

目 录

第一章 边界单元法的基本原理.....	1
第二章 二维位势问题的直接解法.....	18
第三章 线弹性静力学问题的直接解法.....	47
第四章 虚拟力法	102
第五章 位移间断法	129
第六章 体力, 半平面问题, 高次单元和多区域耦合问题	159
第七章 非线性问题和与时间有关问题简介	207

第一章 边界单元法的基本原理

1.1 数学物理方程边值问题数值方法简述

工程中各种物理力学问题的分析和计算, 都需要首先在计算范围内建立起描述其物理状态和过程的控制方程。常见的工程物理力学问题的控制方程多是二阶偏微分方程。以二维问题为例, 描述计算区域内稳定的力场、电磁场和流场的是位势(平衡)方程(式中, x 、 y 为位置的自变量, u 为待解的场变量, f 为已知的作用源变量),

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + f(x, y) = 0 \quad (1.1)$$

描述随时间而逐渐均匀变化过程的是传导(扩散)方程(式中, t 为时间, c 为比例常数):

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = c \frac{\partial u}{\partial t} \quad (1.2)$$

描述振动的是波动方程:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = c \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (1.3)$$

等等。

这些微分方程一般被称为数学物理方程, 它们还只是泛定的。要获得这些方程在具体问题上的解答, 即要具体确定待解函数 u 和它的各阶导数的表达式和数值, 还要根据问题的性质, 规定一些适当的定解条件, 包括在计算区域的边界上要满足一些已知的边界条件, 以及在计算的初始时刻要满足一定的初始条件, 才能使控制微分方程的通解成为唯一的特解。在数学上, 控制方程和定解条件一起合称为定解问题。而把包含有边界条件的问题称为边值问题, 把含有初始条件的问题称为初值问题。

数理方程定解问题中, 往往只是在某些简单的条件下才能获得严密的解析解。大多数稍为复杂的工程实际问题就很难找到解析解, 因而不得不引入许多简化和假定, 使用近似公式来进行一些分析和计算。例如, 过去许多固体力学问题就是利用近似的材料力学公式或杆件体系结构力学方法来计算的。

高速数字电子计算机的出现, 促进了各种数值方法的深入开发, 为直接解决各种复杂的工程计算问题开辟了广阔的途径。许多工程计算问题, 尽管几何形状是任意的, 边界条件是复杂的, 材料性质多样和不均匀等等, 已可用数值方法直接从数学模型获得数值解。这些解虽然是近似的, 而且只在计算区域和边界上的一些离散点上给出数值, 但在工程实用上却是令人满意的。提出过的数值方法已有不少, 有些只是针对某种问题的专用方法, 而一般通用的方法可以归结为三大主要类型: 有限差分法、有限单元法和边界单元法。

有限差分法早在电子计算机出现以前已经提出。它直接把微分方程中待解函数和它的各阶导数近似地采用分布在计算区域内和边界的网格结点的函数值和它的差商来代替, 边界

条件和初始条件也相应地作类似的替代,最后把微分方程定解问题化为线性差分方程组的求解问题,可由一些网格结点上的函数已知值求得另一些结点上的函数未知值。电子计算机出现以后,有限差分法也得到新的发展和更为广泛的应用,可以解决不少工程计算上的实际问题。

五十年代,有限单元法先在结构分析的最小能量原理基础上发展起来,后来又由数学家从变分法的角度上奠定了牢固的数学基础。古典变分法要在整个计算区域采用一个光滑的试探函数,而有限单元法则将整个区域划分为子区域(单元)而采用分片光滑的插值函数的集合。这样既可以较好地模拟复杂形状的计算区域,也可以比较自由地配置结点,便于反映物体的边界线或内部分界线的复杂形状和不同物性的分区,也可以在计算精度较高的局部加密结点而不增加计算的复杂性;同时它可用统一的格式来处理各种单元和不同的边界条件,能系统地编成通用的计算机程序,因而获得广泛的应用。近年来运用加权余量方法直接从问题的控制微分方程出发来建立有限单元法公式,进一步扩大了有限单元法在没有相应函数提法的问题上的应用。目前,有限单元法已经有了很大的发展,已经成为一种名副其实的通用的数值方法。

但是,有限差分法和有限单元法都是在计算区域内进行离散的数值方法,因而也就存在着某些固有的弱点:(1)由于一定要把整个计算区域离散为单元或网络结点来求解,即使在函数变化不大的区域,也要分割成域内单元。对于函数变化急剧的区域,需要划分成更多的单元,因而要解算大型的线性代数方程组,随之而来的输入和输出信息量也很大,计算工作(包括上机前的数据准备、计算机处理时间和输出结果的事后整理)和计算机内存能力也要求很大;(2)对于无限区域的课题,域内解法只能划出一定范围来进行离散,并在这个有限范围的边界上人为地加上约束(图1-1a)。由于忽略了其外方广大区域的影响,就不免带来了一些不应有的误差。正是由于这些原因,实际工作中对于无限区域的问题和一些三维空间问题,或由于奇异性引起高度应力集中的问题,往往需要使用大量有限单元和结点,从而计算工作量很大和计算费用很高,直至目前还是难以进行有效的计算。因此,近年来人们的注意力又转到一些边界解法上,相应的边界单元法就得到了发展(图1-1b)。

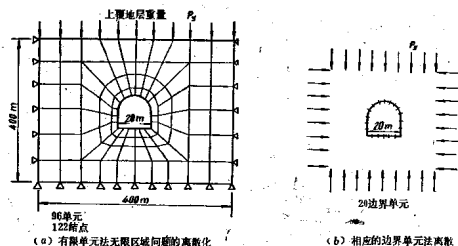


图 1.1

边界解法在偏微分方程边值问题的理论中并不是新的方法。在数学物理方法中,早已存在有奇异点解法和格林函数法等解析方法。十九世纪就有人提出了一些积分等式和位势理论,可把线性偏微分方程的边值问题归化为等价的边界积分方程的求解,而积分方程解的存在性、唯一性问题早已得到比较好的解决。Trefftz(1926年)已提出关于边界解法的数值解原理。Jaswan(1963年)、Symm(1963年)Massonnet(1965年)和Crouch(1976年)运用间接的边界数值解法解决了不少位势问题和弹性力学问题。Rizzo(1967年)和Cruse(1969年)等则发展了边界积分方程的直接解法。随着有限单元法中的各类单元和插值函数的研究发展,在边界积分方程的边界离散上也采用了多种插值函数的边界单元,因而形成了边界有限单元或“边界单元”法。七十年代以后,把边界单元法应用到各种非线性领域和非定常(与时间有关)的问题,也得到了较大的发展。

积分方程可以看成一系列单个的影响函数的叠加表达式,而边界积分方程实质上是一些能自动满足计算区域内控制微分方程的点源影响函数解在边界上成立的积分方程。对于边值问题,边界上有一部分边界值是给定的边界条件,另一部分边界值则是待解的。边界积分方程也就是联系着已知边界值与未知边界值的方程式。边值问题必须是适定的,即给出的边界条件应该足够而且唯一地确定未知的边界值。

一般的边界积分方程也很难有严密的解析解。但用数值方法求解时,只需要把边界离散为边界单元,并在其结点之间插值,就可以把边界积分方程转变为线性代数方程组,由此解出各边界单元的结点处待定的边界值,再利用把边界值与域内函数联系起来的解析公式,就可求得计算区域内任一点的函数值。归纳起来,边界单元法有以下几个明显的特点:

(1) 只需要把边界进行离散和插值,这就使解问题的维数降低一维,使三维问题降为二维,二维问题降为一维。比之有限单元的域内解法,所得到线性代数方程组的未知数数目可显著减少,而且数据准备和处理工作也大为减少(例如,自动划分单元就比较容易实现);

(2) 处于边界上的奇异解在线性代数方程组的系数矩阵中会有最大的对角性主元。因此,代数方程组不会是病态的,可以减少计算误差的积累;

(3) 离散化的误差只发生在边界,对域内函数值和它的导数值是直接用解析公式计算的。函数值和它的导数值的计算精度相同。而且可以根据需要只计算少数有意义的内点处的值,从而保证了精度而又不浪费计算和输出的工作量。

工程中的弹塑性力学、流体力学和断裂力学问题,地下水流、热传导和电磁学中的场问题,以及与时间因素有关的各种课题,都有相应的边界积分方程,都可以用边界单元法来求解。而用边界单元法解题,工作量明显减少,计算机程序简便,精度较高,而且通用性强。

当然,边界单元法也存在着一些弱点。例如,它的线性代数方程组的系数矩阵是满阵而且是不对称的;当计算区域包括有多种不同性质的介质时,要划分为若干个分区面增加了各分区交界面上的未知数;当存在域内作用源,如体力、渗流荷载或热源等,以及进行弹塑性分析型性影响要化为体力作用时,往往还是要把计算区域(或其一部分)划分成单元来进行域内数值积分的计算。虽然这样不会增加待解的边界未知数数目,但也加大了编程序、输入和计算的工作。十多年来的实践证明,边界单元法对于一般单一介质问题,尤其是无限区域问题、三维空间问题或带奇异性的问题,具有明显的优越性。对一些非线性和与时间有关的问题,边界单元法的处理也不太复杂,而在输入和迭代方面却比较简单,因而它也具有相当的竞争力。

特别是把边界单元法和有限单元法结合起来的各种耦合方法,即在复杂介质的局部范围

(例如塑性区)内采用有限单元,而在其他单一介质的大部分区域采用边界单元进行联合计算,既可以扬长避短而简化计算,又可以充分利用有限单元法各种现有的通用计算机程序,这已经成为解决一些复杂工程问题的极为有效的计算方法。

随着电子计算机日趋小型化、微型化,以及边界单元法的应用范围不断扩大,它的独特优点逐渐得到公认,在国内外工程界已形成了研究和开发的热潮。近年来几乎每年都有一次专题性的国际学术讨论会。在各种计算数学的学术会议上都有关于边界单元法的报告论文。我国学者在这方面也作了不少研究工作,并开始在工程界各方面推广应用。可以预期,边界单元法将逐渐成为工程人员进行实际数值分析的一个重要工具。

1.2 边界单元法的分类

要对各种数理方程边值问题建立边界积分方程,首先必须存在有能满足计算区域内控制微分方程的一个点源作用下的已知解析解,即影响函数。为了能适用于各种复杂几何形状的边界问题,一般采用控制微分方程在无限大区域内的点源的影响场(即所谓基本解)作为影响函数。因为任何计算区域都可以看成是无限大区域的一部分,各种作用源对某个计算边界的影响都可以通过这种基本解的叠加(积分)来表达,从而建立起边界积分方程。根据建立边界积分方程时,对基本解的利用方式的不同,边界单元法可分为直接法和间接法两大类。

直接法利用数学上各种积分等式,通过基本解直接把边界上的待解边界函数与已知边界条件联系起来建立积分方程,从这个方程解出来的就是未知边界值。间接法则不用边界的待解边界值作为未知函数,而是在无限大区域内沿着该问题的计算边界配置某种点源分布函数作为间接的待解未知量,它对计算区域的影响,是一系列点源的影响(基本解)的叠加。由于基本解是自动满足控制微分方程的,因而只要这些间接点源函数在边界各处产生的影响,刚好与给定的边界条件一致时,则根据定解问题解的唯一性原理,在计算区域范围内和边界上的影响也就是该边值问题的特解。间接法的待解点源分布虽然往往是虚构的,但其计算效果与直接法完全相同,而公式还比较简单,故首先由实际工作者提出来应用。直接法的待解函数都有明确的物理意义,数学推导比较严密,往往是发展各种边界单元法的数学基础。这两种方法都获得了广泛的应用。

我们在本章中先简单介绍直接法和间接法的原理。而在后面几章中将着重联系位势问题和弹性静力学问题叙述这两种方法的具体公式和计算程序,并列举若干应用实例以帮助读者掌握和运用这些方法。

1.3 直接解法

1.3.1 叠加原理和格林函数

从物理的角度来看,一个数学物理方程表示着某种特定的场与产生该场的各种源(包括分布作用在边界上和计算区域内部的)之间的一种关系。如果这种关系是线性的,我们利用叠加原理,把一个个单位点源产生的影响场解答乘以分布强度,再在其作用范围内叠加起来,就可以求得任意强度的分布源产生的场的解。一个单位点源在计算区域内产生的影响场,称为点源影响函数,数学上称为格林函数(Green's Functions),它也是这个问题的控制微分方程的一个解。这种利用点源影响函数的积分来解数学物理方程问题的方法,就

叫做格林函数法。

举例来说,在三维空间的静电场内,由于某种分布电荷产生的电势场 V 应满足如下的泊松 (Poisson) 方程:

$$\nabla^2 V + 4\pi\rho = 0 \quad (1.4)$$

式中

$$\nabla^2 = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right), \text{ 是拉普拉斯 (Laplace) 微分算符,}$$

ρ 是计算区域内某种电荷的分布强度函数。它是域内已知的分布源,

V 是由于这个分布源产生的电势分布函数,是待解的场变量。

现在利用叠加方式来求式 (1.4) 的解。根据物理学的库伦定律,我们已知位于 $r_1(x_1, y_1, z_1)$ 点的一个单位强度的点电荷,在无限空间中产生的电势场是

$$G(r, r_1) = \frac{1}{4\pi|r-r_1|} \quad (1.5)$$

其中, r_1 是源点, r 是场点; $|r-r_1|$ 是两点间的距离。可以看出,这应是式 (1.4) 的一个解,只是相当于把 $4\pi\rho$ 项替换为一个单位点源项。在无限远处,该电荷的影响为零。

由于线性微分方程可以运用叠加原理,一个连续分布的源函数也就可以被看成是无数个不同强度的点源的叠加。所以前者的效果也就可由后者各自产生的效果叠加起来求得,即任意分布电荷 ρ 在无限空间内产生的电势为

$$V(r) = \int_{\Omega} \frac{1}{4\pi|r-r_1|} \cdot \rho(r_1) d\Omega = \int_{\Omega} G(r, r_1) \rho(r_1) d\Omega \quad (1.6)$$

积分区域 Ω 要把电荷 ρ 的分布范围包括在内。

式 (1.5) 的 $G(r, r_1)$ 就是拉普拉斯算符在无限空间中的格林函数,亦称为拉普拉斯方程的基本解。可以看到,格林函数 G 是包含源点 r_1 和场点 r 两个自变量的函数。除了在 $r=r_1$ 点外,它处处满足拉普拉斯方程 $\nabla^2 G = 0$ 。利用这个格林函数,就可以直接写出方程 (1.4) 在无限空间中解答的直接积分表达式 (1.6)。

如果求解的问题有边界,则其解答还要满足指定的边界条件。用格林函数法求解任意边界的边值问题时,要用适合于该边界的格林函数来表达。而包含边界条件的格林函数比无限空间问题的格林函数,即式 (1.5),要复杂得多。因为在这种情况下,一个点源产生的影响还受到边界值的影响。

1.3.2 狄拉克 (Dirac) δ 函数

在说明格林函数的应用之前,我们先定义一个能够表示单位点源的函数——狄拉克 δ 函数。这个 δ 函数可写为 $\delta(r-r_1)$, 其中 r_1 是源点, r 是场点。在一维问题时, $\delta(r-r_1)$ 写为 $\delta(x-x_1)$; 在二维和三维问题时,则分别写为 $\delta(x-x_1)\delta(y-y_1)$ 和 $\delta(x-x_1)\delta(y-y_1)\delta(z-z_1)$ 。有时简写为 δ_i , 以 i 代表源点。

点源具有这样的性质: 当 $r \neq r_1$ 时, $\delta(r-r_1) = 0$; 当 $r = r_1$ 时, $\delta(r-r_1)$ 没有定义 (奇异), 但其体积分为有限值 (对于单位强度的点源, 此积分应等于 1)。严格说, δ 函数不是通常意义下的函数, 它没有通常意义下的“函数值”而只有在积分号下经过极限运算后才给出数值。我们可以看下面的一个例子。

假设有如下一个一维的矩形函数 (图 1.2)

$$\delta(x-x_1) = \begin{cases} 0, & \text{当 } x < x_1 - \varepsilon \\ \frac{1}{2\varepsilon}, & \text{当 } x_1 - \varepsilon < x < x_1 + \varepsilon \\ 0, & \text{当 } x > x_1 + \varepsilon \end{cases} \quad (1.7)$$

这个函数在 $\varepsilon \rightarrow 0$ 时的极限是没有定义的, 但其积分在 $\varepsilon \rightarrow 0$ 时的值为 1, 即

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{x_1 - \varepsilon}^{x_1 + \varepsilon} \frac{1}{2\varepsilon} dx = 1 \quad (1.8)$$

这就相当于在点 x_1 上的一个单位点源, 但其分布强度在该点是趋于无穷大的, 在其它地方则等于零。

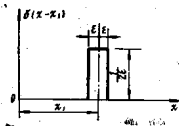


图 1.2

当然, δ 函数可以由不同的方式来表达,

可参阅数学物理方程教材。概括起来, δ 函数有如下性质:

$$\delta(r-r_1) = \begin{cases} 0 & \text{当 } r \neq r_1 \\ \infty & \text{当 } r = r_1 \end{cases} \quad (1.9)$$

$$\int_{\Omega} \delta(r-r_1) d\Omega = 1 \quad (1.10)$$

$$\int_{\Omega} f(r) \delta(r-r_1) d\Omega = f(r_1) \quad (1.11)$$

各式中的积分范围 Ω 只要把源点 r_1 包含在内即可。最后一个等式 (1.11) 中, $f(r)$ 是在计算区域内的某个分布函数。当与作用在 r_1 的 δ 函数相乘时, 在 $r \neq r_1$ 的点上的乘积都为零, 只有在 $r = r_1$ 时, 其积分在 $\varepsilon \rightarrow 0$ 的意义下有价值, 亦即该函数在 r_1 点处的值 $f(r_1)$ 。

1.3.3 积分方程

以上我们定义了一个在无限小区域内积分意义上的一个单位点源, 但其分布密度 (δ 函数) 在该点上趋于无穷大。对照前述式 (1.4), 可以看出, 格林函数 (由单位点源产生的场) 就是如下微分方程的解:

$$\nabla^2 G + \delta(r-r_1) = 0 \quad (1.12)$$

式 (1.12) 表明: 在 $r \neq r_1$ 的其他点上, 有 $\delta(r-r_1) = 0$, 格林函数 G 就是拉普拉斯方程 $\nabla^2 G = 0$, G 本身及其一阶导数是连续函数; 只是在 $r = r_1$ 处是一个奇异点。

同理, 对于其他线性微分方程, 其格林函数也就是如下的微分方程的解:

$$L[G] + \delta(r-r_1) = 0 \quad (1.13)$$

式中, $L[\]$ 为该微分方程的线性微分算符。

但要确定具体问题的格林函数, 还要根据问题的边界条件给它规定适当的边界条件。此处先推导利用格林函数求解一般边值问题的积分方程, 后面再谈为格林函数选择边界条件的问题。

设原来待解的问题是:

$$\left. \begin{array}{l} \text{域内控制方程: } \nabla^2 u(r) + f(r) = 0, \quad \text{在 } \Omega \text{ 内;} \\ \text{边界条件: } \alpha u(S) + \beta \frac{\partial u(S)}{\partial n} = g(S), \quad \text{在 } S \text{ 上。} \end{array} \right\} \quad (1.14)$$

式中的边界条件写成适合于各种边界条件的通式。其中 n 是边界 S 上的各点的外法线方向,

$u(S)$ 和 $\frac{\partial u(S)}{\partial n}$ 是函数 u 及其一阶导数(n 方向)的边界值。通式中的 $g(S)$ 是给出的边界函数, α 和 β 是不同时为零的实数,其不同组合也就体现了边界上给出的 $g(S)$ 的性质。根据定解条件,边界上必需给出足够的边界值以确定地求出特解。对于二阶偏微分方程,边界值包括未知函数本身 $u(S)$ 及其一阶导数 $\frac{\partial u(S)}{\partial n}$ 两者。所以,视给定的边界值不同情况,上式就可以表达三类边界条件:

1. 当 $\beta=0, \alpha \neq 0$ 时,即给出 $\alpha u(S)=g(S)$,而 $\frac{\partial u(S)}{\partial n}$ 待定,就是第一类边界条件;
2. 当 $\alpha=0, \beta \neq 0$ 时,即给出 $\beta \frac{\partial u(S)}{\partial n}=g(S)$,而 $u(S)$ 待定,就是第二类边界条件;
3. 当 $\alpha \neq 0, \beta \neq 0$ 时,即给出 $u(S)$ 和 $\frac{\partial u(S)}{\partial n}$ 的一个线性关系式,而 $u(S)$ 和 $\frac{\partial u(S)}{\partial n}$ 仍属待定,就是第三类边界条件。

现在设我们已选定一个已知的格林函数,即已成立式(1.12)。为了利用这个格林函数来解题,要设法把式(1.12)与式(1.14)结合起来。

由于式(1.12)包含有 $r=r_1$ 时的奇异点。我们先把计算区域内一个以 r_1 为中心,以充分小的正数 ϵ 为半径的小球 Ω_1 挖去(图1.3),然后计算当半径 $\epsilon \rightarrow 0$ 时的极限情况。这种办法,叫做在柯西(Coucy)主值意义下进行积分。这样,在余下的 $\Omega - \Omega_1$ 区域内,格林函数 G 及其一阶导数就是连续函数,并满足:

$$\nabla^2 G = 0 \quad (1.15)$$

图 1.3

现在以下述方式把式(1.14)和式(1.15)结合起来:将式(1.14)乘以 G ,式(1.15)乘以 $u(r)$,相减,然后在 $\Omega - \Omega_1$ 区域中求积分,即可写出:

$$\int_{\Omega - \Omega_1} \{G[\nabla^2 u(r) + f(r)] - u(r) \cdot \nabla^2 G\} d\Omega = 0$$

将域内分布函数项移到等号右方,得

$$\begin{aligned} \int_{\Omega - \Omega_1} G \cdot \nabla^2 u(r) d\Omega - \int_{\Omega - \Omega_1} u(r) \cdot \nabla^2 G d\Omega \\ = - \int_{\Omega - \Omega_1} G \cdot f(r) d\Omega \end{aligned} \quad (1.16)$$

上式左方两个体积分可用多重积分的分部积分公式^[注1]展开:

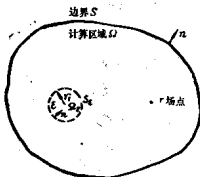
注1:高等数学中关于三重积分已说明了奥斯特罗格拉茨基(Остроградский)公式(樊映川:高等数学讲义,下册,§14.6)如下:

$$\begin{aligned} \iiint_{\Omega} \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) d\Omega \\ = \iint_{\Sigma} \{ P \cos(n, x) + Q \cos(n, y) + R \cos(n, z) \} dS \end{aligned}$$

今设有连续函数 u 和 v 。令上式中 $P = u \frac{\partial v}{\partial x}$, $Q = u \frac{\partial v}{\partial y}$, $R = u \frac{\partial v}{\partial z}$,就可获得多重积分的分部积分公式(格林第一公式):

$$\iiint_{\Omega} u \nabla^2 v d\Omega = \iint_{\Sigma} u \frac{\partial v}{\partial n} dS - \iiint_{\Omega} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z} \cdot \frac{\partial v}{\partial z} \right) d\Omega$$

(这相当于一维积分的分部积分公式: $\int_a^b u dv = uv \Big|_a^b - \int_a^b v du$, $\Big|_a^b$ 代表两端点 a, b 处的差值)



$$\begin{aligned}\int_{a-a_\varepsilon} G \cdot \nabla^2 u(r) d\Omega &= \int_{s+s_\varepsilon} G(S) \frac{\partial u(S)}{\partial n} dS - \int_{a-a_\varepsilon} \frac{\partial u}{\partial r} \frac{\partial G}{\partial r} d\Omega \\ \int_{a-a_\varepsilon} u(r) \nabla^2 G d\Omega &= \int_{s+s_\varepsilon} u(S) \frac{\partial G(S)}{\partial n} dS - \int_{a-a_\varepsilon} \frac{\partial G}{\partial r} \frac{\partial u}{\partial r} d\Omega\end{aligned}$$

式中 S 为挖去小球后增加的面积。两者相减可消去右方第二项，即得将体积分化为面积分的格林第二公式：

$$\begin{aligned}& \int_{a-a_\varepsilon} \left\{ G \cdot \nabla^2 u(r) - u(r) \nabla^2 G \right\} d\Omega \\ &= \int_{s+s_\varepsilon} \left\{ G(S) \frac{\partial u(S)}{\partial n} - u(S) \frac{\partial G(S)}{\partial n} \right\} dS\end{aligned}\quad (1.17)$$

将式 (1.17) 代回到式 (1.16)，得

$$\begin{aligned}& \int_{s+s_\varepsilon} \left\{ G(S) \frac{\partial u(S)}{\partial n} - u(S) \frac{\partial G(S)}{\partial n} \right\} dS \\ &= - \int_{a-a_\varepsilon} G f(r) d\Omega\end{aligned}\quad (1.18)$$

即

$$\begin{aligned}& \int_s \left\{ G(S) \frac{\partial u(S)}{\partial n} - u(S) \frac{\partial G(S)}{\partial n} \right\} dS \\ &+ \int_{s_\varepsilon} \left\{ G(S) \frac{\partial u(S)}{\partial n} - u(S) \frac{\partial G(S)}{\partial n} \right\} dS \\ &= - \int_a G f(r) d\Omega + \int_{a_\varepsilon} G f(r) d\Omega\end{aligned}$$

我们再考察 $\varepsilon \rightarrow 0$ 时，即 S 向 r_1 重合时，小球面积和体积上各项的极限情况：当 ε 充分小时，在 S_ε 上的 u_ε 和 $\frac{\partial u(S)}{\partial n}$ 可视为均匀分布而取其平均值。于是，当 $\varepsilon \rightarrow 0$ ， $u(S) \rightarrow$

$u(r_1)$ ， $\frac{\partial u(S)}{\partial n} \rightarrow -\frac{\partial u(r_1)}{\partial r}$ （因此处在 S_ε 上的 $+n$ 方向与点源的 $+r$ 方向相反，故取负号）。

又设 $G(S) = \frac{1}{4\pi r}$ （任何一个满足式 (1.15) 的解），则

$$\begin{aligned}\frac{\partial G(S)}{\partial n} &= -\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{4\pi r} \right) = \frac{1}{4\pi r^2} = \frac{1}{4\pi \varepsilon^2}, \text{ 当 } \varepsilon \rightarrow 0 \text{ 时,} \\ \int_{s_\varepsilon} u(S) \frac{\partial G(S)}{\partial n} dS &= \frac{u(S)}{4\pi \varepsilon^2} \int_{s_\varepsilon} dS = u(r_1)\end{aligned}\quad (1.19)$$

其中 $\int_{s_\varepsilon} dS = 4\pi \varepsilon^2$ （小球表面积），

$$\begin{aligned}\text{又其中 } \int_{s_\varepsilon} G(S) \frac{\partial u(S)}{\partial n} dS &= \frac{1}{4\pi \varepsilon} \frac{\partial u(S)}{\partial n} \int_{s_\varepsilon} dS \\ &= \varepsilon \frac{\partial u(r_1)}{\partial n} \rightarrow 0\end{aligned}$$

同时, 等号右方的 $\int_{\Omega} G f(r) d\Omega = \frac{1}{4\pi\epsilon} f(r_1) \int_{\Omega} d\Omega = \frac{\epsilon^3}{3} f(r_1) \rightarrow 0$, 其中

$\int_{\Omega} d\Omega = \frac{4\pi}{3} \epsilon^3$ (小球体积)。故式 (1.18) 展开并除去各零项以后, 得:

$$\int_S \left[G(S) \frac{\partial u(S)}{\partial n} - u(S) \frac{\partial G(S)}{\partial n} \right] dS - u(r_1) = - \int_{\Omega} G f(r) d\Omega$$

即

$$u(r_1) = \int_S G(S) \frac{\partial u(S)}{\partial n} dS - \int_S u(S) \frac{\partial G(S)}{\partial n} dS + \int_{\Omega} G f(r) d\Omega \quad (1.20)$$

式 (1.20) 就是边值问题式 (1.14) 利用以 r_1 为源点的格林函数 G 表达的解。将式 (1.20) 与以前无限空间问题的解, 式 (1.6), 相比较, 可以看出, 对于包含边界条件的情况, 在式 (1.20) 中, 多了两个边界积分项。这些边界积分项反映的正是边界上的函数值 $u(S)$ 及其一阶导数 $\frac{\partial u(S)}{\partial n}$ 对场变量 $u(r_1)$ 产生的影响。由于定解条件在边界上只给出 $u(S)$, 或 $\frac{\partial u(S)}{\partial n}$ 中的一部分, 所以公式 (1.20) 是一个包含域内待解函数 $u(r_1)$ 以及边界上部分未知数值的积分方程。它与原问题的微分方程形式是等价的。

在理论上, 我们可以有选择地规定格林函数 G 的边界条件, 可使这个积分方程内不包含边界上的未知函数而转化为直接表达域内解的积分表达式。假如给出的是第一类边界条件, 即 $\beta = 0$, $au(S) = g(S)$, 则可按 $G(S) = 0$ 的边界条件来确定 G , 随之在式 (1.20) 中包含 $G(S)$ 与待定的 $\frac{\partial u(S)}{\partial n}$ 乘积的面积分项就可消失; 假如给出的是第二类边界条件, 即

$$\alpha = 0, \quad \beta \frac{\partial u(S)}{\partial n} = g(S), \quad \text{则可改按 } \frac{\partial G(S)}{\partial n} = 0 \text{ 的边界条件来确定 } G, \text{ 随之式 (1.20)}$$

中包含 $\frac{\partial G(S)}{\partial n}$ 与待定的 $u(S)$ 乘积的面积分项可以消失。这样就可获得不包含边界未知函数的域内待解函数 $u(r_1)$ 的解的直接表达式。就是说, 要采用相当于原来问题边界条件的齐次边界条件来确定应有的格林函数, 即要求满足如下关系, 就可以直接获得 $u(r_1)$ 的解。

$$\left. \begin{array}{l} \text{控制方程: } L[G] + \delta(r - r_1) = 0, \quad \text{在 } \Omega \text{ 内;} \\ \text{边界条件: } \alpha G(S) + \beta \frac{\partial G(S)}{\partial n} = 0, \quad \text{在 } S \text{ 上。} \end{array} \right\} \quad (1.21)$$

但是求解式 (1.21) 时的难度, 与求解原来问题的难度相差无几, 而且, 这样确定的只是用于求解某种具体边界条件的格林函数。

实际上为了能得到一个通用而简单的计算方法, 我们宁愿改用一些不满足上述齐次边界条件, 但是简单的已知解作为格林函数, 并设法去解一个包含边界未知函数的积分方程式 (1.20)。为此目的, 通常采用该控制微分方程的基本解 (即无限大区域的解析解) 作为通用格林函数, 因为它最容易求得, 而且一般都具有有限的形式。例如三维拉普拉斯方程的基本解, 式 (1.5), 就仅仅是距离 $|r - r_1|$ 的函数而与方向无关。由于原问题的计算区域 Ω 就是无限区域内的一部分, 采用这个基本解作为格林函数后, 计算区域内的控制微分方程自然也就自动得以满足。问题的性质就转变为寻求能满足给定的边界条件的特解。这时很容易想到, 只要把场点 r_1 移到边界上, 内部场点的 $u(r_1)$ 也就变成是边界值, 就可以把式 (1.20) 转化为只有边界未知数的边界积分方程, 即只包含边界的未知值和已给定值的关系表达式。

对不同形状的边界 S 上的不同边界条件, 只是边界积分的路线不同, 都可以用同一个格林函数 (基本解) 来列式求解。解此边界积分方程求得边界上未知函数值以后, 该问题就圆满地解决了, 因为域内任意点的函数值可以直接用式 (1.20) 算出来。采用通用的格林函数解法, 其计算公式就不受原问题边界条件给出的是哪些值的影响。它还可以适应一部分边界上给出了函数 $u(S)$ 而另外部分边界上给出 $\frac{\partial u(S)}{\partial n}$ 的混合边界问题。

对于某些特殊问题, 也可以采用例如半无限区域、球 (或圆) 区域之类的单位点源产生的场的解析解作为通用格林函数。

以上是从数学分析的角度来说明边界积分方程方法解题的基本思路的。在流体力学问题上, 格林第二公式也就是高斯的通量定理。而在弹性力学问题方面, 还可以从功的互等定理来推导式 (1.20), 并称之为索米格里埃那 (Somigliana) 等式, 详见第三章。

1.2.4 边界积分方程

现在具体推导边界积分方程, 不失其普遍性, 以下假定是没有域内源的简化情况 (有域内源时只增加一个已知的积分项)。

一个具体的边值问题 (图1.4) 可以表述为 (今以 Q 为域内场点, Q_0 为边界场点):

$$\text{控制方程: } L[u(Q)] = 0 \quad \text{在区域 } \Omega \text{ 内;} \quad (1.22)$$

$$\left. \begin{aligned} \text{边界条件: } u(Q_0) &= \bar{u}(Q_0) \quad \text{在边界 } S_1 \text{ 上;} \\ \frac{\partial u(Q_0)}{\partial n} &= q(Q_0) = \bar{q}(Q_0), \quad \text{在边界 } S_2 \text{ 上.} \end{aligned} \right\} \quad (1.23)$$

式中符号与以前略有改动: 加 “-” 号的 $\bar{u}(Q_0)$ 为边界 S_1 上给定函数, $\bar{q}(Q_0)$ 为边界 S_2 上给定的 $\frac{\partial u(Q_0)}{\partial n} = q(Q_0)$ 函数。待求的未知函数是 S_1 上的 $q(Q_0)$, S_2 上的 $u(Q_0)$, 以及域内的 $u(Q)$ 。

根据上节式 (1.20), 通过单位点源在源点 P 的基本解, 可有域内 P 点上的 $u(P)$ 与边界函数 $u(Q_0)$ 及 $q(Q_0)$ 之间的如下关系式:

$$\begin{aligned} u(P) + \int_S u(Q_0) q^*(Q_0, P) ds(Q_0) \\ - \int_S q(Q_0) u^*(Q_0, P) ds(Q_0) = 0 \end{aligned} \quad (1.24)$$

式中, 加 “*” 的函数值为基本解 $u^*(Q_0, P)$ 及其一阶导数 $q^*(Q_0, P) = \frac{\partial u^*(Q_0, P)}{\partial n}$ (源点在 P , 场点在 Q_0 , 按力学上的习惯, 把作用力的点写在后面), 其中 n 为 Q_0 点处边界的外法线方向。

现在将源点移到边界上 P_0 点, 以获得边界积分方程。由于在式 (1.24) 的第一个边界积分中的 $q^*(Q_0, P_0)$, 在 Q_0 与 P_0 重合时有奇异性, 我们也要采用前面说过的挖去包围 P_0 点的一个以微小正数 ϵ 为半径的小球的办法来考虑 $\epsilon \rightarrow 0$ 极限时这个积分的值。不过现在挖去的是一个半球体 $\frac{1}{2}\Omega$ 。(假定 P_0 处的边界是光滑的, 即有单一的切面), 增加的半球面为

$\frac{1}{2}S_1$, 图1.5。则在 $\Omega - \frac{1}{2}\Omega$ 的区域内, 基本解 u^* 及其一阶导数是连续的。采用与源点在域内时所取的同样步骤, 可得与公式 (1.20) 相似的积分方程。但是当 $\epsilon \rightarrow 0$, Q_0 与 P_0 重合

的极限情况, $\int_{S_0} q^*(Q_0, p_0) dS$ 的极限值为 $\frac{1}{2}$ [注]。于是得到边界积分方程为:

$$\frac{1}{2} u(p_0) + \int_S u(Q_0) q^*(Q_0, p_0) dS(Q_0) - \int_S q(Q_0) u^*(Q_0, p_0) dS(Q_0) = 0 \quad (1.25)$$

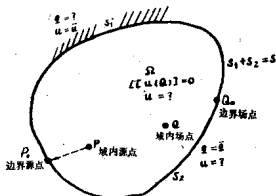


图 1.4

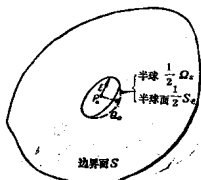


图 1.5

式中, $u(p_0)$ 与 $u(Q_0)$ 都是边界上的函数值。所以边界积分方程表述了边界上的函数及其一阶导数之间的关系, 而边界值中的一部分是给定的边界条件, 另一部分为待解值。

边界积分方程 (1.25) 中的 $\frac{1}{2} u(p_0)$ 项, 是由于边界上的源点 p_0 与场点 Q_0 重合时的奇异性引起的, 可称之为共点效应项。这正是边界积分方法的一个特点。从后面用线性代数方程组替代边界积分方程的具体计算公式中, 可以看到这一项是代数方程组主对角线系数的主部, 它比其它非对角线系数大得多, 从而在边界单元法中不会出现病态的代数方程组, 计算精度得到可靠的保证。

如果把基本解的点源放到计算区域以外相当的距离, 则由于边界上的 $q^*(Q_0, p)$ 的积分没有奇异性, 按照上述格林第二公式, 也可获得一个不包含共点效应项的简单边界积分方程:

$$\int_S u(Q_0) q^*(Q_0, p) dS(Q_0) - \int_S q(Q_0) u^*(Q_0, p) dS(Q_0) = 0 \quad (1.26)$$

但是, 由于源点 p 的位置带有任意性, 对某些形状圆边界求数值解时就有可能出现病态的代数方程组。因此, 实用上还是把源点从域外移到边界上成为边界点, 建立起包含有共点效应项的边界积分方程式, 其最终效果与式 (1.25) 完全相同。

1.2.5 边界积分方程的数值解法

用数值方法求解边值问题的边界积分方程时, 只需要在问题的边界上离散为边界单元而计算若干节点上的边界未知值, 即为边界单元法。以下以二维问题为例说明。

[注] 有些文献上采用增大一个半球体把 p_0 点包围在域内的办法取极限来计算这个奇异积分, 获得 $u(p_0)$ 的系数为 $(1 - \frac{1}{2})$, 即得到相同的结果。又如果 p_0 处的边界面是一个角点或角棱线, 则此系数就不再是 $\frac{1}{2}$, (参阅第2.1.3节)。

把二维问题的边界 S 划分为首尾相连的 n 个一维边界单元后, 以边界上任一个节点 i 作为源点, 都可写出一个如式 (1.25) 的边界积分方程 (假定每个节点上的边界变量是单值的标量, 即只有一个自由度)。以全部 n 个边界单元上的积分之总和代替原式中对边界 S 的积分后, 可得如下的 n 个线性代数方程:

$$c_i u_i + \sum_{j=1}^n \int_{S_j} u_j q_i^* ds - \sum_{j=1}^n q_j u_i^* ds = 0 \quad (1.27)$$

$$(i = 1, 2, \dots, n)$$

式中, u_j 和 q_j 是边界单元 j 范围内的 u 函数及其一阶导数 $q = \frac{\partial u}{\partial n}$; u_i^* 和 q_i^* 是在边界单元 j 范围内由于单位点源放在节点 i 时引起的基本解; S_j 为边界单元 j 的轴线长度; c_i 为共点效应系数, 当节点 i 处的边界光滑时, $c_i = \frac{1}{2}$ 。

实现每个边界单元 j 范围内的积分时, 基本解 u_i^* 和 q_i^* 是已知的连续函数解, 故容易用解析的公式实现积分 (当然也可以用数值积分); 边界值 u_j 和 q_j 则采用离散的节点值和插值函数的方式, 象有限单元法使用的那样, 通过一定的插值函数由节点上的边界值来表达, 如下式:

$$\left. \begin{aligned} u_j &= \sum_{k=1}^m N_k u_k \\ q_j &= \sum_{k=1}^m N_k q_k \end{aligned} \right\} \quad (1.28)$$

式中, m 为该单元的节点数; u_k 和 q_k 为节点 K 处的边界函数值; N_k 为相应于该节点的插值函数。

最常用的插值方式是 $m=1$, 即采用直线的边界单元, 并以其中点作为节点 (图 1.6a)。此时, 插值函数 $N_1=1$ (常数), 并有:

$$\left. \begin{aligned} u_j &= 1 \cdot u_1 = \text{常数} \\ q_j &= 1 \cdot q_1 = \text{常数} \end{aligned} \right\} \quad (1.29)$$

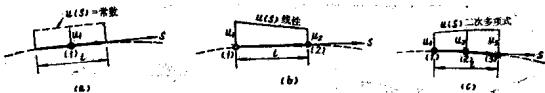


图 1.6

其中, u_1, q_1 为单元中点处的 u, q 值。这种单元称为常数单元。此时沿各单元轴线的积分, 可写成以节点值和只包含基本解影响的相应影响系数的乘积:

$$\int_{S_j} u_j q_i^* ds = u_j \int_{S_j} q_i^* ds = h_{ij} u_j \quad (1.30)$$

$$\int_{S_j} q_j u_i^* ds = q_j \int_{S_j} u_i^* ds = g_{ij} q_j \quad (1.31)$$

式中,

$$h_{ij} = \int_{s_j} q_{ij}^* ds \quad (1.32)$$

$$g_{ij} = \int_{s_j} u_{ij}^* ds \quad (1.33)$$

取每一个节点作为源点, 就可以成立一个边界线性代数方程 (1.27), 经离散插值后写成:

$$\sum_{j=1}^n g_{ij} q_j - \sum_{j=1}^n h_{ij} u_j = 0 \quad (1.34)$$

当 $i = j$ 时, 系数 h_{ij} 中要包括 $C_j = \frac{1}{2}$ 在内。这样, 对于 $i = 1, 2, \dots, n$ 个单元 (节点), 共有 n 个代数方程。这个方程组写成矩阵形式为:

$$GQ - HU = 0 \quad (1.35)$$

其中, G 、 H 为 $n \times n$ 的影响系数矩阵, Q 、 U 为 $n \times 1$ 的列阵 (先假定每个节点上只有一个自由度)。

对于 $m=2$ 或 $m=3$ 的插值, 即相应于采用线性单元 (图 1.6b) 或二次曲线单元 (图 1.6c), 亦可把单元线积分化为节点值与相应影响系数的式 (1.30) 和式 (1.31) 的形式, 并集成式 (1.34) 或式 (1.35), 不过此时 n 代表节点总数。

由于定解条件在边界的一部分 (S_1) 内的 n_1 个节点处给定了 $u_i = \bar{u}_i$, 在边界的另一部分 (S_2) 内的 n_2 个节点处给出了 $q_i = \bar{q}_i$, 必然有 $n = n_1 + n_2$, 所以 n 个未知边界值正好有 n 个代数方程式。但式 (1.35) 中的 Q 和 U 内包含有未知和已知的值。要将其中的已知元素及其相应影响系数 (h_{ij} 或 g_{ij}) 的乘积集中到等号右方, 其中的未知元素放在等号的左方。即把式 (1.35) 重新组合成为标准的待解线性代数方程组:

$$AX = B \quad (1.36)$$

用标准的高斯消元法就可解出 X , 即求出待解的 n_1 个 q_i 和 n_2 个 u_i , 共 n 个边界未知值。

这样, 边界上全部节点处的 u_i 和 q_i 值均为已知, 用式 (1.24) 的离散形式 (源点 h 在域内):

$$u_h = \sum_{j=1}^n \int_{s_j} u_{hj}^* q_j ds - \sum_{j=1}^n \int_{s_j} q_{hj}^* u_j ds \quad (1.37)$$

就可计算出域内任意点 h 处的 u 函数值。

如果每个节点处的 u 函数值有两个自由度或三个自由度 (例如二维或三维弹性力学问题), 则可以对每个自由度未知量成立一个边界积分方程, 共列出 $2n$ 或 $3n$ 个线性代数方程式, 求解 $2n$ 或 $3n$ 个未知数。

如果在计算区域内还有域内源 $f(r)$ 的作用 (即公式 (1.22) 为 $L[u(Q)] + f(Q) = 0$), 则边界积分方程, 即式 (1.25) 中, 还包含有一 $\int_{\Omega} f(Q) u^*(Q_0, P_0) d\Omega(Q)$ 项。此项内各函数均为已知, 并没有增加边界积分方程的未知数。对于简单的域内源, 此区域积分可有解析公式; 对于复杂的域内源, 则可将积分区域也离散为内部单元而用数值积分方法求得, 有关公式将在第六章中叙述。

1.4 间接解法

上一节叙述的边界单元法, 是把单位点源放在一个边界点上, 利用它的影响场 (基本解)

与实际问题的边界函数值乘积的边界积分来列出边界积分方程的。这样的边界积分方程直接以边界上没有给出的值作为待解的未知量，故称为直接列式 (direct formulation)。

另外还有一种利用无限域基本解来形成边界积分方程的相反方式，即一般称为源法 (Source method) 的间接列式 (indirect formulation)，也是早已在经典力学中使用过的边界积分方法。它不是直接用边界上待定函数值作为待解未知量，而是另外采用一种沿边界分布的虚拟分布源函数作为待解的未知变量。

设待解边值问题的计算区域为 Ω ，边界为 S (图 1.7a)。要求的解就是既能在域内满足问题的线性控制微分方程，又能在边界上满足给定的边界条件 (在 S_1 上 $u_s = u$ ，在 S_2 上， $q_s = \bar{q}$) 的特解。设我们已经有在无限区域中某一 P 点 (源点) 上作用一个单位点源的基本解： $u^*(Q, P)$ 及其一阶导数 $q^*(Q, P)$ ，其中 Q 是各个场点。

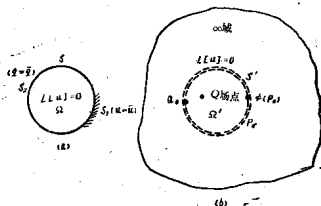


图 1.7

我们设想：在无限大域内取一条几何上与原问题边界 S 完全相同的边界 S' ，在其上放置一系列点源，其分布密度为 $\phi(P_0)$ ，图 1.7b。则 $\phi(P_0)$ 对域内任一场点 Q 产生的影响，可简单地利用叠加原理写出如下积分公式：

$$u(Q) = \int_{S'} u^*(Q, P_0) \phi(P_0) ds'(P_0) \quad (1.38)$$

$$q(Q) = \int_{S'} q^*(Q, P_0) \phi(P_0) ds'(P_0) \quad (1.39)$$

式中， $u^*(Q, P_0)$ 和 $q^*(Q, P_0)$ 为该控制微分方程的基本解及其一阶导数， $q^*(Q, P_0) = \frac{\partial u^*(Q, P_0)}{\partial n}$ ，都是已知的；同时 $q(Q) = \frac{\partial u(Q)}{\partial n}$ 。此处 n 指定为 S' 的外法线方向。

如果把场点 Q 取为边界 S' 上的 Q_0 点，则成立边界值的如下积分表达式：

$$\left. \begin{aligned} u(Q_0) &= \int_{S'} u^*(Q_0, P_0) \phi(P_0) ds(Q_0) + C_u \phi(P_0) \\ q(Q_0) &= \int_{S'} q^*(Q_0, P_0) \phi(P_0) ds(Q_0) + C_q \phi(P_0) \end{aligned} \right\} \quad (1.40)$$

式中， C_u 和 C_q 是在源点 P_0 与场点 Q_0 重合时，由于基本解积分的奇异性引出的共点效应系数。在光滑的边界时，其值为 $+\frac{1}{2}$ 或 0 ，视采用哪一种分布源函数 $\phi(P_0)$ 而定，对此将在后面进一步说明。现在，我们仿照实际边值问题给定的边界条件，在 S 上要求

在 S'_1 上， $u(Q_0) = \bar{u}(Q_0)$ (给定值)；

在 S'_1 上, $q(Q_0) = \bar{q}(Q_0)$ (给定值)。

将式 (1.40) 代入, 就可以得到以 $\phi(Q_0)$ 为未知函数的边界积分方程。

$$\text{在 } S_1 \text{ 上, } \int_{S'} u^*(Q_0, P_0) \phi(P_0) ds(Q_0) + C_0 \phi(P_0) = \bar{u}(Q_0); \quad (1.41)$$

$$\text{在 } S_2 \text{ 上, } \int_{S'} q^*(Q_0, P_0) \phi(P_0) ds(Q_0) + C_0 \phi(P_0) = \bar{q}(Q_0) \quad (1.42)$$

根据式 (1.41) 和式 (1.42) 就可确定边界上应有的分布源函数 $\phi(P_0)$ 。用这个分布源按式 (1.38) 和式 (1.39) 就可以计算出任一场点 Q (包括边界场点 Q_0) 处的函数值 $u(Q)$ 和 $q(Q)$, 即待解边值问题的解答。因为这个解是控制方程基本解按式 (1.38) 和 (1.39) 的线性叠加, 自然能够满足该问题的控制微分方程; 而式 (1.41) 和式 (1.42) 又保证了在边界 S'_1 上 $u_s = \bar{u}$, 在 S'_2 上 $q_s = \bar{q}$ 。根据定解问题的唯一性原理, 在无限域内 Ω' 和 S' 范围中实现的这个解, 也就是原来待解问题的唯一的特解, 即两个问题在计算区域范围内是完全等价的。

当然, 边界积分方程, 式 (1.41) 和式 (1.42) 也是要用离散化的数值解法来求解的。即把边界 S' 离散为若干个边界单元和 n 个节点, 在每个边界单元范围内的未知函数 $\phi(P_0)$, 假定按一定的分布插值函数 N_i 由节点值 ϕ_i 来表达后, 式 (1.41) 和式 (1.42) 也就转化为一个以 N 个 ϕ_i 为未知数的线性代数方程组, 其形式为:

$$A_{ij} \phi_j = B_i \quad (1.43)$$

式中: A_{ij} 为影响系数矩阵, 即各 ϕ_j 为 1 时在边界单元节点 i 处产生的影响, 当然也包括共点效应 ($i = j$) 时的影响;

B_i 为给定边界值的列阵。

由 N 个给定的边界值通过这 N 个线性代数方程, 就可解出 N 个待定的分布源函数 ϕ_i 的值。

分布源函数 $\phi(P_0)$ 是作用在无限大区域中 S' 线上的分布源函数, 与实际待解问题作用在计算区域的边界 S 上的边界值具有不同的概念。事实上, $\phi(P_0)$ 是同时作用在 S' 界线的两侧分布源, 它相当于在无限大区域上同时解出一个内部问题和一个外部问题。(如图 1.7b 中两条虚线的边界所表示)。待解的实际问题只是其中的计算区域 Ω' 上的一个问题。由于以实际问题给定的边界条件作为求解 $\phi(P_0)$ 的条件, 求出的解答只符合部分区域 Ω' 的情况, 在另一部分区域 Ω 的解答是无意义的。所以习惯上称 $\phi(P_0)$ 为虚拟源函数。并称这种解法为间接列式法。

作为虚拟的源函数 $\phi(P_0)$, 可以采用微分方程的待解函数 u 本身, 也可以用它的一阶导数 ($q = \frac{\partial u}{\partial n}$)。这样也就构成了两种不同的间接边界单元法。

例如, 对于二维弹性力学问题, 常常采用无限大区域中沿边界 S' 作用的一组虚拟分布力 F (包括切向和法向二个分量, 以下同) 作为分布源, 这就是所谓虚拟力法 (Fictitious Force Method)。图 1.8 表示 S' 中某一个边界元 j 上的虚拟分布力 F_j^t 和 F_j^n 。这种分布力与应力有着相同的因次, 根据弹性力学的关系式: $\sigma = E\varepsilon = E \frac{\partial u}{\partial l}$, 也就相当于位移的一阶导数。在弹性力学平面问题中, 无限大平面内某一点 P 受到一个集中力的作用时, 平面内各处的场点 Q 的位移 u 和应力 σ (在边界时转换为表面力 P) 已有现成的解析解——平面问题的开尔文 (Kelvin) 解。在边界 S' 上施加单位力产生的影响场就是式 (1.38) 和式 (1.39) 中的 $u^*(Q, P_0)$ 和 $q^*(Q, P_0)$ 。当 S 离散为 N 个边界单元时, 比照式 (1.41), (1.42),

可以写出如下的离散形式的边界积分方程（应当理解为包括切向和法向两个方程，此处用简化的写法）：

$$\text{在 } S'_i \text{ 上, } \sum_{j=1}^N \int_{S_j} u_{ij}^* F_j ds_j = \bar{u}_i \quad (1.44)$$

$$\text{在 } S'_i \text{ 上, } \sum_{j=1}^N \int_{S_j} q_{ij}^* F_j ds_j + \frac{1}{2} F_i = \bar{P}_i \quad (1.45)$$

其中，对于虚拟法，共点效应系数为 $C_q = 0$, $C_u = +\frac{1}{2}$ 。解出 F_i 后，即可用式(1.38)、

(1.39) 求得计算区域内和边界上的位移和应力（表面力）。具体计算过程见第四章。

用虚拟法解题时，无限大区域在边界 S' 上作用有虚拟分布力， S' 两侧之间的位移是仍保持连续的。但两侧的应力却是不相同的，即从边界的一侧到另一侧，有应力的间断，其差值就是 $\phi(P_0)$ 。用表面力表示，可写出如下关系：

$$\left. \begin{aligned} \bar{P}_s^- - \bar{P}_s^+ &= \bar{F}_s \\ \bar{P}_n^- - \bar{P}_n^+ &= \bar{F}_n \end{aligned} \right\} \quad (1.46)$$

因此，虚拟法也可称为应力间断法或不连续应力法 (Stress Discontinuity Method)。

如果我们采用无限区域中边界 S' 两侧之间的相对位移（也是包括切向和法向二个分量）作为分布源 $\phi(P_0)$ ，就形成另一种间接的边界单元法，可以称之为虚拟相对位移法，但常称为不连续位移法或位移间断法 (Displacement Discontinuity Method)。在无限大区域中施加外力，不可能仅对一点两侧产生不同的位移，但是，可以设想为在一定长度的线段或一定面积的面的两侧，由于某种大小相等而方向相反的一对表面力作用而形成相对位移。即在某一边界单元上的位移间断可定义为：

$$\left. \begin{aligned} \bar{u}_s^- - \bar{u}_s^+ &= \bar{D}_s \\ \bar{u}_n^- - \bar{u}_n^+ &= \bar{D}_n \end{aligned} \right\} \quad (1.47)$$

在弹性力学平面问题中，无限大平面内某一线段两侧产生均布的单位相对位移（包括切向和法向）时，在平面内各处 Q 点产生的位移和应力（或表面力），亦已有现成的解——Crouch (1976)。因而也可以写出离散形式的边界积分方程（也应理解为包括切向和法向二个方程式）：

$$\left. \begin{aligned} \text{在 } S'_i \text{ 上, } \sum_{j=1}^N B_{ij} D_j + \frac{1}{2} D_i &= \bar{u}_i \\ \text{在 } S'_i \text{ 上, } \sum_{j=1}^N A_{ij} D_j &= \bar{P}_i \end{aligned} \right\} \quad (1.48)$$

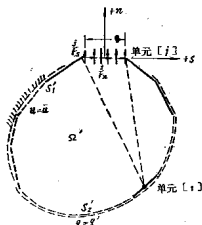


图 1.8