A 的 x，函数值 $f(x)$ 属于集 B，而对属于集 B 的 x，函数值 $f(x)$ 属于集 A.

能作出这样的函数吗？

7．近似估计 说明数

$$x=\sqrt{5+\sqrt{3+\sqrt{5+\sqrt{3+\cdots}}}}$$

满足哪一个不等式：是 $x>3$，还是 $x<3$？

8．不等式 证明：对任意整数 p, $q(q\neq0)$，下面的不等式成立

$$\left|\sqrt{2}-\frac{p}{q}\right|>\frac{1}{3q^2}.$$

9．连分数 序列$\{a_n\}$是自然数的某个排列（每个自然数在$\{a_n\}$里出现且仅出现一次）．用 $\xi(a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots)$ 表示连分数

$$\cfrac{1}{a_1+\cfrac{1}{a_2+\cdots}}.$$

证明：ξ 不可能取闭区间$\left[\frac{1}{2}, \frac{2}{3}\right]$中的任何一个值．在开区间(0, 1)里，存在着 ξ 的其他“不可达到的”值吗？

10．数列 求正数列 a_0, a_1, a_2, $\cdots$，它满足 $a_0=1$ 及递推关系式

$$a_n - a_{n+1} = a_{n+2}, \quad (n=0, 1, 2, \cdots).$$

证明：这样的数列只有一个.

11. 正方形 能不能作一个正方形，它的边长是整数，并且在它所在的平面上能指出一个点，使该点到正方形四个顶点的距离都可以用整数表示.

注 我不知道这个十分困难的问题的解答.

12. 有趣的根式 证明：对任何自然数 n，式

$$\sqrt{1+\sqrt{2+\sqrt{3+\cdots+\sqrt{n}}}}$$

的值小于 2.

13. 特殊性质的三角形 边长为整数 a、b、c，底边上的高等于底边的三角形存在吗？

14. 丢番图[①]方程 求四个自然数 a, b, c, d，满足方程

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{d}=\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$$

及条件 $a<b<c<d$.

a, b, c, d 能是素数吗？

二、平面，多边形，圆

15. 沿平面滚动的四面体 设想有一个四面体，它的各个面是边长为 k、l、m 的全等三角形．我们把它绕着底面的棱沿平面滚动．作为旋转轴的棱，我们每一次都独立地选择(即相邻两次转动绕不同的底棱进行——译者).

沿平面随便滚动多久的四面体，总能沿着与原来的道路没有一个地方重合的道路，返回出发位置吗？(“不重合”的道

① 约公元三世纪时的希腊数学家．丢番图方程即不定方程．——译者

路是指，如果把这个四面体的面随便涂上什么颜色，并且认为滚动时，每个面都在平面上留下了痕迹，那末只有最后一个痕迹与第一个痕迹重合，而其它所有痕迹无论何处都不重迭.)

16. 大圆和小圆 半径为 3 cm 的小圆与半径为 6 cm 的圆外切. 离小圆的圆心 1 cm 处"固定"一个点. 当小圆沿大圆无滑动地滚动时，这个点画出了一条闭曲线.

(1) 证明：内接于这条曲线的等边三角形 T 可以这样地移动，使它的三个顶点同时描出整条曲线；

(2) 计算三角形 T 的边长；

(3) 当 T 的顶点如条件(1)所说那样转动时，求 T 的中心的轨迹.

17. 直尺和两个圆 考察平面上两个不同半径的同心圆. 很明显，它们可以用长度为半径之差的直尺(直线段)的端点同时画出. 同样显然的是，选择适当的线段，我们能在平面的任意位置，(用线段的端点)同时作出两个相同的圆.

为了使直尺的端点能同时画出两个圆，圆的半径、圆心距和直尺的长度应该满足什么样的充分必要条件？

18. 内接平行四边形 设 G 是凸区域①，它的面积也用字母 G 表示. 我们所说的凸性是指严格意义下的，即假定区域 G 的边界既不包括任何直线段，也没有尖点. 换句话说，在 G 的边界上每个点处，都有一条而且只有一条切线，并且每条切线与 G 的边界有且仅有一个公共点. 设 $PQRS$ 是区域 G 的外切四边形中面积最小的一个，A, B, C, D 分别是它的四条边 PQ, QR, RS, SP 与区域 G 的边界的切点.

证明：$ABCD$ 是面积大于 $G/2$ 的平行四边形.

---

① 如果连接区域 G 中任意两点的线段在 G 内，那末称 G 是凸区域. 凸区域的边界叫凸曲线. ——译者

19. 外切平行四边形 设G是上题所说的凸区域，$ABCD$是G的所有内接四边形中面积最大的一个. 过A, B, C, D作G的切线，得到四边形$PQRS$.

证明：$PQRS$是G的面积小于$2G$的外切平行四边形.

20. 空间五边形 在三维空间里，能作一个各边相等，各个角是直角的闭五边形吗？

21. 带直角的等边"奇数边形" 在三维空间里，作一个有奇数条边的闭多边形，它的各边相等，各个角是直角，可能吗？

22. 正方形和曲线 作一条光滑的凸闭曲线，它不是圆，但随便从该曲线上哪一点出发，作它的外切正方形时，这些正方形的面积不变. 换句话说，这条曲线的外切正方形可以不改变大小地绕着它转动，并且正方形的各条边仍然与曲线相切(圆是有这种性质的).

23. 重心 在$\triangle ABC$的各顶点处放置了质点：放在A点的质点，它的质量等于BC边的长度，放在B点的质点，它的质量等于AC边的长度，放在C点的质点，它的质量等于AB边的长度.

证明：这三个质点形成的系统的重心与$\triangle ABC$的内切圆心重合.

24. 外接圆 通过矩形四个顶点的圆，是包含这个矩形的所有圆中面积最小的一个. 内切于矩形的最大的圆有无数个. 我们把包含平面图形F的圆里最小的一个，叫F的外接圆，把整个地含于F内的圆里最大的一个，叫F的内切圆.

证明：不管图形F的形状如何，只要它有界①，总只有

① 若平面图形F能整个地含于某一个圆内，则称F是有界图形，否则叫无界图形. ——译者

一个外接圆.

25. 锐角三角形 能不能用垂直于锐角三角形三边，且交于三角形内某个点的线段，把三角形分成三个相等的部分？

26. 圆内的点 平面上有十个点在一个圆内，移动各个点，使任两点之间的距离减小.

能不能作一个半径较小的圆，使移动后的十个点都在圆内？

在平面上某个圆内任取 n 个点（n 是任意自然数），把这些点移动，使任意两点之间的距离变小.

是否总能作一个半径较小的圆，使得在新位置的所有的点都在圆内？

27. 铅丝三角形 用一根均匀的铅丝做一个三角形 PQR. 以它各边的中点为顶点得到一个新三角形（边长减小一半），然后用直线段连接三角形 PQR 的重心与小三角形的顶点.

证明：这些线段平分小三角形的内角.

28. n 边形 为使以数 b_1, b_2, …, b_n 为边长的 n 边形（各边及其长度的记号相同）存在，b_k 应满足什么样的充要条件？

29. 再谈 n 边形 设数列 $b_k(k=1, 2, \cdots, n)$ 满足上题所说的充要条件，那末保持边的次序不变，我们可以在以 b_k 为边的所有 n 边形中，作一个有最大面积的 n 边形.

最大面积与数 b_k 的次序有关吗？换句话说，如果保持各边仍是 b_k 不变，但改变它们构成 n 边形时的次序，相应的最大 n 边形的面积改变吗？

30. 内接 n 边形 证明：如果存在边长为 $b_k(k=1, 2, \cdots, n)$ 的 n 边形，那末也存在边长为 b_k、次序也相同的内

接于某个圆的 n 边形.

31. 平面的剖分 一个圆把平面分成两部分，用两个圆可以把平面分成四部分. 再作一个圆——第三个圆，我们把平面分成了八部分.

能不能用四个圆(分布在同一平面上)把平面分成16部分?

32. 再谈平面的剖分 证明：对任意自然数 n，在平面上存在 n 个圆，把平面分成 $n(n-1)+2$ 部分.

用 n 个相同半径的圆总能把平面分成 $n(n-1)+2$ 部分吗?

33. 六边形的面积 证明：边长小于1的六边形的面积小于2.6.

34. 卵形里的点 已知平面上有 n 个点在卵形①内(在内部而不在它的边界上). 可以用线段把卵形这样地分隔成若干部分，使得：第一，在每一部分内只有这 n 个已知点中的一个；第二，任何一部分的“主人”到“自己的”点，要比到“别人的”来得近；第三，多边形“篱笆”只包含边界与卵形边界重合的曲线部分(即篱笆如果有曲线部分的话，只能是卵形边界的一部分. ——译者).

在卵形内部，由有 L 节的折线网形成篱笆. 当已知 n 时，L 的最大值是多少?

35. 圆上的23个点 圆 K 的周长是50cm，在 K 上任意地分布着23个点，这些点形成集 Z(这样，集 Z 有23个不同的元素).

以 A 和 B 为端点，长7cm的弧 L，沿圆 K 顺时针方向运动. 需要证明下述两个结论.

① 所谓卵形，是指有界闭凸区域. 例如，圆形，椭圆形都是卵形. ——译者

结论 I. 在某一时刻，弧 L 转到恰好有 Z 的三个点属于它的位置.

结论 II. 在某一时刻，弧 L 转到恰好有 Z 的四个点属于它的位置.

注 端点 A 算作属于弧 L，而端点 B 不属. 根据惯例，所谓“弧 L 恰好包含集 Z 的 n 个点”，是指弧 L 包含集 Z 的不与端点 B 重合的 n 个点.

36. 两个十字形 互相垂直平分的两条线段形成的图形，叫做十字形. 线段本身叫十字形的横杠，交点叫十字形的中心. 中心不同，但横杠两两平行的十字形叫做平行的十字形.

如果多边形的内角都小于 180°，则叫做凸多边形（因为任何一个内角都不可能等于 180°）.

需要证明，不可能作出这样的凸多边形，使得连接它的某些顶点能成为两个平行的十字形（多边形的顶点数可以任意大）.

37. 圆心 某圆内部含有基本正方形边长为 1 的正方形网格的 10 个格点，它的面积是 10 平方单位，试计算它的圆心坐标 x_0, y_0. 圆心坐标应该满足不等式 $0 \leqslant x_0 \leqslant y_0 \leqslant 1$.

38. 正方形内的七个点 需要在单位正方形内放置七个点，四个在顶点，三个在内部（图 1）. 两两连接这七个点，得到 21 条线段. 图 1 上只画了七条最短的线段（每条这样的线段和它的长度都

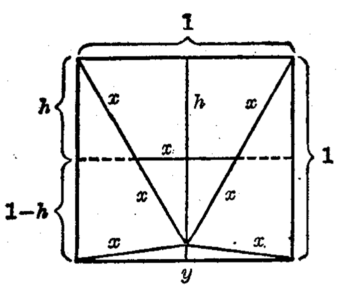

图 1

用 x 表示）．字母 h 的含义从图上是清楚的，y 表示底边与正方形下底重合、两侧是 x 的三角形的高．

计算线段 x、h 和 y 的长度．

三、空间，多面体，球

39．四面体 有六根不同长度的小棒．无论按什么次序，拿这些小棒总能搭成四面体的骨架．能得到多少种不同的四面体？

40．“被戳穿的”立方体 用 27 个相同的小立方体组成一个大立方体．作一条直线，它“戳穿”的小立方体的个数最多，并且求出这个数字．所作的直线不应该与这些立方体的棱相交．

41．用球填满空间 我们已经知道，空间里同样大小的球形成的最紧密结构①．在单位球形成的这样的结构中，球与球之间有大、小两类空隙．这些空隙可以用不同半径的两种小球充填，大的空隙里放大的，小的空隙里放小的．两种半径应选择得使这些球紧紧地嵌进空隙，不能活动．

每一个较小半径的球与单位球的切点有多少个？较大半径的球呢？它们的半径各是多少？

42．导出多面体 任取一个多面体，用下述方法作另一个多面体，它叫做原多面体的导出多面体：

过球 K 的球心作平行于已知多面体的各界面的平面．这些平面与球 K 的表面交成大圆弧，它们形成球面多边形．把

① 见史坦因豪斯著《数学万花镜》第 82 题，裘光明译，中国青年出版社，1953 年版。——译者

这些球面多边形的每一条边用弦代替，我们得到了内接于球 K 的导出多面体的棱．如果原多面体有两个平行界面，那末它们在球 K 上只对应一个大圆．

作下列多面体的导出多面体，并确定它们的形状。

(1) 正四面体；

(2) 立方体；

(3) 正八面体；

(4) 正十二面体；

(5) 正二十面体．

43．曲面上点之间的距离 在闭凸(不凹)曲面上的任两点之间，可作一条连接这两个点的最短的弧．(在连接两个已知点的弧中，可能有若干条最短的．例如，在球面上，直径的两个端点之间可以用无数条大圆弧连接．)

曲面上任两点 P、Q 之间的距离，定义为连接 P、Q 的最短弧的长度．尤其是，我们能够度量曲面上已知点 P 与任一点 X 之间的距离．

在曲面的所有点中找一个离已知点 P 最远的点 S(也许不是唯一的)．能否假设点 P 和 S 至少总能以两条最短弧连接？

求证：对于某些四面体，这样的假设已经不正确．

44．闭曲面 用平面截某个闭曲面得到的截口都是圆(截口只有一个点时，把它看作半径为 0 的圆)．

证明：这个闭曲面是球．

45．凸曲面 能不能作一个不是球的闭凸曲面，使通过适当选择的某条直线的平面，与这个曲面的交线都是圆？

46．立方体里的点 所谓数 u、v、w 算术无关，是指除 $(0,\ 0,\ 0)$ 以外，对随便什么数组 $(p,\ q,\ r)$，关系式

$$pu+qv+rw=0$$

不成立.

设想有一个立方体,它的棱平行于直角坐标系的轴,有一个质点 M 在它里面不停地运动(没有外力作用于 M). 在初始时刻 $t=0$, 点 M 的速度不等于 0, 随后按照"入射角等于反射角"的规律, 在立方体的壁之间不断弹射. M 的速度的三个分量 u、v、w 是算术无关的.

证明: 动点 M 无论何时都不会返回出发位置.

47. 多面体 在正多面体中,哪些有下述性质:在它的界面上能适当地写上自然数(每个面上写一个数, 除此之外, 对这些数没有限制), 使得相邻界面上的数互素, 不相邻界面上的数有不等于 1 的公约数.

48. 直线和三个球 三个球有公共点 P, 但通过 P 的任何直线都不是这三个球在 P 处的公切线.

证明: 这三个球还有一个公共点.

49. 球面上的四个点 用直线段两两连接球面上的四个点, 得到一个四面体. 证明: 当任意两个点之间的距离相等时, 这个四面体的体积最大. (即正四面体时体积最大)

50. 四条直线和第五条直线 在三维空间内, 作四条既不平行又不相交的直线, 使任何第五条直线不会与这四条直线都相交.

51. 立方体的剖分 把立方体分成六个四面体, 其中三个相等, 另三个与这三个的镜面反射相等.

52. 四面体和立方体 对四面体的铁丝模型(用六根铁丝作棱的骨架), 可以用纱线连接不同棱上的各对点而填满为实体.

考虑另一个立体的铁丝模型, 即由 12 条棱作成的立方体

的骨架. 能不能用上述方法把它填满为实体?

53. 分田 需要把一块正方形田三等分. 不难把它分成三块矩形, 使分界线的总长度为该正方形边长的 5/3.

如果不把这块田分成矩形块, 能不能缩小分界线的长度?

54. 空间里的射线 从立方体一个顶点出发的三条棱, 彼此构成 90° 角. 在三维空间里, 也能找到四条射线, 它们从同一个点出发, 并且彼此构成等角. 试计算这个角的大小. 在三维空间里, 能不能指出有这些性质的五条射线?

55. 正二十面体 从正二十面体的中心看它的一条棱的视角有多大?

56. 球的剖分 点 C 是正四面体的顶点, 同时又是球 S 的球心. 这个球如此地小, 使得从顶点 C 出发的四面体的三条棱都与它相交. 特别地, 这个四面体把球分成两部分: 大的部分在四面体外, 小的部分在四面体内.

这两部分之间的比值是多少?

四、实际问题和非实际问题

57. 称量 需要把五个不同重量的物体, 按重量减少的次序排列. 只能用最简单的没有砝码的天平, 把要比较的物体放上去比较哪一个重.

为了用最佳方案解决问题, 即要使称量次数最少, 应该怎么做? 此时称多少次?

58. 烟草问题 甲、乙、丙三人生活在一起, 他们公用价值 120 兹罗提(波兰货币——译者)的大包烟丝. 若丙不抽