

高等学校试用教材

结构力学

下 册

湖南大学 天津大学 合肥工业大学合编

杨天祥 主编

人民教育出版社

高等学校试用教材

结 构 力 学

下 册

湖南大学 天津大学 合肥工业大学合编
杨 天 祥 主编

人 民 教 育 出 版 社

本书是根据一九七七年十月教育部委托召开的高等学校工科力学教材会议所讨论通过的“结构力学”教材编写大纲编写而成。

全书共十七章,分上、下两册。上册共九章,主要阐述:静定结构的内力和位移的计算,解算超静定结构的两种基本方法——力法和位移法,分析连续梁及刚架的渐近法——力矩分配法和迭代法,结构影响线的绘制和应用等。下册共八章,主要阐述:结构的矩阵分析,结构的动力分析,对于梁及刚架的塑性分析,结构的弹性稳定计算等也作了介绍。全书既对经典的理论和计算方法作了系统阐述,又考虑到电子计算机在解算力学问题上的应用日趋广泛,因此,书中对结构的矩阵分析方法作了必要的介绍。为了教学的需要以及自学中的方便,每章末均附有大量习题和部分答案。

全书采用了国际制单位(SI制单位)。

本书可作为工业与民用建筑、建筑结构工程等专业“结构力学”课程的试用教材,也可供有关专业以及土建工程技术人员参考。

高等学校试用教材

结 构 力 学

下 册

湖南大学 天津大学 合肥工业大学合编

杨 天 祥主编

*

人民教育出版社出版

新华书店北京发行所发行

人民教育出版社印刷厂印装

*

开本 787×1092 1/16 印张 18 字数 400,000

1979年8月第1版 1982年2月第5次印刷

印数 48,901—58,100

书号 15012·0196 定价 1.50元

目 录

第十章 结构矩阵分析概论1	* § 14-7 刚架稳定计算的概念137
§ 10-1 概述1	习题142
§ 10-2 单元的内力和变形4	第十五章 结构动力学概论 单自由
§ 10-3 单元杆端力和杆端位移的关系9	度体系的振动145
§ 10-4 影响系数与柔度矩阵、刚度矩阵14	§ 15-1 概述145
§ 10-5 等效结点荷载16	§ 15-2 单自由度体系的自由振动153
习题20	§ 15-3 无阻尼时单自由度体系在简谐
第十一章 矩阵力法23	力作用下的强迫振动159
§ 11-1 前言23	§ 15-4 有阻尼时单自由度体系在简谐
§ 11-2 矩阵力法的基本矩阵公式23	力作用下的强迫振动163
§ 11-3 矩阵力法的计算步骤及示例32	*§15-5 等效粘滞阻尼的概念168
习题40	*§15-6 任意荷载作用下的动力计算170
第十二章 矩阵位移法42	习题179
§ 12-1 刚度法的概念42	第十六章 多自由度体系和无限自由
§ 12-2 按整体结构坐标系建立单元刚度矩	度体系的振动183
阵50	§ 16-1 多自由度体系的自由振动183
§ 12-3 荷载矩阵56	§ 16-2 多自由度体系在简谐力作用下
§ 12-4 直接刚度法59	的强迫振动204
习题81	§ 16-3 按振型分解计算多自由度体系
第十三章 梁和刚架的塑性分析84	的强迫振动211
§ 13-1 一般概念84	*§16-4 无限自由度体系的自由振动222
§ 13-2 极限弯矩; 塑性铰; 破坏机构.....85	*§16-5 按振型分解计算无限自由度体
§ 13-3 单跨超静定梁的极限荷载87	系的强迫振动231
§ 13-4 比例加载的几个定理88	习题239
§ 13-5 确定极限荷载的机动法和静力	第十七章 结构自振频率和振型的近
法; 连续梁的极限荷载91	似计算242
*§13-6 刚架的极限荷载100	§ 17-1 能量法242
习题107	*§17-2 等效质量法250
第十四章 结构的弹性稳定110	*§17-3 集中质量法253
§ 14-1 概述110	§ 17-4 矩阵迭代法257
§ 14-2 确定临界荷载的静力法和能量法112	*§17-5 瑞雷-李茨法264
§ 14-3 等截面直杆的稳定121	习题269
*§14-4 变截面杆件的稳定127	附录 II273
§ 14-5 剪力对临界荷载的影响129	附录 III279
§ 14-6 组合压杆的稳定131	主要参考书目283

第十章 结构矩阵分析概论

§ 10-1 概 述

前面所介绍的力法、位移法和渐近法等都是传统的解算超静定结构的方法,它们是建立在手算基础上的。对于初学结构力学的人来说,这些都是完全必要的。然而,由于数字电子计算机的出现并被广泛地使用,传统的计算方法已不能满足这种新计算技术的要求,因此,以电算为基础的结构矩阵分析方法就在六十年代迅速发展起来了。

在结构矩阵分析方法中,引进了线性代数中的矩阵理论,故有结构矩阵分析之称。在结构力学分析过程中,运用矩阵进行运算,不仅能使所得公式非常紧凑,而且这种由矩阵表达的计算公式,便于编制电子计算机的程序,因而最适宜用电子计算机进行自动化数学计算。

结构矩阵分析又称为有限单元法,它的基本思想是首先把结构离散成有限数目的单元,然后再考虑某些条件设法把这些离散单元组合成原来的结构。为了介绍这一解题方法,下面我们先以一个最简单的桁架为例来加以说明。

图 10-1, *a* 示一由三根杆件组成的对称桁架。在用有限单元法分析此结构时,可将它离散成图 10-1, *b* 所示的三个单元,因此,图 10-1, *a* 可看作是图 10-1, *b* 所示单元的集合体。将一个整体结构离散成有限数目的单元后,问题乃在于如何将这些离散的单元组合成原来的整体结构。从图 10-1, *a* 中结点 1 的平衡条件可知,这三个单元在结点 1 处的杆端力 N_{12} 、 N_{13} 、 $N_{13'}$ ($N_{13'} = N_{13}$) 必须与外力 P 保持平衡。此外,这三个单元本来在结点 1 处是联在一起的,为了保证变形谐调,各个单元的杆端位移就应与结点位移具有一定的关系。这种关系不仅使离散的单元组合后仍能联结成为一个整体,而且还须与支座的约束情况相符,即满足位移的边界条件。在计算各单元的杆端位移时,必须考虑单元的变形,而单元的变形则与该单元的物理性质(即应变和应力之间的关系)有关。综上所述,要把离散了的单元组合成为原来的整体结构,就必须考虑如下三个方面的问题:

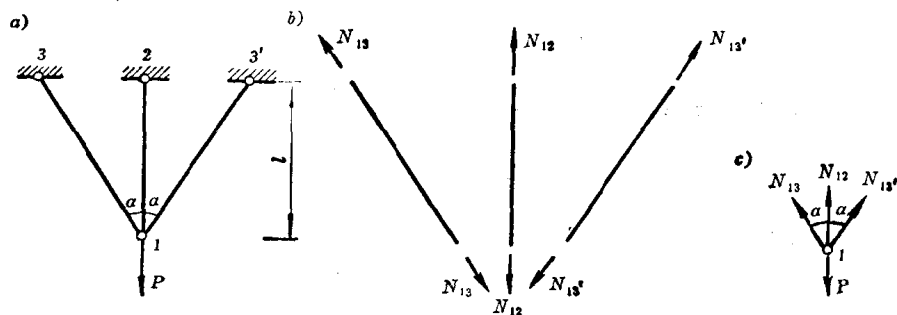


图 10-1

- (1) 静力学方面: 要保证外力与内力的平衡关系,也就是要使杆端力与荷载之间保持平衡。
- (2) 几何方面: 要保证各单元在联结处杆端位移能满足变形谐调条件和位移边界条件。

(3) 物理方面: 为了确定各单元的杆端位移, 就必须首先从单元的变形出发建立单元变形与杆端位移的关系, 最后再建立杆端位移与杆端力之间的关系式。

下面我们就图 10-1 所示桁架具体说明如下:

(1) 静力学方面

取结点 1 为隔离体(图 10-1, c), 由 $\sum Y=0$ 并注意有 $N_{13'}=N_{13}$, 可得:

$$N_{12} + 2N_{13}\cos\alpha = P \quad (a)$$

(2) 几何方面

设 Δ_{12} 代表杆 12 的相对轴向变形, 并考虑到杆 12 在结点 2 处杆端位移为零, 则 Δ_{12} 即等于杆 12 在结点 1 处沿杆轴方向的杆端位移; 同理, 杆 13 和杆 13' 在结点 1 处沿杆轴方向的杆端位移为 Δ_{13} ($\Delta_{13'}=\Delta_{13}$)。设结点 1 沿竖向的分位移为 u (沿水平方向的结点分位移, 根据对称性可知为零), 则杆端位移与结点位移之间具有如下关系:

$$\Delta_{12}=u, \quad \Delta_{13}=u\cos\alpha \quad (b)$$

这就是满足变形谐调和位移边界条件的关系式。

(3) 物理方面

设各单元的弹性模量均为 E , 横截面面积均为 A 。由材料力学公式可知, 杆端位移 Δ 与杆端力 N 之间有如下关系:

$$\Delta_{12} = \frac{l}{EA} N_{12}, \quad \Delta_{13} = \frac{l_{13}}{EA} N_{13} = \frac{l}{EA} \frac{N_{13}}{\cos\alpha} \quad (c)$$

综合上述三方面共有五个方程(a)、(b)、(c), 它们刚好包含了五个未知量 N_{12} 、 N_{13} 、 Δ_{12} 、 Δ_{13} 、 u 。在求解这些未知量时, 可选取某些未知量作为基本未知量。根据基本未知量选取的不同, 可将求解方法区分为力法和位移法。

(1) 力法

它以力作为基本未知量。由式(a)可知, 本结构只有一个平衡方程, 但其中包含了两个未知力 N_{12} 和 N_{13} , 故它属于超静定的, 还须考虑变形谐调条件才能求解。因为我们选取的基本未知量是杆端力, 所以求解时还必须把反映变形谐调的关系式(b)改为用杆端力来表示。为此, 把式(c)代入式(b)得:

$$\frac{l}{EA} N_{12} = u, \quad \frac{l}{EA} \frac{N_{13}}{\cos\alpha} = u\cos\alpha \quad (d)$$

从式(d)中消去结点位移 u 就得到用杆端力表示的变形谐调条件如下:

$$\frac{N_{12} l \cos\alpha}{EA} - \frac{N_{13} l}{EA \cos\alpha} = 0 \quad (e)$$

由式(a)和式(e)可解得:

$$N_{12} = \frac{P}{1 + 2\cos^3\alpha}, \quad N_{13} = \frac{P \cos^2\alpha}{1 + 2\cos^3\alpha}$$

代回式(c)求得:

$$\Delta_{12} = \frac{Pl}{EA(1 + 2\cos^3\alpha)}, \quad \Delta_{13} = \frac{Pl \cos\alpha}{EA(1 + 2\cos^3\alpha)}$$

再把 Δ_{12} 代入式(b)则得

$$u = \frac{Pl}{EA(1+2\cos^3\alpha)}$$

(2) 位移法

它以结点位移作为基本未知量。在本例中, 结点位移只有一个, 而平衡方程也只有一个, 所以只要把平衡方程中的杆端力 N_{12} 和 N_{13} 改用位移 u 来表示, 那么, 由平衡方程就可求出结点位移 u 。一般说来, 结点位移的数目总是与平衡方程式的数目相对应的。因为对应于每一个结点位移就相应地可在该结点位移方向列出一个平衡方程, 所以按位移法求解时, 只需用到以结点位移表示的平衡方程。对于本例, 为了得到以结点位移表示的平衡方程, 首先, 需找出结点位移与杆端位移的关系, 显然, 它们就是上述的式(b):

$$\Delta_{12} = u, \quad \Delta_{13} = u \cos \alpha \quad (b)^*$$

其次, 再建立杆端位移与杆端力的关系, 它即上述的式(c):

$$\Delta_{12} = \frac{l}{EA} N_{12}, \quad \Delta_{13} = \frac{l}{EA} \frac{N_{13}}{\cos \alpha} \quad (c)^*$$

根据(b)、(c)两式可得用结点位移 u 表示的杆端力如下:

$$N_{12} = \frac{EA}{l} u, \quad N_{13} = \frac{EA}{l} \cos^2 \alpha u \quad (f)$$

把式(f)代入式(a), 即得以结点位移表示的平衡方程:

$$\frac{EA}{l} u + 2 \frac{EA}{l} \cos^3 \alpha u = P$$

解之得

$$u = \frac{Pl}{EA(1+2\cos^3\alpha)}$$

把上式代入式(f)即得:

$$N_{12} = \frac{P}{1+2\cos^3\alpha}, \quad N_{13} = \frac{P \cos^2 \alpha}{1+2\cos^3\alpha}$$

再把这两个表达式代回式(c)即得:

$$\Delta_{12} = \frac{Pl}{EA(1+2\cos^3\alpha)}, \quad \Delta_{13} = \frac{Pl \cos \alpha}{EA(1+2\cos^3\alpha)}$$

通过这个例子可知, 在有限单元法中, 综合考虑了静力、几何和物理三方面的问题, 并建立了相应于这三方面的关系式, 即(1)结点荷载与杆端力的关系式; (2)杆端位移与结点位移的关系式; (3)杆端位移与杆端力的关系式。然而, 由于选取基本未知量的不同, 求解时所遵循的次序是不同的。就力法而言, 在建立上述关系式时, 它将遵循如下的顺序: 先由结点荷载求出杆端力, 次由杆端力求出杆端位移, 再由杆端位移求出结点位移, 最后则根据变形协调条件建立力法方程。而就位移法来说, 则遵循的顺序刚好与力法相反。但它们最后计算的结果完全相同, 只是解题途径不同而已。

在以下介绍结构矩阵分析这一部分内容时, 我们仍将按力法和位移法这两种方法来叙述相

应的矩阵力法(又称柔度法)和矩阵位移法(又称刚度法)。在这两种方法中,因刚度法便于编制一般通用的程序,而在工程界较为流行,所以,本书即把重点放在刚度法的叙述方面,而对柔度法只作扼要的介绍。

最后指出,本书所介绍的结构矩阵分析方法仅是针对杆系结构而言的,亦即讨论的范围只限于一维问题。然而,它的计算原理和解题步骤与二维或三维的弹性力学问题是具有很多共同点的,所以学习本部分内容也可作为学习弹性力学有限单元法打下一定的基础。

§10-2 单元的内力和变形

由上节所述简例可知,按有限单元法分析杆系结构时,首先要把结构离散成若干个单元,而以这些单元作为计算的基础,再综合考虑静力、几何、物理三方面的问题去计算原来的整体结构。因此,在有限单元法中,关于单元的划分和单元的内力、变形的计算将是最基本的内容,下面我们分别来进行讨论。

一、单元的划分

在讨论结构的单元划分时,应根据结构构造特点、计算方法和计算精度的要求来确定。对于杆系结构,其单元一般是指结构的杆件,这些杆件只在两端与其它杆件或支座相连,我们称这些联结为结点。因此,只要确定了一个结构的所有结点,则它的各个单元也就被确定。

在本书中,我们将只限于讨论等截面直杆这种形式的单元,并且还规定荷载只作用在结点处。根据这一规定,划分单元的结点应该是结构杆件的转折点、汇交点、支承点和截面突变点等,这些结点都是根据结构本身构造的特征来确定的,故称为构造结点。例如图 10-2 所示结构中的 a 、 b 、 c 、 d 、 e 、 f 等都是构造结点。此外,对于集中力作用处,例如图 10-2 中的 g 点,为了保证结构只承受结点荷载,我们也将它作为一个结点来处理,象这样的结点就称为非构造结点(关于单元上承受荷载的另一种处理方法是把它改用等效的结点荷载来替代,这将在 § 10-5 中进行讨论)。

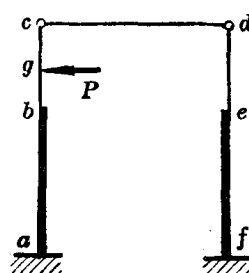


图 10-2

对于曲杆结构(例如拱),可将它化为许多折线来处理,每一直线段取作一个单元,如果截面是变化的,则可取该单元中点处的截面近似地表示单元的截面,计算时仍按等截面单元进行。显然,对这样的结构,单元划分得越多,其计算结果将越接近于真实情况。

二、单元的内力

对于杆系结构而言,它的每个单元均是一根直杆,在单元两端的内力称为杆端力,只要求出这些杆端力,则单元其它截面上的内力即可根据平衡条件利用这些杆端力而求得。因此,我们可以把单元的杆端力当作代表它的内力的一个标志,以后在谈到计算单元的内力时,指的就是这些杆端力,而不再把这二者作严格的区分。下面先介绍一下单元杆端力的正负方向及其在矩阵公式中的表示方法。

图 10-3, a 所示为一典型单元,它的两端分别用 j 、 k 表示,单元号则用 i 表示之。假定 x 轴与单元的截面形心轴重合,并规定由 j 到 k 的方向为正, y 轴和 z 轴是杆件截面的两个主轴,并

假定弯曲中心与截面形心重合, 这样, 当外力作用于主平面时, 就只产生平面弯曲而无扭转现象发生。在本书中, 我们只限于讨论平面杆系结构的问题, 并假定外力作用于 xy 平面, 因此, 单元的杆端力将如图 10-3, b 所示, 它们分别是 j 端和 k 端的轴力 N_j 、 N_k , 剪力 Q_j 、 Q_k 和弯矩 M_j 、 M_k 。这些杆端力的正方向均规定与坐标轴的正方向一致

时为正, 其中弯矩的正方向依照右手螺旋法则规定为反时针方向, 因为图 10-3, b 中所示的弯矩是绕 z 轴旋转的, 当它的力偶矢量规定与 z 轴的正方向一致为正时, 则其正方向应该是反时针方向。至于杆端力的符号则有两种表示方法, 分别如图 10-3, b , c 所示。对于图 10-3, b 所示的符号, 其下标表示杆端, 而上标则表示单元号, 例如 $M_j^{(i)}$ 就表示在 i 单元上 j 端的弯矩; 至于图 10-3, c 所示符号, 则统一用 S 表示杆端力, 其下标则依坐标轴的顺序来规定, 在 j 端沿 x 、 y 、 z 方向的力则依次用下标 1、2、3 来表示; 在 k 端沿 x 、 y 、 z 方向的力则依次用下标 4、5、6 表示。这两种符号表示方法各有其优缺点, 前者比较直观, 后者则形式比较统一便于用矩阵符号表示。在本书中主要采用后一种符号形式; 但在某些个别地方, 为了便于读者学习起见, 也将采用前一种表示方法来说明问题。

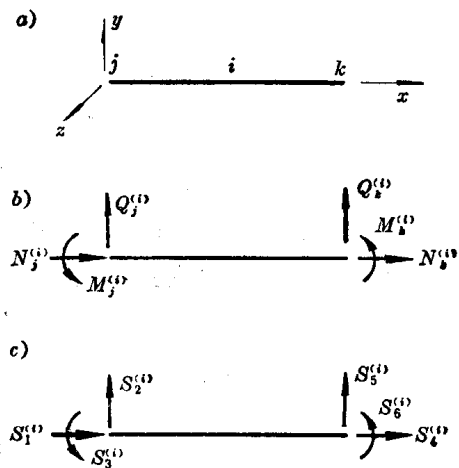


图 10-3

若令 $S^{(i)}$ 表示单元 i 的杆端力的列矩阵, 即

$$S^{(i)} = \{S_1^{(i)} \quad S_2^{(i)} \quad S_3^{(i)} \quad S_4^{(i)} \quad S_5^{(i)} \quad S_6^{(i)}\} \quad (10-1)$$

或

$$S^{(i)} = \{N_j^{(i)} \quad Q_j^{(i)} \quad M_j^{(i)} \quad N_k^{(i)} \quad Q_k^{(i)} \quad M_k^{(i)}\} \quad (10-2)$$

由于我们只限于讨论结点荷载这种情况, 所以单元上将无直接外载作用, 根据单元的平衡条件将有:

$$\left. \begin{aligned} \sum X &= N_j + N_k = 0 \\ \sum Y &= Q_j + Q_k = 0 \\ \sum M_k &= M_j + M_k - Q_j l = 0 \end{aligned} \right\}^{*})$$

由此可知, 只要适当地给出其中三个杆端力就可推算出其余三个, 也就是说, 我们只用三个杆端力就能表示单元的内力情况, 不过, 由上式可以看出, 只有下列几种组合方式可供选择: 即取两个轴力中的一个, 加上从两对弯矩与剪力中选择两个弯矩或一个弯矩和一个剪力。

第一种形式如图 10-4, a 所示, 它选取一个轴力和两个杆端弯矩来表示单元的杆端力, 这种单元称为简支式单元; 第二种形式如图 10-4, b 所示, 它选取一个轴力、一个剪力和一个杆端弯矩来表示单元的杆端力, 这种单元称为悬臂式单元。

为了区别于上述两种形式的单元, 称图 10-3 所示的单元为自由式单元。下面我们给出自由

*): 为简单起见, 上标 (i) 未标出。

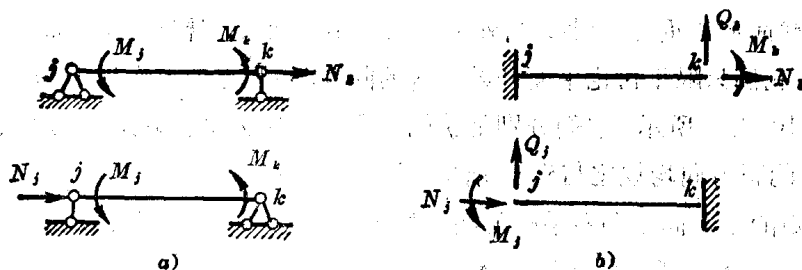


图 10-4

式单元与简支式单元或悬臂式单元在杆端力方面的关系式。

1. 自由式单元与简支式单元的杆端力关系

设以 $F^{(i)}$ 表示简支式单元杆端力列矩阵, 则有

$$F^{(i)} = \{F_1^{(i)} \quad F_2^{(i)} \quad F_3^{(i)}\} \quad (10-3)$$

由图 10-5, a、b 可知:

$$\begin{bmatrix} S_1^{(i)} \\ S_2^{(i)} \\ S_3^{(i)} \\ S_4^{(i)} \\ S_5^{(i)} \\ S_6^{(i)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{l} & \frac{1}{l} \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{l} & -\frac{1}{l} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_1^{(i)} \\ F_2^{(i)} \\ F_3^{(i)} \end{bmatrix} \quad (10-4)$$

a)

b)

c)

图 10-5

上式可以写成如下缩写的形式:

$$S^{(i)} = B^{(i)} F^{(i)} \quad (10-5)$$

式中

$$B^{(i)} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{l} & \frac{1}{l} \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{l} & -\frac{1}{l} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (10-6)$$

称为简支式单元 i 与自由式单元 i 的杆端力变换矩阵。

2. 自由式单元与悬臂式单元的杆端力关系

设悬臂式单元的杆端力列矩阵仍用 $F^{(i)}$ 表示, 则按照上述推导过程, 由图 10-5, a, c 可知:

$$\begin{bmatrix} S_1^{(i)} \\ S_2^{(i)} \\ S_3^{(i)} \\ S_4^{(i)} \\ S_5^{(i)} \\ S_6^{(i)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & -l & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_1^{(i)} \\ F_2^{(i)} \\ F_3^{(i)} \end{bmatrix} \quad (10-7)$$

或写成

$$S^{(i)} = B^{(i)} F^{(i)}$$

式中

$$B^{(i)} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & -l & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (10-8)$$

称为悬臂式单元 i 与自由式单元 i 的杆端力变换矩阵。

三、单元的变形

结构在外因影响下, 各单元将发生弯曲和轴向变形, 而单元的两端也将随之产生移动和转动。这种反映单元端点的位移, 通常称为杆端位移。在杆系结构矩阵分析中, 凡涉及有关变形方面的计算时, 主要都是通过单元的杆端位移来进行的, 因此, 可以把单元的杆端位移作为单元变形方面的一个标志。并且在以后, 不再把单元变形与单元的杆端位移作严格的区分。

图 10-6 示一典型单元 i 的变形情况。它由原来的位置 jk 变到 $j'k'$, 在端点处, 与杆端力 $S_1, S_2 \dots S_6$ 相对应也有六个位移分量 $u_1, u_2, \dots u_6$ 。它们的正方向规定与杆端力的正方向一致。设以 $u^{(i)}$ 表示单元 i 的杆端位移列矩阵, 则有

$$u^{(i)} = \{u_1^{(i)} \quad u_2^{(i)} \quad u_3^{(i)} \quad u_4^{(i)} \quad u_5^{(i)} \quad u_6^{(i)}\} \quad (10-9)$$

它是以原始杆轴作为基准去度量的, 通常称为单元的绝对位移。

对于图 10-6 所示单元的变形情况, 我们还可将其分解为两部分, 一部分是单元在平面内作为一个刚体而发生的刚性位移(此时, 单元仍保持平直但发生了移动和转动); 另一部分则是由于单元弹性变形所产生的相对杆端位移, 这一部分位移可以看作是单元在两端具有一定约束情况下由一部分杆端力所产生的, 故称为相对位移。考虑到相对位移在以后计算中将经常用到, 故有必要加以详细的论述。

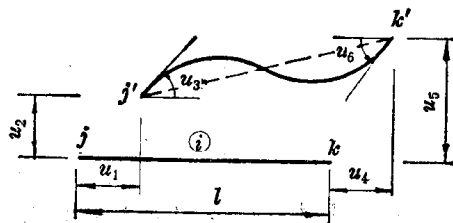


图 10-6

当把单元的变形区分为刚性位移和相对位移两部分时,所选择的刚性位移并不是唯一的,因此,相应的相对位移的形式也就不止一种,它依所选的刚性位移而定。换句话说,在度量相对位移时,我们是以所选的刚性位移作为参考坐标。因此,选定的参考坐标不同,得出的相对位移形式也不同。现按照图 10-5, *b* 所示简支式单元和悬臂式单元两种参考坐标分述如下:

1. 按简支式单元考虑的杆端相对位移

图 10-7 示一单元,发生变形后,它由原来的位置 jk 改变到新的位置 $j'k'$ 。我们可设想单元 jk 先平移到 $j'k''$, 再转动到 $j'k'''$, 此时单元仍保持平直; 其次, 单元再由 $j'k'''$ 变到最后位置 $j'k'$ 。这可以看作是在杆端力 F_1 、 F_2 和 F_3 共同作用下产生变形的结果。如取 $x'y'$ 作为参考坐标, 那么反映单元弹性变形部分的杆端相对位移就是 k' 端的轴向位移 v_1 和 j' 、 k' 两端的角位移 v_2 、 v_3 。如用 $V^{(i)}$ 表示单元 i 的杆端相对位移列矩阵, 则有:

$$V^{(i)} = \{v_1^{(i)} \quad v_2^{(i)} \quad v_3^{(i)}\} \quad (10-10)$$

在单元杆端相对位移 $V^{(i)}$ 和杆端绝对位移 $u^{(i)}$ 之间存在一定的关系, 今推导如下。因 (参看图 10-7)

$$(l + v_1^{(i)}) \cos \beta = l + u_4^{(i)} - u_1^{(i)}$$

$$\sin \beta = \frac{u_5^{(i)} - u_2^{(i)}}{l + v_1^{(i)}}$$

考虑到 β 很小, 可取 $\cos \beta \approx 1$ 、 $\sin \beta \approx \beta$, 则有:

$$v_1^{(i)} = u_4^{(i)} - u_1^{(i)} \quad (a)$$

$$\beta = \frac{u_5^{(i)} - u_2^{(i)}}{l + v_1^{(i)}} \approx \frac{u_5^{(i)} - u_2^{(i)}}{l} \quad (b)$$

此外

$$v_2^{(i)} = u_3^{(i)} - \beta = u_3^{(i)} + \frac{u_2^{(i)} - u_5^{(i)}}{l} \quad (c)$$

$$v_3^{(i)} = u_6^{(i)} - \beta = u_6^{(i)} + \frac{u_2^{(i)} - u_5^{(i)}}{l} \quad (d)$$

由式(a)、(c)和(d)可得 $V^{(i)}$ 和 $u^{(i)}$ 的矩阵关系式如下:

$$\begin{bmatrix} v_1^{(i)} \\ v_2^{(i)} \\ v_3^{(i)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{l} & 1 & 0 & -\frac{1}{l} & 0 \\ 0 & \frac{1}{l} & 0 & 0 & -\frac{1}{l} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1^{(i)} \\ u_2^{(i)} \\ u_3^{(i)} \\ u_4^{(i)} \\ u_5^{(i)} \\ u_6^{(i)} \end{bmatrix} \quad (10-11)$$

2. 按悬臂式单元考虑的杆端相对位移

除了上述按简支单元考虑的相对位移外, 还有一种按悬臂式单元来考虑的杆端相对位移。图 10-8 所示为按悬臂式单元考虑杆端相对位移的情况。首先, 我们设单元 jk 先平移至 $j'k''$, 然后在 j' 端转动角度 u_3 使单元由 $j'k''$ 转动到 $j'k'''$, 最后, 在杆端力 F_1 、 F_2 和 F_3 的作用下使此悬臂梁

发生弹性变形而到达 $j'k'$ 这一位置。这就是说, 计算单元的杆端相对位移时, 所取参考坐标系是以 j' 端作为坐标原点, 而以 j' 端转角的切线作为 x' 轴 (图 10-8)。显然, 这里所取的参考坐标与上述简支单元不同。

同样, 悬臂式单元的杆端相对位移与原单元的杆端绝对位移也具有一定的关系。在此, 我们不再进行推导而直接给出如下:

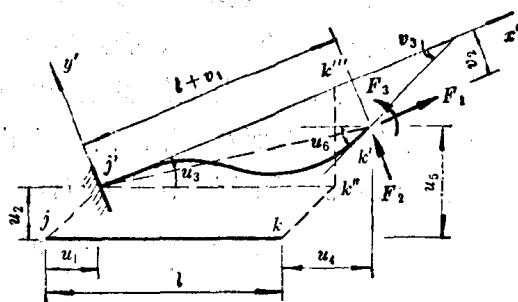


图 10-8

$$\begin{bmatrix} v_1^{(i)} \\ v_2^{(i)} \\ v_3^{(i)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -l & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1^{(i)} \\ u_2^{(i)} \\ u_3^{(i)} \\ u_4^{(i)} \\ u_5^{(i)} \\ u_6^{(i)} \end{bmatrix} \quad (10-12)$$

§ 10-3 单元杆端力和杆端位移的关系

我们知道, 当结构受到外因影响时, 它将产生变形和内力, 二者之间具有恒定的关系, 这种关系与结构的物理性质有关。在有限单元法中, 需要考虑这方面的问题, 即建立单元杆端力和杆端位移的关系式。由上节可知, 单元的杆端位移可以有三种表示方法, 所以, 下面就分三种情况来讨论单元杆端力和杆端位移的关系。

一、自由式单元

自由式单元有六个杆端位移和六个杆端力。如果已知它的杆端位移, 则可求出相应的六个杆端力。但是, 若已知它的六个杆端力, 则不能确定相应的六个杆端位移。因为, 就自由式单元的位移来说, 它包含了由单元弹性变形所产生的位移和刚性位移两部分, 而后者仅由单元本身无法确定。因此, 不能由单元的杆端力确定单元的杆端位移。据此, 下面仅讨论如何由杆端位移确定相应的杆端力。

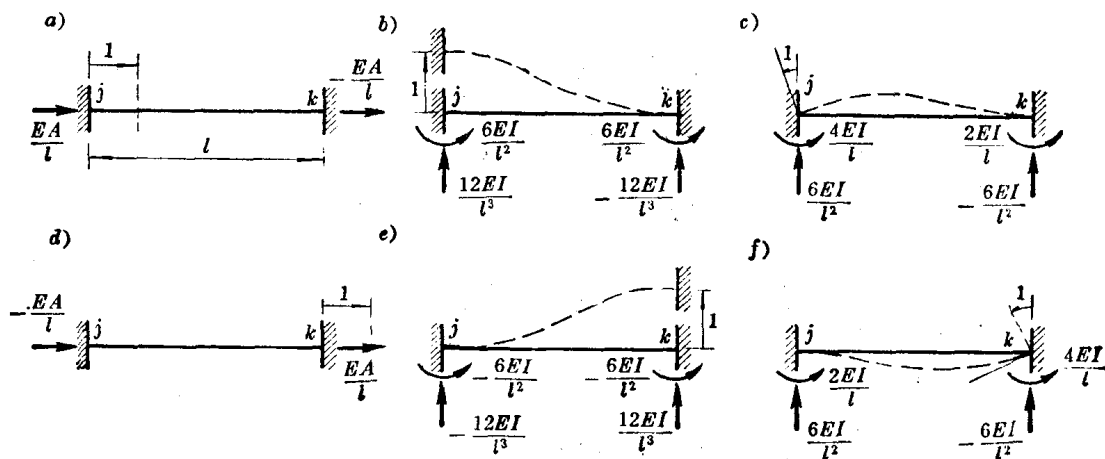


图 10-9

由于以下讨论的问题均属于线性变形体系的范畴,故可应用叠加原理。因而,在建立由杆端位移引起相应杆端力的方程时,可分别考虑各个杆端位移单独作用的影响,然后叠加。在图 10-9 中,分别示出由于各单位杆端位移所产生的杆端力,其中 E 为单元的弹性模量, l 为杆长, A 为横截面面积, I_z 为横截面对 z 轴的惯性矩(以后简称为 I)。

根据上述图形,不难写出杆端力与杆端位移的关系式如下:

$$\left. \begin{aligned} N_j &= \frac{EA}{l}u_1 - \frac{EA}{l}u_4 \\ Q_j &= \frac{12EI}{l^3}u_2 + \frac{6EI}{l^2}u_3 - \frac{12EI}{l^3}u_5 + \frac{6EI}{l^2}u_6 \\ M_j &= \frac{6EI}{l^2}u_2 + \frac{4EI}{l}u_3 - \frac{6EI}{l^2}u_5 + \frac{2EI}{l}u_6 \\ N_k &= -\frac{EA}{l}u_1 + \frac{EA}{l}u_4 \\ Q_k &= -\frac{12EI}{l^3}u_2 - \frac{6EI}{l^2}u_3 + \frac{12EI}{l^3}u_5 - \frac{6EI}{l^2}u_6 \\ M_k &= \frac{6EI}{l^2}u_2 + \frac{2EI}{l}u_3 - \frac{6EI}{l^2}u_5 + \frac{4EI}{l}u_6 \end{aligned} \right\} \quad (10-13)$$

上式可以写成矩阵形式:

$$\begin{bmatrix} N_j^{(i)} \\ Q_j^{(i)} \\ M_j^{(i)} \\ N_k^{(i)} \\ Q_k^{(i)} \\ M_k^{(i)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{EA}{l} & 0 & 0 & -\frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{l^3} & \frac{6EI}{l^2} & 0 & -\frac{12EI}{l^3} & \frac{6EI}{l^2} \\ 0 & \frac{6EI}{l^2} & \frac{4EI}{l} & 0 & -\frac{6EI}{l^2} & \frac{2EI}{l} \\ -\frac{EA}{l} & 0 & 0 & \frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI}{l^3} & -\frac{6EI}{l^2} & 0 & \frac{12EI}{l^3} & -\frac{6EI}{l^2} \\ 0 & \frac{6EI}{l^2} & \frac{2EI}{l} & 0 & -\frac{6EI}{l^2} & \frac{4EI}{l} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1^{(i)} \\ u_2^{(i)} \\ u_3^{(i)} \\ u_4^{(i)} \\ u_5^{(i)} \\ u_6^{(i)} \end{bmatrix} \quad (10-14)$$

或改写成

$$\begin{bmatrix} S_1^{(i)} \\ S_2^{(i)} \\ S_3^{(i)} \\ S_4^{(i)} \\ S_5^{(i)} \\ S_6^{(i)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{EA}{l} & 0 & 0 & -\frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{l^3} & \frac{6EI}{l^2} & 0 & -\frac{12EI}{l^3} & \frac{6EI}{l^2} \\ 0 & \frac{6EI}{l^2} & \frac{4EI}{l} & 0 & -\frac{6EI}{l^2} & \frac{2EI}{l} \\ -\frac{EA}{l} & 0 & 0 & \frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI}{l^3} & -\frac{6EI}{l^2} & 0 & \frac{12EI}{l^3} & -\frac{6EI}{l^2} \\ 0 & \frac{6EI}{l^2} & \frac{2EI}{l} & 0 & -\frac{6EI}{l^2} & \frac{4EI}{l} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1^{(i)} \\ u_2^{(i)} \\ u_3^{(i)} \\ u_4^{(i)} \\ u_5^{(i)} \\ u_6^{(i)} \end{bmatrix} \quad (10-15)$$

若令

$$K^{(i)} = \begin{bmatrix} \frac{EA}{l} & 0 & 0 & -\frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{l^3} & \frac{6EI}{l^2} & 0 & -\frac{12EI}{l^3} & \frac{6EI}{l^2} \\ 0 & \frac{6EI}{l^2} & \frac{4EI}{l} & 0 & -\frac{6EI}{l^2} & \frac{2EI}{l} \\ -\frac{EA}{l} & 0 & 0 & \frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI}{l^3} & -\frac{6EI}{l^2} & 0 & \frac{12EI}{l^3} & -\frac{6EI}{l^2} \\ 0 & \frac{6EI}{l^2} & \frac{2EI}{l} & 0 & -\frac{6EI}{l^2} & \frac{4EI}{l} \end{bmatrix} \quad (10-16)$$

则上式可缩写成

$$S^{(i)} = K^{(i)} u^{(i)} \quad (10-17)$$

式中 $K^{(i)}$ 称为单元 i 的刚度矩阵, 它的第一列元素就是当 $u_1=1$ (即 j 端沿 x 方向发生单位位移) 时, 单元的六个杆端力; 第二列元素则为 $u_2=1$ (即 j 端沿 y 方向发生单位位移) 时, 单元的六个杆端力; 第三列元素则为 $u_3=1$ (即 j 端发生单位转角) 时, 单元的六个杆端力。同理, 第四、第五和第六列元素则分别代表了 k 端发生单位位移 $u_4=1$ 、 $u_5=1$ 、 $u_6=1$ 时单元的六个杆端力。单元刚度矩阵中的元素用符号 $k_{ij}^{(i)}$ 表示, 它称为单元的刚度系数。根据反力互等定理可知:

$$k_{ij}^{(i)} = k_{ji}^{(i)} \quad (10-18)$$

因此 $K^{(i)}$ 是一个对称方阵。

二、简支式单元

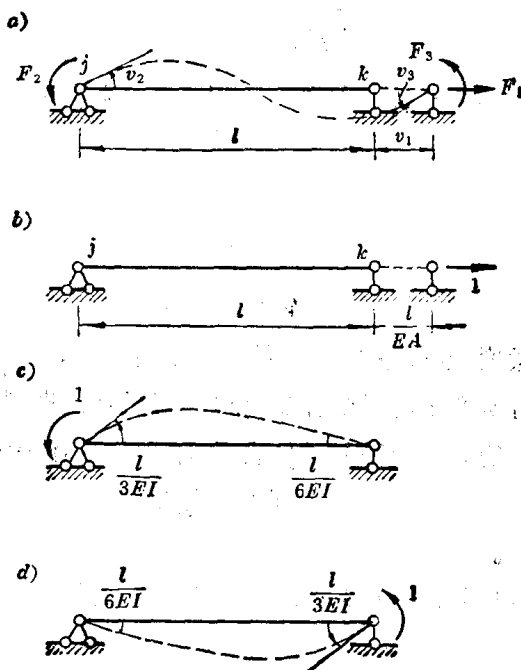


图 10-10

对于简支式单元,它与自由式单元不同之处在于具有支座约束而无刚体位移产生,因此,只要知道了它的杆端力就可确定相应的杆端位移(更确切地说,此处所确定的杆端位移仅是由杆端力产生的弹性位移,而未包括刚性位移在内)。下面我们利用叠加原理来建立简支式单元杆端位移和杆端力的关系。

图 10-10, a 示一简支单元,它的杆端力是 F_1 、 F_2 和 F_3 。在这些杆端力的作用下,单元将产生相应的杆端位移 v_1 、 v_2 和 v_3 。图 10-10, b、c 和 d 分别给出在 $F_1=1$ 、 $F_2=1$ 和 $F_3=1$ 单独作用下各杆的端位移,据此可得如下关系式:

$$\left. \begin{aligned} v_1 &= \frac{l}{EA} F_1 \\ v_2 &= \frac{l}{3EI} F_2 - \frac{l}{6EI} F_3 \\ v_3 &= -\frac{l}{6EI} F_2 + \frac{l}{3EI} F_3 \end{aligned} \right\} \quad (10-19)$$

或写成矩阵形式:

$$\begin{bmatrix} v_1^{(i)} \\ v_2^{(i)} \\ v_3^{(i)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{l}{EA} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{l}{3EI} & -\frac{l}{6EI} \\ 0 & -\frac{l}{6EI} & \frac{l}{3EI} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_1^{(i)} \\ F_2^{(i)} \\ F_3^{(i)} \end{bmatrix} \quad (10-20)$$

若令

$$f^{(i)} = \begin{bmatrix} \frac{l}{EA} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{l}{3EI} & -\frac{l}{6EI} \\ 0 & -\frac{l}{6EI} & \frac{l}{3EI} \end{bmatrix} \quad (10-21)$$

则上式可缩写成

$$V^{(i)} = f^{(i)} F^{(i)} \quad (10-22)$$

式中 $f^{(i)}$ 称为单元 i 的柔度矩阵,它的第一列元素分别代表 $F_1=1$ 时所产生的三个杆端位移,第二列元素则代表 $F_2=1$ 时所产生的三个杆端位移,第三列元素则代表 $F_3=1$ 时所产生的三个杆端位移。单元柔度矩阵中的元素用符号 $f_{ij}^{(i)}$ 表示,根据位移互等定理可知:

$$f_{ij}^{(i)} = f_{ji}^{(i)} \quad (10-23)$$

因此, $f^{(i)}$ 是一个对称方阵。

由式(10-22)也可求出用杆端位移表示的杆端力的方程,即

$$F^{(i)} = (f^{(i)})^{-1} V^{(i)}$$

令

$$K_r^{(i)} = (f^{(i)})^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{4EI}{l} & \frac{2EI}{l} \\ 0 & \frac{2EI}{l} & \frac{4EI}{l} \end{bmatrix} \quad (10-24)$$

则有

$$F^{(i)} = K_r^{(i)} V^{(i)} \quad (10-25)$$

式中 $K_r^{(i)}$ 称为简支式单元 i 的刚度矩阵。它也可通过消去自由式单元刚度矩阵 $K^{(i)}$ 表达式 (10-16) 中与支座约束相对应的行和列而得到。一般说来, 为了消去刚体位移, 应使消去行、列的数目与单元刚体自由度数相等, 例如在本书所述平面杆系结构中, 单元的刚体自由度数目为 3, 故缩减以后的单元刚度矩阵将是 $6-3=3$ 阶的, 此处, 用符号 $K_r^{(i)}$ 表示缩减后的单元刚度矩阵, 其下标 r 即代表被缩减的阶数。

三、悬臂式单元

图 10-11a 示一悬臂式单元, 它的杆端力是 F_1, F_2 和 F_3 , 相应的杆端位移为 v_1, v_2 和 v_3 。它的单元柔度矩阵 $f^{(i)}$ 可利用图 10-11, b, c, d 而得出如下:

$$f^{(i)} = \begin{bmatrix} \frac{l}{EA} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{l^3}{3EI} & \frac{l^2}{2EI} \\ 0 & \frac{l^2}{2EI} & \frac{l}{EI} \end{bmatrix} \quad (10-26)$$

至于它的单元刚度矩阵, 如上所述, 可将式 (10-16) 所示自由式单元刚度矩阵加以紧缩而得到, 即删去 $K^{(i)}$ 中与支座约束相应的第一、二、三行和第一、二、三列后, 就得到悬臂式单元的刚度矩阵:

$$K_r^{(i)} = \begin{bmatrix} \frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{l^3} & -\frac{6EI}{l^2} \\ 0 & -\frac{6EI}{l^2} & \frac{4EI}{l} \end{bmatrix} \quad (10-27)$$

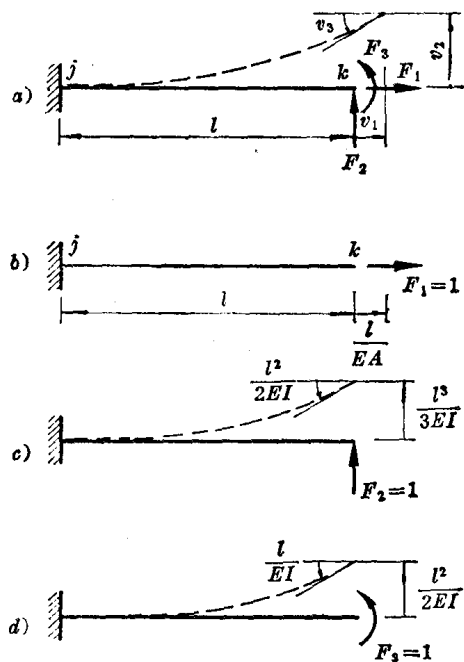


图 10-11

如果将式 (10-26) 所示悬臂式单元的柔度矩阵 $f^{(i)}$ 与式 (10-27) 所示悬臂式单元的刚度矩阵 $K_r^{(i)}$ 相乘, 则可看出, 它们之间具有互逆关系, 即

$$f^{(i)} K_r^{(i)} = I \quad (10-28)$$

或

$$\left. \begin{aligned} f^{(i)} &= (K_r^{(i)})^{-1} \\ K_r^{(i)} &= (f^{(i)})^{-1} \end{aligned} \right\} \quad (10-29)$$

式 (10-28) 或式 (10-29) 所表述的互逆关系, 同样适用于简支式单元。