高等学校教学参考书

机械原理丛书

平面连杆机构设计

张世民 编

高等教育出版社

高等学校教学参考书

机械原理丛书

平面连杆机构设计

张世民 编

高等教育出版社

本书是根据“高等学校工科基础课一九八一至一九八五年教材编写规划”的安排而编写的专题教学参考书。

本书按几何法和代数法两种方法，以连杆平面若干位置、连架杆若干组对应位置以及连杆曲线为对象，介绍有关平面连杆机构设计的一些基础理论，并在每一基础理论之后附以具体应用的实例。

本书可作为高等工业院校机械类专业机械原理课程的补充教材或选修课的专题教材，也可作为有关专业的教师、研究生及工程设计人员参考。

高等学校教学参考书
机械原理丛书
平面连杆机构设计
张世民 编
*
高等教育出版社出版
新华书店北京发行所发行
河北香河 印刷厂印装
*
开本 850×1168 1/32 印张 3.625 字数 84,000
1983年8月第1版 1984年2月第1次印刷
印数 00,001— 10,000
书号 15010·0509 定价 0.58 元

前　言

连杆机构的设计，是一个比较复杂和困难的问题，这主要是由于它所具有的运动副是低副（因此有时把连杆机构称为低副机构），而低副的约束数比高副多，从而给连杆机构的运动设计带来较多的困难。但是，由于连杆机构的构件运动形式和连杆曲线的多样性，可供工程实际广泛采用，因此直到今天，连杆机构的设计问题仍受到很大的重视和不断深入的研究。

连杆机构的设计方法，大体上分为运动几何法和代数法（或称为图解法和解析法）两大类。工科有关专业的教材中，对这两种方法都有所介绍，但限于学时数，所讲内容是相当有限的。本书编写的目的，是在上述教材所介绍的内容的基础上，对平面连杆机构的设计作较深入的介绍，使读者可以用它来解决更多的设计问题。本书只涉及到四杆机构和有限接近位移的问题，至于多构件机构以及无限接近位移等问题，未能予以介绍，但本书所讨论的一些内容，可以作为读者进一步深入阅读时的踏脚石。

限于篇幅，有些内容可能阐述得不很透彻；限于笔者水平，不妥之处亦在所难免。恳请读者一并不吝斧正。

本书承蒙北京农业机械化学院孙可宗教授在编写原则方面给以指导，并承蒙合肥工业大学丁爵曾教授和西安交通大学曹龙华副教授对文稿悉心审阅，提出了很多极为中肯和具体的修改意见，特在此一并表示衷心的感谢。

编　者

1983 年 3 月于清华园

目　　录

第一章 给定连杆平面三位置用几何法进行机构设计

给定连杆平面两个或三个位置时的机构设计问题，在一般机械原理教材中均有所叙述。但是为了便于讨论给定连杆平面四个位置或五个位置时的四点共圆或五点共圆问题，我们仍从给定连杆平面三个位置的情况着手来讨论一些重要的几何性质；此外，给定连杆平面三个位置的设计问题中，也还有许多基础理论以及这些理论的具体应用值得介绍。

§1-1 极点与等视角定理

平面连杆机构中的连杆，一般都作平面复杂运动。与连杆固结的平面 S，称为连杆平面，其上的任何一条线段的运动，均足以代表连杆平面 S 的运动。在图 1-1 所示的铰链四杆机构 A_0ABB_0 中，机构由位置 *1* 运动到位置 2 时，连杆平面 S 由位置 S_1 运动到位置 S_2，与此同时，其上的连架杆铰链点 A 将沿圆弧 α 由位置 A_1 运动到位置 A_2，另一连架杆铰链点 B 则将沿圆弧 β 由位置 B_1 运动到位置 B_2。显然，作为连架杆铰链点的 A 和 B 依次所占的两个点位 A_1 和 A_2 以及 B_1 和 B_2，必定分别位于圆弧 α 和 β 上，圆弧的圆心则分别为两连架杆的固定铰链点 A_0 和 B_0。我们把连杆平面 S 上某点所依次占有的点位，称为相关点；如果这些相关点位于同一圆弧上，则该点称为圆点，而圆弧的圆心则称为圆心点；如果某点的各相关点位于一直线上，则该点也可认为是圆点，这时圆心点位于该直线垂直方向无穷远，圆弧半径为无穷大。

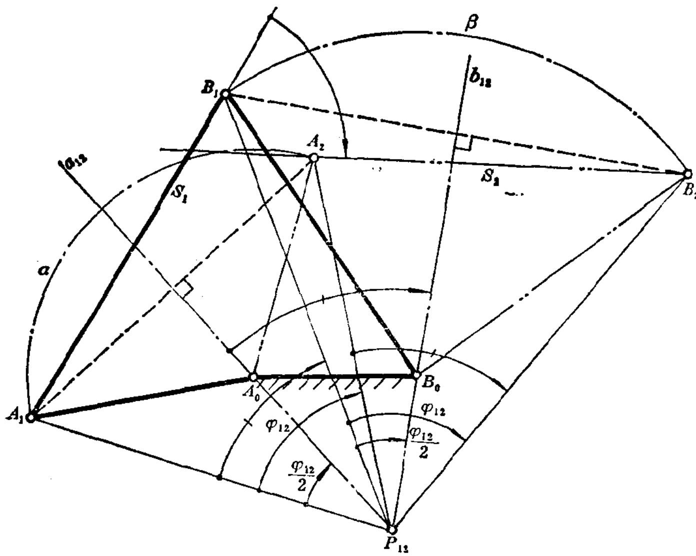

图 1-1

当给定连杆平面 S 两个或三个位置时，平面 S 上任一点都可以是圆点（因为它们的两个或三个相关点总可以位于一个圆弧上）；但如连杆平面 S 的给定位置多于三个，那么，连杆平面 S 上任何一点的四个或五个相关点并非都能位于一个圆弧上，亦即并非连杆平面 S 上任何点都能成为圆点。这时，能够作为圆点的那些点，将大大受到限制。因此，当给定连杆平面的位置多于三个时，连杆机构设计的主要目标，就在于全力找出连杆平面 S 上那些可以作为圆点的点，或是全力找出与之相应的圆心点。

现在我们来讨论连杆平面 S 的运动情况。在图 1-1 所示机构中，作两相关点 A_1 和 A_2 的连线 $\overline{A_1A_2}$ 的中垂线 a_{12} 以及两相关点 B_1 和 B_2 的连线 $\overline{B_1B_2}$ 的中垂线 b_{12}，它们相交于点 P_{12}，则连杆平面 S 的两个相关位置 S_1 和 S_2，可以被认为是平面 S 绕点 P_{12} 作纯转动而实现的，因此，点 P_{12} 称为**转动极点**或**极点**。由图可以看出，此

时连杆平面 S 绕极点 P_{12} 顺时针方向转过角 φ_{12}; 显然, A_1 点和 B_1 点也绕极点 P_{12} 顺时针转过角 φ_{12} 而分别到达 A_2 点和 B_2 点, 即

$$\angle A_1P_{12}A_2=\angle B_1P_{12}B_2=\varphi_{12}=-\varphi_{21}. \tag{1-1}$$

上式不仅表示两个角度的大小相等，而且还表示了它们的度量方向亦相同。

此外，中垂线 a_{12} 和 b_{12} 分别通过 A_0 和 B_0 点，并分别等分 $\angle A_1P_{12}A_2=\angle B_1P_{12}B_2=\varphi_{12}$，即

$$\angle A_1P_{12}A_0=\angle B_1P_{12}B_0=\frac{\varphi_{12}}{2}. \tag{1-2}$$

式中两个角度的前一字母均为圆点，末一字母均为它所相应的圆心点, 因此上式可以这样来理解：以极点 P_{12} 为中心，使过 A_1 点的直线 $P_{12}A_1$（即过 P_{12} 和 A_1 点所作的直线）转到与直线 $P_{12}A_0$（即通过圆心点 A_0 的中垂线 a_{12}）相重合时的转角，以及使直线 $P_{12}B_1$ 转到与直线 $P_{12}B_0$(即中垂线 b_{12})相重合时的转角，二者大小相等$\left(\text{等于}\frac{\varphi_{12}}{2}\right)$，转向相同。如果把上述各条直线理解为视线，则可以认为: 由极点 P_{12} 看互为对面杆的两个连架杆 $\overline{A_1A_0}$ 和 $\overline{B_1B_0}$（或 $\overline{A_2A_0}$ 和 $\overline{B_2B_0}$）时, 视角均同向且等于连杆平面转角的一半, 即 $\frac{\varphi_{12}}{2}$, 这一等角关系称为等视角关系, 或等半角关系。

由图 1-1 所示的机构位置 *1*(或位置 2) 可知:

$$\angle A_1P_{12}A_0+\angle A_0P_{12}B_1=\angle A_1P_{12}B_1$$

$$\angle A_0P_{12}B_1+\angle B_1P_{12}B_0=\angle A_0P_{12}B_0.$$

但由式(1-2)得知

$$\angle A_1P_{12}A_0=\angle B_1P_{12}B_0=\frac{\varphi_{12}}{2},$$

因此可以得知

$$\angle A_1P_{12}B_1=\angle A_0P_{12}B_0. \tag{1-3}$$

此式表明：以极点 P_{12} 为中心，使直线 $P_{12}A_1$ 转到与直线 $P_{12}B_1$ 相重合时的转角，以及使直线 $P_{12}A_0$ 转到与直线 $P_{12}B_0$ 相重合时的转角，二者大小相等，而且转向相同；如果把上述各条直线也理解为**视线**，则可以认为：由极点 P_{12} 看互为对面杆的连杆 $\overline{A_1B_1}$（或 $\overline{A_2B_2}$）和固定杆 $\overline{A_0B_0}$ 时，视角相等。这也是等视角关系。

上述两个等视角关系，可以归纳为：极点 P_{12} 对四杆机构的两组对面杆的视角各自同向并相等，这种关系统称为**等视角定理**。

§1-2 极三角形和镜极三角形

在图 1-2 中，用线段 $\overline{A_1B_1}$、$\overline{A_2B_2}$ 和 $\overline{A_3B_3}$ 表示连杆平面 S 的三个相关位置 S_1、S_2 和 S_3，这三条线段称为**相关线**。作 $\overline{A_1A_2}$ 和 $\overline{B_1B_2}$、$\overline{A_1A_3}$ 和 $\overline{B_1B_3}$ 以及 $\overline{A_2A_3}$ 和 $\overline{B_2B_3}$ 三对线段的中垂线 a_{12} 和 b_{12}、a_{13} 和 b_{13} 以及 a_{23} 和 b_{23}（图中略去了这些中垂线），三对中垂线的交点，分别确定了三个极点 P_{12}、P_{13} 和 P_{23}。这三个极点所构成的三角形，称为**极三角形**。极三角形三边的夹角，与运动平面 S 的转角密切相关。

设平面 S 由位置 S_1 开始，绕极点 P_{12} 逆时针方向转过 $\overset{\curvearrowleft}{\varphi_{12}}$ 到达位置 S_2；再由位置 S_2 绕极点 P_{23} 逆时针方向转过 $\overset{\curvearrowleft}{\varphi_{23}}$ 到达位置 S_3。这两步转动的总转角为 $\overset{\curvearrowleft}{\varphi_{12}}+\overset{\curvearrowleft}{\varphi_{23}}$，其效果等同于由位置 S_1 绕极点 P_{13} 逆时针方向转过 $\overset{\curvearrowleft}{\varphi_{13}}$ 到达位置 S_3。显然，

$$\overset{\curvearrowleft}{\varphi_{12}}+\overset{\curvearrowleft}{\varphi_{23}}=\overset{\curvearrowleft}{\varphi_{13}}. \tag{1-4}$$

上式为转角的代数和。

为了确定极三角形 $\triangle P_{12}P_{13}P_{23}$ 在极点 P_{12} 和 P_{13} 处的顶角，我们在位置 S_2 的平面上选取与极点 P_{23} 重合的 C_2 点。由于 C_2 点

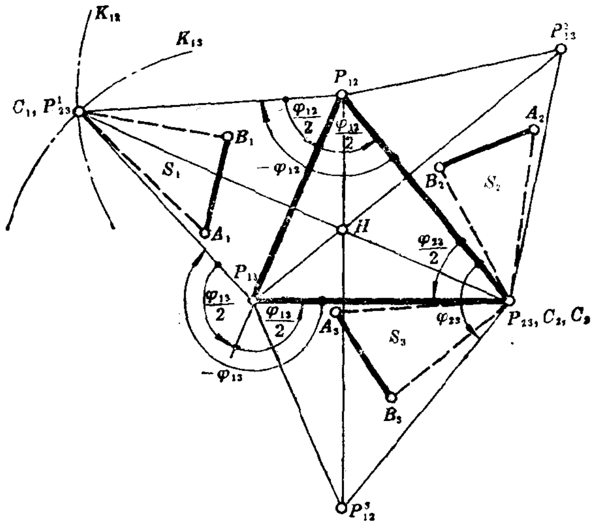

图 1-2

正好选在极点 P_{23} 处，因此，当平面 S 由位置 S_2 逆时针方向绕极点 P_{23} 转过 $\overset{\curvearrowleft}{\varphi_{23}}$ 而到达位置 S_3 时，平面 S 上的 C_2 点没有位移，即 C_2 点也是 C_3 点；另一方面，我们把平面 S_2 绕极点 P_{12} 按顺时针方向转过角$(-\varphi_{12})$回到位置 S_1，则平面 S 上的 C_2 点将转回到 C_1 点的位置。显然，C_1 点应位于以极点 P_{12} 为中心，以 $\overline{P_{12}P_{23}}$ 为半径的圆弧 K_{12} 上。我们再把平面 S_3 绕极点 P_{13} 按顺时针方向转过角$(-\varphi_{13})$回到位置 S_1，则 C_3 点也将转回到 C_1 点的位置。显然，C_1 点应位于以极点 P_{13} 为中心，以 $\overline{P_{13}P_{23}}$ 为半径的圆弧 K_{13} 上。因此，C_1 点应位于两圆弧 K_{12} 和 K_{13} 的交点上。由此可知，C_1 点和 C_2 点（或 C_3 点）对称于极三角形边 $P_{12}P_{13}$，或者把边 $P_{12}P_{13}$ 视为镜面，则 C_1 点和 C_2 点（或 C_3 点）互为镜象点。由于

$$\angle C_1P_{12}C_2=\overset{\curvearrowleft}{\varphi_{12}},$$

因此得知

$$\angle P_{13}P_{12}P_{23}=\frac{1}{2}\angle C_1P_{12}C_2=\frac{\overset{\curvearrowleft}{\varphi_{12}}}{2}.$$

又因

$$\angle C_1P_{13}C_3=\overset{\curvearrowleft}{\varphi_{13}},$$

所以得知

$$\angle P_{12}P_{13}P_{23}=\frac{\overset{\curvearrowleft}{\varphi_{13}}}{2}$$(极三角形$\triangle P_{12}P_{13}P_{23}$

顶点 P_{13} 处的外角)。

同理，如果在位置 S_1 的平面上选取与极点 P_{13} 重合的 D_1 点(图1-2 中未标出)，则该点也是 D_3 点。求出 D_2 点之后，可以得知

$$\angle P_{12}P_{23}P_{13}=\frac{\overset{\curvearrowleft}{\varphi_{23}}}{2}.$$

因此，极三角形的三个顶角，各为连杆平面相应位置的转角之半，即

$$\left.\begin{aligned}&\angle P_{13}P_{12}P_{23}=\frac{\varphi_{12}}{2},\\&\angle P_{12}P_{23}P_{13}=\frac{\varphi_{23}}{2},\\&\angle P_{12}P_{13}P_{23}=\frac{\varphi_{13}}{2}.\end{aligned}\right\}\tag{1-5}$$

前两个角是极三角形的内角，第三个角$\angle P_{12}P_{13}P_{23}=\frac{\varphi_{13}}{2}$是极三角形极点 P_{13} 处的外角，即

$$\frac{\overset{\curvearrowleft}{\varphi_{12}}}{2}+\frac{\overset{\curvearrowleft}{\varphi_{23}}}{2}=\frac{\overset{\curvearrowleft}{\varphi_{13}}}{2}.$$

此半角关系符合式(1-4)所示的运动关系。

在根据极三角形来判断各个转角的方向时，其规则是：内角 $\frac{\varphi_{12}}{2}$(或 φ_{12})——把下标数码中含有公共数码“1”的边 $P_{12}P_{13}$ 转到

含有公共数码“2”的边 $P_{12}P_{23}$，这个转向就是$\frac{\varphi_{12}}{2}$的转向；内角$\frac{\varphi_{23}}{2}$（或φ_{23}）——把含有公共数码“2”的边 $P_{12}P_{23}$ 转到含有公共数码“3”的边 $P_{13}P_{23}$，这个转向就是$\frac{\varphi_{23}}{2}$的转向；外角$\frac{\varphi_{13}}{2}$（或φ_{13}）——把含有公共数码“1”的边 $P_{12}P_{13}$ 转到含有公共数码“3”的边 $P_{13}P_{23}$，这个转向就是$\frac{\varphi_{13}}{2}$的转向。

在图 1-2 中，与极点 P_{23} 重合的点 C_2（或 C_3），是点 C_1 以边 $P_{12}P_{13}$ 为镜面的镜象点，所以点 C_1 与极点 P_{23} 也是以边 $P_{12}P_{13}$ 为镜面而互为镜象点。我们把 C_1 点称为极点 P_{23} 的**镜象极点**，简称**镜极**，用符号 P_{23}^1 表示，其中右上角的数码“1”表示该镜象极点属于平面 S 的第一位置 S_1 上的点。镜极 P_{23}^1 与极点 P_{12} 和 P_{13} 所形成的三角形 $\triangle P_{12}P_{13}P_{23}^1$，称为**镜极三角形**，也是属于位置 S_1 上的三角形。同理，镜极 P_{13}^2 和 P_{12}^3，分别与相应的极点形成镜极三角形 $\triangle P_{12}P_{13}^2P_{23}$ 和$\triangle P_{12}^3P_{13}P_{23}$，它们分别属于位置 S_2 和 S_3 上的三角形。

三对互为镜象的极点，它们的连线 $\overline{P_{12}P_{12}^3}$、$\overline{P_{13}P_{13}^2}$ 和$\overline{P_{23}P_{23}^1}$ 相交于极三角形$\triangle P_{12}P_{13}P_{23}$ 的垂心 H。

［例 1-1］ 试按连杆三位置设计一铰链四杆机构，用来作为缝纫机中的挑线机构。在图 1-3 中，设选定主轴的曲柄半径 $\overline{A_0A}=a$，它的三个位置为$\overline{A_0A_1}$、$\overline{A_0A_2}$和$\overline{A_0A_3}$（转角分别为 $\alpha_{12}=\angle A_1A_0A_2$ 和 $\alpha_{23}=\angle A_2A_0A_3$）。当曲柄在上述三个位置时，要求挑线杆线孔 C 达到高度线 II、$II\,II$ 和 $III\,III$ 所示的高度（相应的上升距离分别为 h_{12} 和 h_{23}），此外，希望线孔 C 的轨迹在左右方向上的偏摆幅度不要过大。

［解］ 适当选取连杆平面上的 $\overline{AC}$ 长度 e。以 A_1、A_2 和 A_3 为圆心，以 e 为半径，分别在高度线 II、$II\,II$ 和 $III\,III$ 上截得三个相关点C_1、C_2 和 C_3，如图 1-3 所示。如果这三个相关点在左右方向上的偏摆幅度过大，则可重选长度 e，另行截取 C 点的三个相关点。

连接 $\overline{A_1C_1}$、$\overline{A_2C_2}$ 和 $\overline{A_3C_3}$（它们是连杆平面上线段 $\overline{AC}$ 的三条相关线），

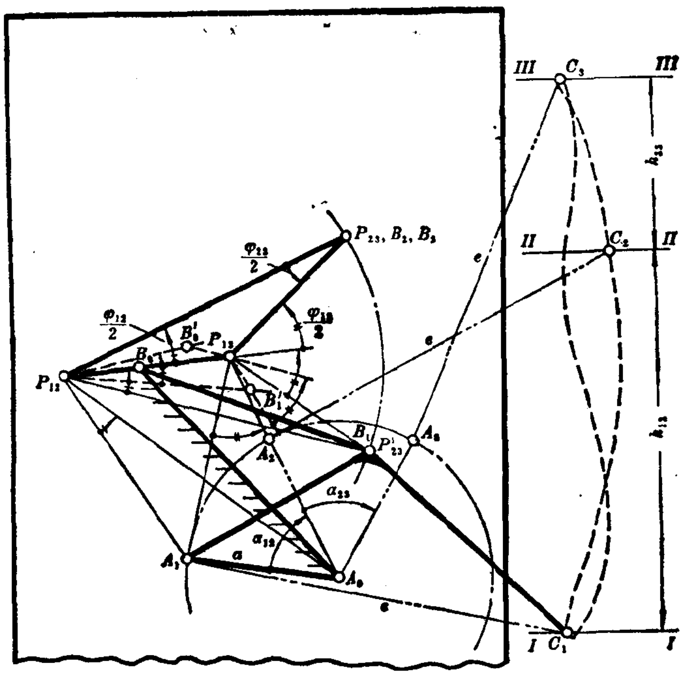

图 1-3

从而可以求出极点 P_{12}、 P_{13} 和 P_{23}。极三角形 $\triangle P_{12}P_{13}P_{23}$ 的两个内角与一个外角就是连杆平面的半转角，其转动方向，如图 1-3 所示。

如果任选一圆心点 B_0' 作为另一连架杆的固定铰链点，则根据式(1-2)或等视角定理(同向并等大)，有

$$\left.\begin{aligned}\angle A_1P_{12}A_0=\angle B_1'P_{12}B_0'\left(=\frac{\varphi_{12}}{2}\right),\\ \angle A_1P_{13}A_0=\angle B_1'P_{13}B_0'\left(=\frac{\varphi_{13}}{2}\right).\end{aligned}\right\}^{①}$$

上列两式中，圆心点 B_0' 已选定，因此可以按上两式由极点 P_{12} 和 P_{13} 分别按同向等大的原则作直线 $P_{12}B_1'$ 和 $P_{13}B_1'$(图 1-3 中用虚线表示)，两直线

---

① 式中括号内的角 $\frac{\varphi_{12}}{2}$ 和 $\frac{\varphi_{13}}{2}$，在作图求解时不起作用，因此列在括号中，供参考。

的交点即为位置 1 的圆点 B'_1。必须注意，在作图时，应使 $\angle B'_1P_{12}B'_0$ 与 $\angle A_1P_{12}A_0$ 的度量方向相同，$\angle B'_1P_{13}B'_0$ 与 $\angle A_1P_{13}A_0$ 的度量方向相同。作图所得的机构(位置 1)是 $A_0A_1B'_1B'$(图中未用线段表示出来)。由此可知，在一般情况下，取定圆心点之后，总可以确切地求出相应的圆点，反之亦然；二者之间存在一一对应的关系。

如果在极三角形的边 $P_{12}P_{13}$(下标数码中均含有“1”的两个极点的连线，包括其延长线)上，任选一点B_0作为圆心点，则仍按上列两个等视角关系式作直线 $P_{12}B_1$ 和 $P_{13}B_1$ 时，我们将会发现，该两直线正好交于极点 P_{23} 的镜极 P^1_{23}；事实上，由几何关系可知，在边 $P_{12}P_{13}$ 及其延长线上任何位置选取圆心点 B_0，其相应的圆点B_1 将始终在镜极P^1_{23} 的位置上。换句话说，如果选取镜极 P^1_{23} 作为圆点 B_1，则它所对应的圆心点 B_0 有无穷多，其轨迹线是极三角形中下标数码含“1”的边 $P_{12}P_{13}$ 及其延长线(依此类推，如果以镜极 P^2_{13} 作为圆点 B_2，则它所对应的圆心点 B_0，将在极三角形的边 $P_{12}P_{23}$ 及其延长线上。这其中有着严格的数码规律)，此时，圆心点 B_0 和圆点 B_1 之间一一对应的关系将不存在，而是一个点(圆点)对应于一条线。这一特性给我们提供一个方便条件，即：如果以镜象极点 P^1_{23} 作为位置 1 的圆点，则相应的圆心点可在直线 $P_{12}P_{13}$ 及其延长线上任意选取。这样即可比较容易地求得满足附加条件(如圆心点必须位于指定范围内、有曲柄条件、较好的传动角、较小的机构尺寸等等)的连杆机构。前面任选 B'_0 后所得的机构 $A_0A_1B'_1B'_0$ 就不具有曲柄条件；而选取镜极 P^1_{23} 作为圆点 B_1 之后，圆心点 B_0 可以在 $P_{12}P_{13}$ 线上任意选取，这时由于圆点 B_1 不再改变，因此比较容易按附加条件(例如缝纫机要求 A_0A 能成为曲柄)来选取合适的圆心点 B_0。图 1-3 中所选的圆心点 B_0，其机构 A_0ABB_0 将满足曲柄条件。

[**例 1-2**] 图 1-4 所示为鹤式起重机上采用的双摇杆机构。要求其连杆 $\overline{AB}$ 的延长端点 C 在一定范围内走近似直线的轨迹。现给定连杆三个位置 $\overline{A_1B_1}$, $\overline{A_2B_2}$, $\overline{A_3B_3}$，其延长端点 C 的三个相关点 C_1、C_2 和 C_3 位于所要求的直线 aa 上，另选定连杆上的 A 点和 B 点作为与两连架杆相铰接的圆点。试确定两连架杆 $\overline{A_0A}$ 和 $\overline{B_0B}$ 的长度以及圆心点 A_0 和 B_0 的位置。

[**解**] 按照所给连杆三个位置上的相关点 C_1、C_2 和 C_3，或 A_1、A_2 和 A_3，或 B_1、B_2 和 B_3，任取两组相关点，作出极三角形 $\triangle P_{12}P_{13}P_{23}$。

利用等视角关系：

$$\angle A_1P_{12}A_0=\angle C_1P_{12}C_0\left(=\frac{\varphi_{12}}{2}\right),$$

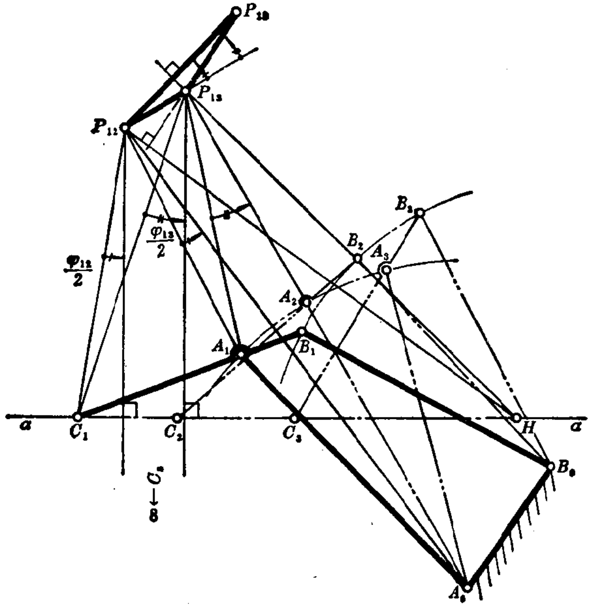

图 1-4

$$\angle A_1P_{13}A_0 = \angle C_1P_{13}C_0\left(=\frac{\varphi_{13}}{2}\right).$$

式中的圆心点 C_0，由于它的三个相关点 C_1、C_2 和 C_3 位于直线 aa 上，因此应在直线 aa 的垂直方向无穷远处。过极点 P_{12} 作直线 $P_{12}A_0$，使其与 $P_{12}A_1$ 所夹之角等于 $\angle C_1P_{12}C_0$；过极点 P_{13} 作直线 $P_{13}A_0$，使其与 $P_{13}A_1$ 所夹之角等于 $\angle C_1P_{13}C_0$。直线 $P_{12}A_0$ 和 $P_{13}A_0$ 的交点即为圆心点 A_0。

同理，在求圆心点 B_0 时，有：

$$\angle B_1P_{12}B_0 = \angle C_1P_{12}C_0,$$

$$\angle B_1P_{13}B_0 = \angle C_1P_{13}C_0.$$

由极点 P_{12} 和 P_{13} 分别作直线 $P_{12}B_0$ 和 $P_{13}B_0$。两直线的交点即为所求的圆心点 B_0。

如果所求机构尺寸不合理，可重新给定连杆三位置，或重选圆点 A 和 B 的位置。

§1-3 三相关点所共之圆的半径

图 1-5 是按给定连杆平面三位置后所作出的极三角形 $\triangle P_{12}P_{13}P_{23}$。设在连杆平面的第一位置上任选一点 A_1，作为连杆与连架杆在位置 *1* 相铰接的圆点。现在求 A_1 点的另两个相关点 A_2 和 A_3。把 A_1 点绕极点 P_{12} 顺时针转过角 φ_{12}，从而求得位置 2 上的相关点 A_2； 再把 A_2 点绕极点 P_{23} 顺时针转过角 φ_{23}，从而求得位置 *3* 上的相关点 A_3。

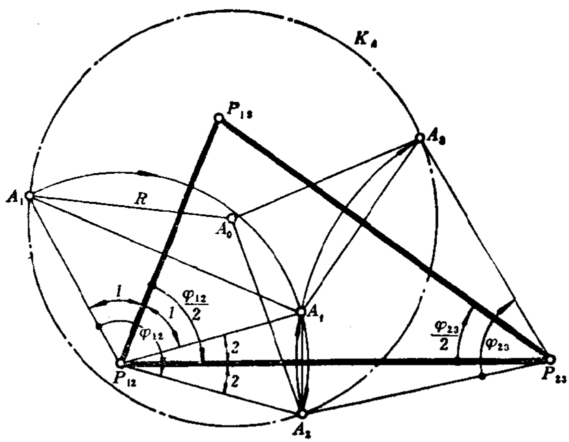

图 1-5

用上述方法求相关点时，由于要度量角度，所以比较不便。现在介绍另一种求相关点的方法——基点法。在选定位置 *1* 的相关点 A_1 后，以边 $P_{12}P_{13}$（这两个极点下标数码中均含有“1”）为镜面，求取 A_1 点的镜象点 A_g，如图 1-5 所示； 再以边 $P_{12}P_{23}$（两个极点下标数码中均含有“2”）为镜面，求取 A_g 的镜象点 A_2， 这个 A_2 点就是所求位置 2 的相关点。这是因为 A_1 和 A_g 以边 $P_{12}P_{13}$ 为镜面互成镜象，所以有

$$\angle A_1P_{12}P_{13}=\angle P_{13}P_{12}A_g=\angle 1.$$