高等学校教学用书

弹性力学基础及有限单元法

冶金工业出版社

高 等 学 校 教 学 用 书

弹性力学基础及有限单元法

西安冶金建筑学院 黄 义 主编

冶 金 工 业 出 版 社

高等学校教学用书
弹性力学基础及有限单元法
西安冶金建筑学院　黄　义　主编
*
冶金工业出版社出版
(北京灯市口74号)
新华书店北京发行所发行
冶金工业出版社印刷厂印刷
*
787×1092 1/16　印张 14　字数 329 千字
1983年6月第一版　　1983年6月第一次印刷
印数00,001～8,000册
统一书号：15062·3985　　定价1.45元

前　　言

《弹性力学基础及有限单元法》是机械类专业的基础课。它是学生在完成了理论力学和材料力学学习后，为进一步培养学生用弹性力学的基本理论配合电子计算机解决比较复杂的机械强度问题，为进行科学研究打下一定的力学基础而开设的一门课程。

本书是根据一九七七年冶金工业部高等院校教材工作会议制订的教学计划和《弹性力学基础及有限单元法》教学大纲编写的，供机械类专业试用。适用学时为40～80，各单位可根据专业的实际需要和学时，选择使用。

由于学时的限制，本书不可能包括弹性力学和有限单元法的全部内容，而只能介绍最基本的内容。在注意保持本学科的系统性的前提下，本书以弹性力学的平面问题为主，详细讲述弹性力学的基本概念、基本原理、基本方程和典型的经典解法。同时为了使弹性力学更好地为专业服务和使用现代化的计算技术，在弹性力学问题的求解方法上，本书以有限单元解法为主，用了近一半的篇幅详细介绍了平面问题、轴对称空间问题、板壳问题的有限单元解法。照顾到个别专业的要求，也介绍了杆系的有限单元法（实际为杆系的矩阵分析法），考虑到有些专业不讲授它，因此我们在引出有限单元分析的概念时，并没有从杆系的角度入手，而是就弹性力学本身来阐述的。同时，在编写中，按照大纲要求，结合以往教学经验，力求做到由浅入深，循序渐进，加强物理概念，并使用典型问题详细说明计算过程。为了便于自学以及考虑到一般工程专业学生的力学基础的实际，本书在方程和公式的推导方面力求详细，例题计算尽量具体，语言力求通俗易懂。本书从1979年脱稿后，已经过部分兄弟院校的多次使用，这次在修改过程中，他们又提出了许多宝贵的修改意见。在这里谨表示衷心的感谢。

参加本书编写的有：东北工学院褚宗良同志、昆明工学院沈如帮同志、西安冶金建筑学院陈君驹同志和黄义同志。第一、八、九章由黄义同志编写，第二、三章由陈君驹同志编写，第五、六、十章由褚宗良同志编写，第四、七章由沈如帮同志编写。全书由黄义同志修改定稿。

本书又在西安召开的审稿会议上进行了审定，参加审稿的有：北京钢铁学院、东北工学院、中南矿冶学院、武汉钢铁学院、马鞍山钢铁学院、鞍山钢铁学院、广东矿冶学院、江西冶金学院和广西大学等有关教师。

由于编写经验不足，加之我们的水平有限，书中难免有错误和不妥之处，希使用单位给予批评指正。

本书在编写和修改定稿中，西安冶金建筑学院材力教研室给予大力支持和帮助，特别是王明贵同志协助校对原稿和整理插图，作了不少工作，深表感谢。

编　者

一九八二年六月

目　　录

第一章　绪　　论

第一节　弹性力学的性质和任务

弹性力学是研究弹性体在外部因素（外力，温度等）作用下而产生的应力和应变，以及与应变有关的位移的一门学科。

我们知道，在材料力学里也研究这些问题。但是，从研究对象上说，材料力学基本上只是讨论杆状构件（一维问题）在拉、压、剪切和扭转作用下的应力和应变。对于非杆状构件，例如平板、壳体以及一般的空间实体结构的应力和应变问题就只能在弹性力学中加以充分研究。同时，即使是杆状构件，材料力学也只能讨论其中的一部份问题，而对杆状构件的某些其他问题，例如带孔杆件的应力问题、非圆截面杆件的扭转问题等等，以及对杆状构件作进一步的精确的分析，仍然是用弹性力学来解决。因此，弹性力学所讨论的对象，所研究问题的种类，远比材料力学广泛得多。

另外，在研究方法上弹性力学和材料力学也有所不同。材料力学在研究杆状构件的应力和应变时，为了简化数学推演，除了必须的基本假设外，常常再引用一些关于构件变形状态或应力分布的所谓"附加假设"。这样得出的解答往往只能是近似的。弹性力学则不是这样，它除了基本假设外，通常无须再作那些"附加假设"，而是严格地根据静力（或运动）、几何、物理三方面的条件，用精确的数学推演，最后求得问题的全部解答。据此，对杆的问题的精确解，则相应可以用来估计材料力学计算结果的准确程度，并确定其适用范围。

例如，在材料力学里研究梁的弯曲时，我们引用了平面截面的假设，从而得出梁横截面上正应力沿梁高按直线分布的结论（见图 1-1a）。在弹性力学里研究同一问题时，就没有引用这样的假设。而材料力学所引用的这个假设的正确性，除了用实验方法加以验证外，在理论上正是利用弹性力学的结果来加以校核的，并由此判明了：如果梁的高度并不远小于梁的跨度（通常应远小于梁跨的$\frac{1}{4}$），而是尺寸相近时，那么，横截面上正应力是按曲线分布的（图1-1b）。也就是说，这时平面截面假设不适用。

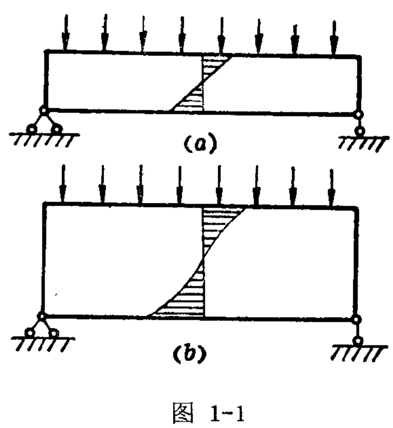

图 1-1

由上面可以看到，弹性力学和材料力学的性质和任务总的来说都是一致的。但是，它们之间也有区别，即弹性力学比材料力学研究的范围要广，而且能解决一些用材料力学方法所不能解决的问题。同时，由于弹性力学求解问题的精确和严格，其解答可以用来校核材料力学对同类问题解答的结果，并明确其公式的应用范围，这就是弹性力学的基本任务。

第二节　弹性力学的基本假设

在弹性力学这门学科中，是以下列基本假设为根据的。

1．假设物体是连续的——在物体内部，都被组成该物体的介质所填满，而没有任何空隙。因此，物体中的应力、应变、位移等量都是连续的，可以用坐标的连续函数表示。实际上，一切物体均由分子组成，它们之间是有一定距离的，然而分子大小以及分子间的距离与物体的尺寸相比是极其微小的，故可以不必考虑物体内的分子构造。从宏观来看，这一假设是容许的。根据这个假设所得结果，与实验结果是符合的。

2．假设物体是匀质和各向同性的——在物体所有各点和所有方向上有相同的物理性质，因而物体的弹性常数不随位置坐标和方向而变化。对一般金属材料来说，这个假设基本上是符合实际的。虽然金属材料的本身是由各向异性的晶体组成，但由于晶体很小且排列杂乱而不规则，按其材料的平均性质（统观性质），大致是匀质和各向同性的。显然，木材不具备这种性质。

3．假设物体是完全弹性的且服从虎克定律——物体在产生变形的外加因素（外力，温度变化等）被除去以后，能完全恢复原状而没有任何剩余变形。由材料力学知道：对大多数韧性材料在应力未超过屈服极限前和对脆性材料在应力未超过比例极限前，是很近似于完全弹性体的，且材料基本上是服从虎克定律的。

4．假设物体内无初应力——物体在未受荷载和温度变化等作用之前，其内部并无应力。即物体处于自然状态。

5．假设物体的位移和变形是很小的——在外加因素作用下，物体的变形及位移，与物体原有尺寸相比是很微小的。这样，在研究物体受力变形后的平衡状态时，可以不考虑物体尺寸的变化，而仍用变形前的尺寸；并且，在研究物体变形时，对于变形的二次幂和乘积都可略去不计。这样就使得弹性力学中的基本微分方程成为线性的。

根据上述基本假设而建立的弹性力学，称为线性弹性力学。本书只涉及线性弹性力学的基本内容。

上述的基本假设与材料力学的基本假设并无区别。在材料力学中，除上述基本假设外，对不同问题还引用一些与变形有关的“附加假设”，使计算简化。当然，其结果的精确性和适用性都是有限制的。在弹性力学里，如仅根据上述的基本假设，用精确的数学方法对物体的应力和应变进行研究，我们就把它称为数学弹性力学。相反，除上述基本假设外，也引用某些“附加假设”，如对薄板、薄壳那样，再应用弹性力学的方程和较复杂的数学推演而得出具有一定近似性的结果，这样的弹性力学可称为应用弹性力学。

一切假设都是有条件的，随着条件的改变，有的假设就必须放弃或另作新的假设，同时也会出现新的理论和学科。例如，当物体处于塑性状态时，此时应力与应变不再是线性关系，成为物理上的非线性。对处于这种状态的物体的应力、应变和位移的研究的学科，称为塑性力学。又例如，当物体的变形和位移并不很小，这样就不能略去变形二次幂和乘积，于是就形成几何上的非线性。对这种问题的研究，就构成非线性弹性力学的内容。

第三节　外力、应力、应变及位移的概念和通用记号

关于外力、应力、应变和位移的概念，虽然在材料力学中都已遇到过，但这里仍有详细说明的必要。

作用于物体的外力可以分为体力和面力。

体力，是分布在物体体积内的力，例如重力、惯性力和磁吸力等。物体内任一点的体

力，用作用于其上的单位体积的体力沿坐标轴上的投影X、Y、Z来表明，且沿坐标轴的正向为正，反之为负。这三个投影称为该点的体力分量。

面力，即作用于物体表面上的力，可以是分布力，也可以是集中力。物体表面上任一点的面力，用作用于其上的单位表面积上的面力沿坐标轴上的投影$\overline{X}$、$\overline{Y}$、$\overline{Z}$来表示。沿坐标轴正向为正，反之为负。把这三个投影称为该点的面力分量。

为了描述物体内任一点P的应力，就在这点设想从物体中取出一个无限小的平行六面体，它的棱边平行于坐标轴，而长度分别为dx、dy、dz，如图 1-2 所示。将每一微面上的应力分解为一个正应力和两个剪应力，它们分别与三个坐标轴平行。用σ表示正应力，τ表示剪应力。为了表明正应力作用平面和方向，通常加一脚标。例如σ_x表示正应力作用的平面与x轴相垂直（即σ_x与x轴平行）。剪应力τ通常加二个脚标。前一个脚标表明作用面垂直于哪个坐标轴，后一脚标表明作用方向沿着哪一个坐标轴。例如，τ_{xy}是作用在垂直于x轴的面上且其作用方向与y轴平行；余类推。

如果某一个面的外法线是与坐标轴正方向相平行，则该面为正面。图 1-2 中的右、前、上各面均为正面。凡是正面上的应力，不论其为正应力或剪应力，以与坐标轴的正方向相同时为正，反之为负。如果某个面的外法线是与坐标轴的负方向相平行，该面为负面。图 1-2 中的左、后、下各面均为负面。负面上的应力，不论其为正应力或剪应力，以与坐标轴的负方向相同时为正，反之为负。图1-2上所示的应力全都是正的。

六个剪应力并不是互不相关的。由材料力学的剪应力互等定律，可以看出它们是两两相等的，即

$$\tau_{xy}=\tau_{yx}, \qquad \tau_{yz}=\tau_{zy}, \qquad \tau_{xz}=\tau_{zx}$$

在弹性力学里，通常把σ_x、σ_y、σ_z、τ_{xy}、τ_{yz}、τ_{zx}这六个量称为该点的应力分量。

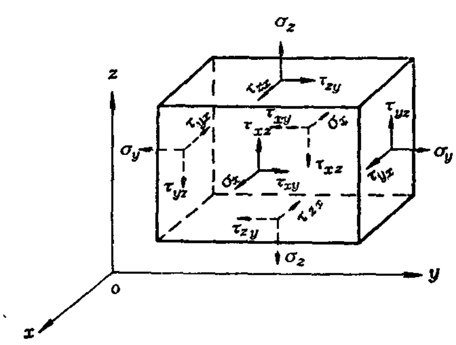

图 1-2

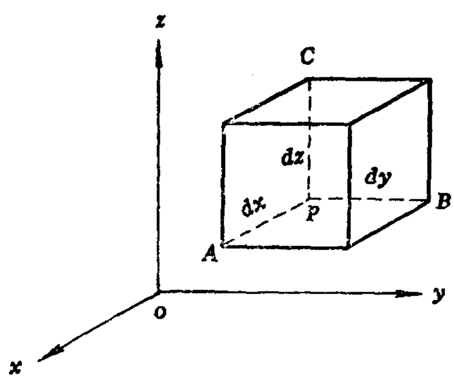

图 1-3

为了描述物体内某点P的变形，就在这一点取一平行六面微分体，其三个沿着坐标正向轴的微小棱边PA、PB、PC的长度分别为dx、dy、dz（图 1-3）。物体变形以后，这三个棱边（线段）的长度及它们之间的直角的改变，就作为这一点的变形。线段每单位长度的伸缩称为正应变（相对变形或线应变）。线段之间的直角的改变称剪应变。正应变用字母ε表示。x方向的线段PA的正应变用ε_x表示；余类推。正应变以伸长为正，缩短为负。剪应变用字母γ表示。γ_{xy}表示x与y两方向的线段PA与PB之间直角的改变；余类推。剪应变以直角变小时为正，反之为负。

如果ε_x、ε_y、ε_z、γ_{xy}、γ_{yz}、γ_{zx}这六个量在P点是已知的，那末，该点的变形可以完全确定，因此，这六个分量称为一点的应变分量。

关于应力和应变分量的记号和符号的规定，在不同教科书及文献中往往不尽相同。本书所采用的是工程文献中最通用的一种。

物体内任一点的位移，用它在x、y、z三轴上的投影u、v、w来表示，沿坐标轴的正方向为正，反之为负。这三个投影称为该点的位移分量。

一般而论，弹性体内任意点的体力分量、面力分量、应力分量、应变分量和位移分量都随点的位置而变，因而通常都是点的坐标的连续函数。

第四节　弹性力学的基本方法

任何一门学科都有自己的独特方法，弹性力学当然也不例外。弹性力学在研究弹性体在外部因素作用下产生的应力、应变和位移时，由于应力、应变和位移都是点的坐标的函数，也就是说各个点的应力、应变和位移一般是不相同的，因此，在弹性力学里假想把物体分成无限多个微小六面体（在物体边界处可能是微小四面体），称为微元体。考虑任一微元体的平衡（或运动），可写出一组平衡（或运动）微分方程及边界条件。但未知应力数目总是超出微分方程的个数，所以，弹性力学问题都是超静定的，必须同时再考虑微元体的变形条件以及应力和应变的关系，它们在弹性力学中相应地称为几何方程和物理方程。平衡（或运动）方程、几何方程和物理方程以及边界条件，称为弹性力学的基本方程。综合考虑这三方面的方程，我们就有足够数目的微分方程来求解未知的应力、应变和位移，而微分方程求解中出现的常数，再根据边界条件来确定。

从取微元体入手，综合考虑静力（或运动）、几何、物理三方面条件，得出其基本微分方程，再进行求解，最后利用边界（表面）条件确定解中的常数，这就是求解弹性力学问题的基本方法。

在解决弹性力学问题的过程中，以上三方面的方程还可加以综合简化。因为在所得的基本方程中，并非每个方程都包括所有的未知函数。因此，可以将其中的一部份未知函数选作为“基本未知函数”，先将它们求出，然后再由此求出其他的未知函数，而得到问题的全部解答。于是就形成以应力为“基本未知函数”的所谓应力解法和以位移作为“基本未知函数”的所谓位移解法。根据这两种常用的解题途径，弹性力学中导出了相应的微分方程组和边界条件。在一定的边界条件下，按选取的解题方法（应力法或位移法），求出其相应微分方程组的解，也就等于满足了弹性力学的全部的基本方程。

值得提出，在弹性力学中，无论按应力法还是按位移法，得到的相应的微分方程，一般都是高阶的偏微分方程组。在边界条件下精确地求出它们的解，在数学上是相当困难的，并非所有问题都已有了解答，只是对某些简单的问题有较大的进展。而大量的工程实际问题，特别是结构的几何形状、荷载情况以及材料性质比较复杂的问题，要严格按照弹性力学的基本方程精确求出它们的解，并不是都能办得到的，有时甚至是不可能的。因此，在工程实际中往往不得不采用弹性力学的近似解法和数值解法，以求出问题的近似解答。

由于电子计算机的出现和应用，在弹性力学的近似的和数值的方法中，有限单元方法已成为目前极为有效的弹性力学的数值解法。它为弹性力学进一步应用于工程实践赋予了新的生命力。这个方法的基本概念是将原来的连续体或结构，划分为许多子块，称有限单

元，认为这些单元在称为“结点”的结合点处连接起来，这样，就把原来的连续体或结构，解析地用有限单元的集合体来代替，称为连续体的离散化。选择简单的函数组来近似地表示每个单元上真实位移的分布和变化，这种假设的函数称为位移模式（或位移函数）。位移模式的未知量通常是结点处的位移（或位移导数）。因此，最后的解答将给出各结点处的近似位移（或位移导数）。

为了求得各结点的位移，通常采用虚功原理（或变分原理，如最小位能原理）求得每个单元的平衡方程组（从而获得单元刚度矩阵）。将各单元的方程按照保持结点位移连续性的方式组合起来（建立结点的平衡条件），就得到整个物体的平衡方程组（从而获得结构总刚度矩阵）。按照给定的位移边界条件（表面条件）修改这些方程并求解，便得到各结点处的位移。然后，再根据已求得的位移，计算各单元的应力。这种解法称为有限单元位移法。

当然，也可以选取各结点应力为基本未知量，类似地可称为有限单元应力法。不过，在弹性力学的有限单元法中，位移法应用较多。因此，本书在有限单元法部分只介绍位移法。

一般说来，分划的单元愈多，愈细密，精确度就愈高，也就愈能反映结构的实际情况。因此，方法的特殊优点就是能适应于工程结构的几何形状、载荷以及材料性质的各种复杂情况。另外，和其他数值方法一样，有限单元法最后要求形成和求解代数方程组，这个过程能系统化地编制程序，因此，特别适宜于电子计算机的应用。一旦建立了计算程序，整个计算过程将会高速地自动完成，所给出的数值结果，虽然是近似的，还是能够满足工程上的需要。

分析领域中的这种大的进展，使原来认为极为复杂的弹性力学课题，得到解决。这就表明有限单元法和电子计算机的结合，已在弹性力学和分析中产生了深刻的影响。

随着高速电子计算机的应用日益普及，数值分析在工程分析中的作用日益增长，有限单元法有了进一步的发展和广泛的应用。现在，它不仅是弹性力学的现代的数值方法，而且，它已渗透到其他学科领域，如热传导问题、流体问题以及电磁波现象等。实际上，它已成为数学物理问题中的很有成效的现代数值分析方法。

第二章　基本方程及用直角坐标解平面问题

本章首先推导在直角坐标下弹性力学的基本方程，然后详细介绍按应力求解弹性力学平面问题。

第一节　平衡微分方程

我们首先研究变形体的平衡问题。物体承受载荷后，其内部的应力分布一般是不均匀的。为了分析物体内的应力，正如在绪论中所说的那样，应从中取出一个平行六面微分体

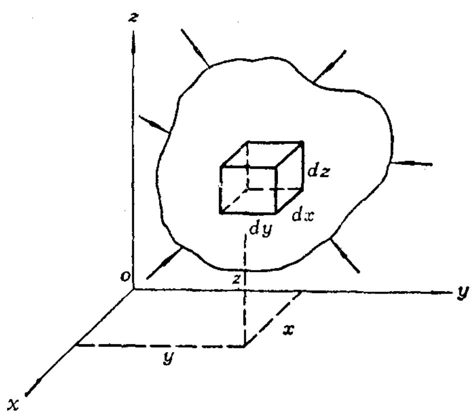

图 2-1

加以研究（图2-1）。平行六面微分体的各面通常应分别与各坐标面平行，并设其棱长分别为 dx、dy、dz，则其体积为 $dV=dxdydz$。这个平行六面微分体受到它周围部分物体的作用，将每个面上受到的作用分别用三个应力分量（一个正应力，两个剪应力）表示，这些应力可以视为六面微分体受到的外力。

此外，物体中还存在有体积力。由前所述，单位体积上所受的体积力沿坐标轴的分量为 X、Y、Z，则作用在六面微分体上的体积力就为 XdV、YdV、ZdV。它们作用在六面微分体的中心。

由于在物体内各点的应力为坐标值的连续函数，当在六面微分体（图 2-2）的微分面 $abcd$ 上作用的正应力为 σ_x 时，则微分面 $a'b'c'd'$ 上的正应力就应为 $\sigma_x+\frac{\partial\sigma_x}{\partial x}dx$。因为由面 $abcd$ 过渡到面 $a'b'c'd'$，只有坐标 x 增加了 dx。其余各面上的应力分量也均可依此类推。六面微分体各微分面上的应力分量如图 2-2 所示。由于各微分面是无限小的，作用在其上的应力可以看作是均匀分布。

若所研究的整个物体处于平衡状态，从其上取出的任何微分体也应当处于平衡状态，所以该微分体应满足六个平衡条件：

$$\Sigma X=0,\qquad \Sigma Y=0,\qquad \Sigma Z=0,$$
$$\Sigma M_x=0,\qquad \Sigma M_y=0,\qquad \Sigma M_z=0。$$

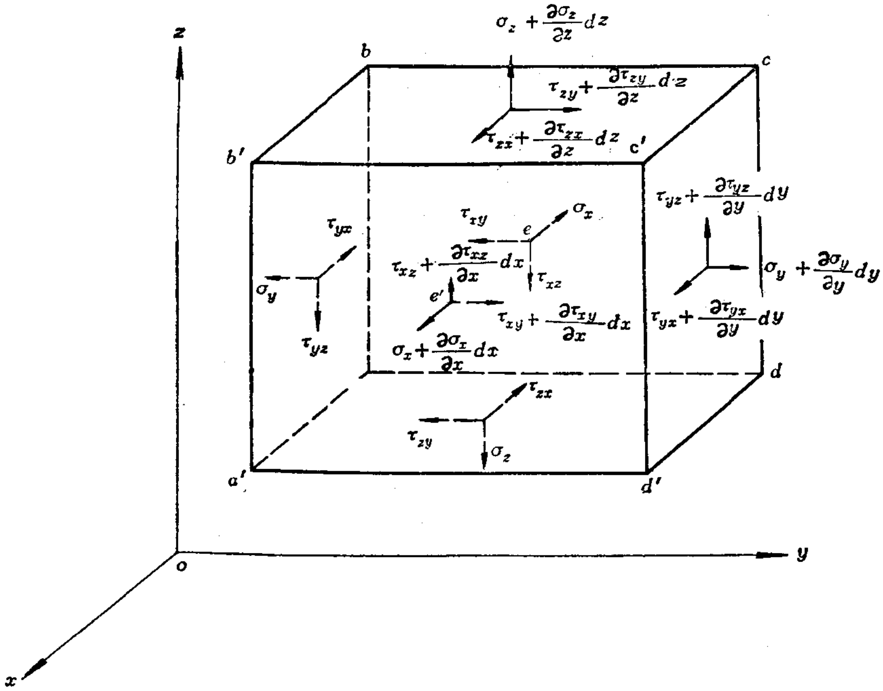

图 2-2

我们先利用第一个平衡条件， 考虑平行于 x 轴的所有各力， 并把它们画在单独的图上，如图2-3所示。由 $\Sigma X=0$，有

$$\left(\sigma_x+\frac{\partial\sigma_x}{\partial x}dx\right)dydz-\sigma_x dydz+\left(\tau_{yx}+\frac{\partial\tau_{yx}}{\partial y}dy\right)dxdz-\tau_{yx}dxdz$$
$$+\left(\tau_{zx}+\frac{\partial\tau_{zx}}{\partial z}dz\right)dxdy-\tau_{zx}dxdy+Xdxdydz=0$$

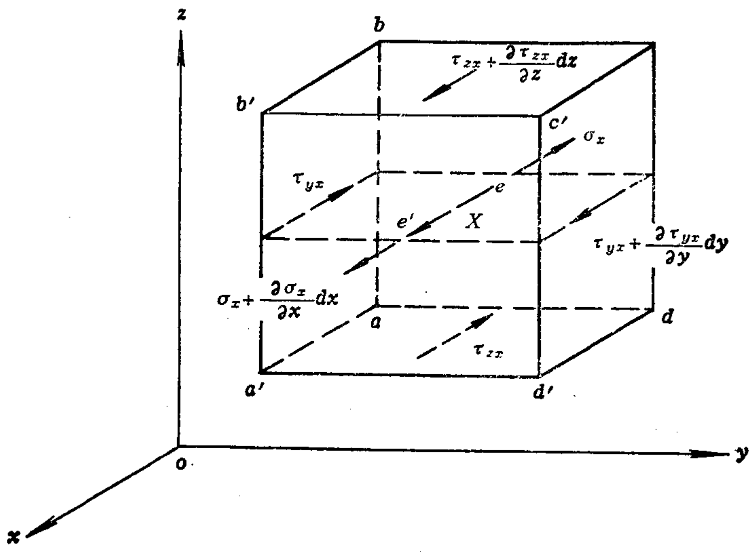

图 2-3

上式经约简后，得下列方程的第一式。同理，利用平衡条件 $\Sigma Y=0$和$\Sigma Z=0$,得下列方程

的第二式和第三式。

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial \sigma_x}{\partial x}+\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y}+\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z}+X=0\\
&\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x}+\frac{\partial \sigma_y}{\partial y}+\frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z}+Y=0\\
&\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x}+\frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y}+\frac{\partial \sigma_z}{\partial z}+Z=0
\end{aligned}
\tag{2-1}
$$

上面三个方程称为**平衡微分方程**。

现在考虑后面的三个平衡条件。先利用平衡条件$\Sigma M_x=0$,以连接六面微分体(图2-2)前后两个微分面中心的直线ee'作为矩轴，这矩轴与x轴相平行，于是$\Sigma M_{ee'}=0$等同于$\Sigma M_x=0$，则有

$$
\left(\tau_{yz}+\frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y}dy\right)dxdz\frac{dy}{2}+\tau_{yz}dxdz\frac{dy}{2}-\left(\tau_{zy}+\frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z}dz\right)dxdy\frac{dz}{2}
$$
$$
-\tau_{zy}dxdy\frac{dz}{2}=0
$$

全式除以$dxdydz$，合并相同的项，得

$$
\tau_{yz}+\frac{1}{2}\frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y}dy-\tau_{zy}-\frac{1}{2}\frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z}dz=0
$$

略去微量项后，得下列方程的第一式。同理，利用其余两个平衡条件，可得下列方程的第二式及第三式。

$$
\tau_{yz}=\tau_{zy},\qquad \tau_{zx}=\tau_{xz},\qquad \tau_{xy}=\tau_{yx}\tag{2-2}
$$

这是**剪应力互等定律**。

利用了剪应力互等定律后，在平衡微分方程（2-1）中仍有六个未知的应力分量，它们都是所研究点的坐标x、y、z的函数。未知应力分量的数目（六个）超过平衡方程的数目（三个）。因此，弹性力学问题是超静定的。所以必须进一步考虑变形几何条件及变形体的物理关系。

第二节　应力边界条件和圣维南原理

一、应力边界条件

若物体处于平衡状态，其内部各点的应力分量必须满足平衡微分方程（2-1)。而在物体边界上的点，既受体内相邻部分的作用，又受外部载荷的作用。因此，只有应力分量与外载荷满足一定的条件，才可能使边界上的点处于平衡状态。这样的条件一般就称为物体的应力边界条件。

为了建立边界条件，通过距物体表面极近的点M,截取一个四面微分体$Mabc$(图2-4)。斜微分面abc为其边界面的一部分，其外法线N与各坐标轴夹角的余弦为$\cos(N,\ x)=l$，$\cos(N,\ y)=m$，$\cos(N,\ z)=n$。微分体的其它三个微分面过M点且分别与三个坐标面相平行。从M点到斜微分面abc的垂直距离dh（图中未示出)，是四面微分体的高。设斜微分面的面积为dA，则其它三个微分面的面积为

$$
Mac=dA\cdot l,\qquad Mab=dA\cdot m,\qquad Mcb=dA\cdot n。
$$

四面微分体的体积为 $dV=\frac{1}{3}dh\cdot dA$

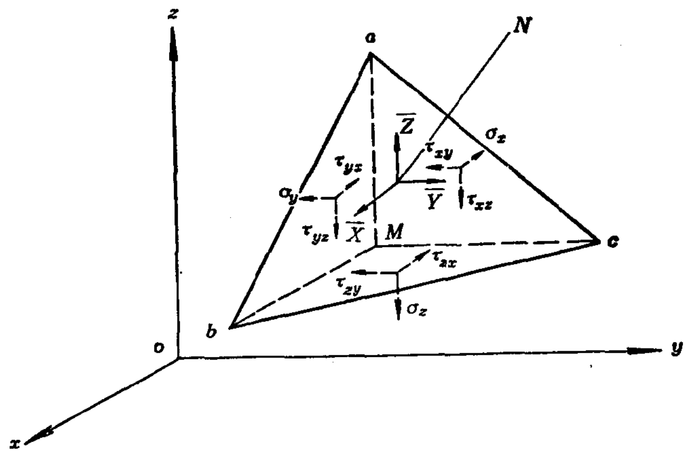

图 2-4

由于这些微分面很小，其面上作用的应力也看作是均匀分布。~~假定斜微分面 abc 上作~~用的面力在三个坐标轴上的投影分别为$\overline{X}$、$\overline{Y}$、$\overline{Z}$，体积力分量为X、Y、Z。整个物体处于平衡状态，这个四面体也应满足平衡条件。现考虑条件$\Sigma X=0$，即

$$\overline{X}dA-\sigma_x dA\cdot l-\tau_{yx}dA\cdot m-\tau_{zx}dA\cdot n+XdV=0$$

将上式除以dA，并注意到体积力项$\frac{(dV)}{(dA)}=\frac{1}{3}dh$，当令$dh\to 0$取极限时，体积力一项趋于零。由此得下列方程的第一式。同理，由$\Sigma Y=0$及$\Sigma Z=0$得下列方程的第二式及第三式。

$$\begin{aligned}\sigma_x l+\tau_{yx}m+\tau_{zx}n&=\overline{X}\\ \tau_{xy}l+\sigma_y m+\tau_{zy}n&=\overline{Y}\\ \tau_{xz}l+\tau_{yz}m+\sigma_z n&=\overline{Z}\end{aligned}\qquad(2\text{-}3)$$

如果考虑对三个坐标轴取矩的平衡条件，将再次得到剪应力互等定律。方程（2-3）即为表示物体表面力与内部应力之间关系的应力边界条件。

平衡微分方程（2-1）表示物体内部的平衡条件，而应力边界条件（2-3）表示物体表面的平衡条件。所以，如果整个物体处于平衡状态，则平衡微分方程（2-1）与应力边界条件（2-3）必须同时得到满足。

二、圣维南原理❶

我们在求解弹性力学问题时，对于一定的应力边界条件，得出的解答表示相应的应力分布状态。如果边界条件改变，则将得出不同的应力分布状态。当外部载荷比较复杂时，要使应力分量完全满足应力边界条件（2-3），是比较困难的。为使问题简化，有时只得将边界面上的力系进行适当的变化。这对问题的解答会有所影响。圣维南原理回答了这个影响的范围。

图 2-5 表示用钳夹住一个杆件，即相当于在这个杆件上作用一个平衡力系。由生产实

❶ 法国科学家圣维南于1855年首先提出这个原理。

践和理论上都可以说明，尽管作用力P很大，平衡力系在杆内所引起的应力都局限于部分A的很小区域（用虚线表示），随着离开区域A，应力很快减小，即小区域A以外，几乎没有应力产生。

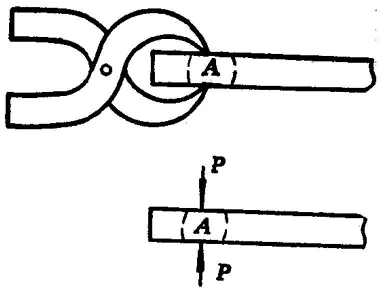

图 2-5

有了上面的认识，我们来研究一个悬臂梁。该梁在其自由端受集中力的作用。设有两种情况：（a）力P加在梁的下面（图2-6a）；（b）同一个力P加在梁的上面(图2-6b)。

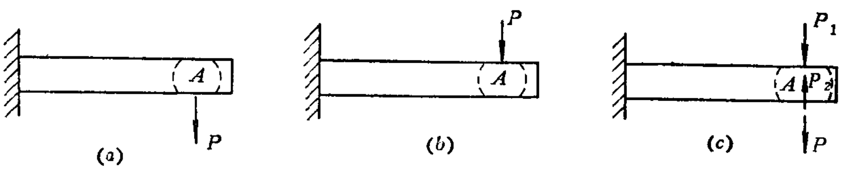

图 2-6

对于这两种情况，小区域A内的应力是很不相同的，而在该区域以外情况又如何？

我们假设有第三种情况（图2-6c）。相当于对情况（a）加上两个大小相等而方向相反的力P_1和P_2，而使三个力的数值相等：$P_1=P_2=P$。即情况（c）比（a）多出一个平衡力系P_1和P_2，情况（c）比（b）多出一个平衡力系P和P_2。按照前面对问题的讨论结果，这两个平衡力系在小区域A以外几乎不产生任何应力。因此，情况（c）与情况（a）和（b）在区域A以外应力几乎是相同的，即三种情况在区域A以外各处的应力几乎是相同的，从而情况（a）与（b）在区域A以外各点的应力当然也几乎相同。

结合物体受力的一般情况，圣维南原理（局部影响原理）可以叙述为：**如果物体一小部分边界上的力系，用一个静力等效（合力相等，合力矩相等）的力系代替，那么在新的力系作用下，仅在加载区域邻近应力有改变，而在距离该区域较远处，应力分布几乎不改变。**

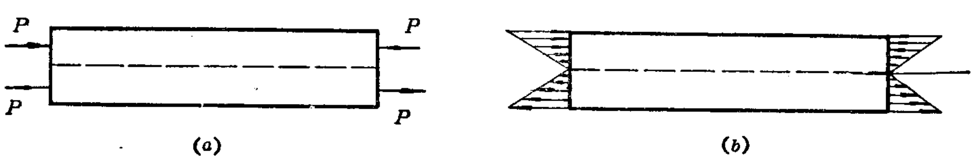

图 2-7

例如，要求解图 2-7a所示矩形等截面梁的纯弯曲问题，则可将梁端所受大小相等方

向相反的两个集中力P，用与它静力等效的如图2-7 b所示的梁端线性分布力来代替，使其便于满足应力边界条件（2-3）。这样处理后所得的解答，除梁端部区域外，完全适用于原来的梁。

第三节　几何方程和变形连续方程

一、几何方程——位移与应变的关系

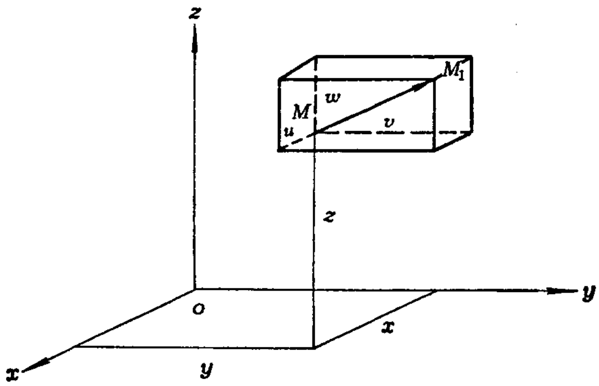

图 2-8

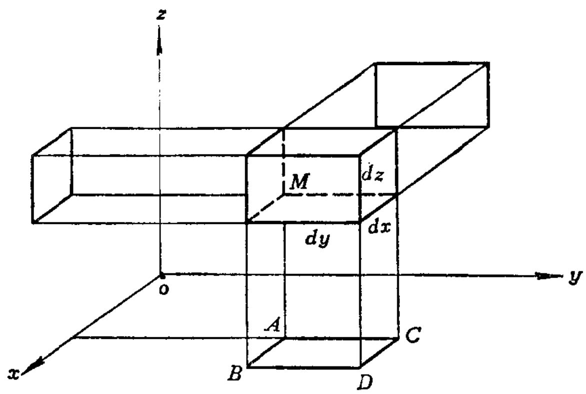

图 2-9

在载荷、温度变化或其它因素作用之下，变形体内各点之间的距离将发生变化，这就形成了物体的变形。在变形时物体中各点的位移一般是互不相同的，因此每点的位移是其位置坐标的函数。取物体中任意一点$M(x,y,z)$，如图2-8所示，变形后该点移到了M_1，矢量$\overline{MM_1}$就是物体变形时点M的位移，它在三个坐标轴上的投影分别用u、v、w表示，称为**位移分量**。它们都是坐标的连续函数。

为研究物体内某点$M(x,y,z)$的变形，建立位移分量与应变间的关系，同研究物体平衡时一样，从M点处取出一个棱边长分别为dx、dy、dz的正六面微分体，如图2-9所示。它在各坐标面上的投影，显然都是矩形。物体变形时，微分体的棱边长度和各棱边间的夹角一般都要发生变化，因此它在各坐标面上的投影也将发生相应的变化。对各坐标面上投影的变形进行研究，就能推测微分体本身的变形，当然也就等于研究了M点的变形。

微分体在xoy面上的投影是矩形$ABCD$（图2-9）。变形前线段AB和AC的长度分别为dx和dy。变形后A、B、C三点分别移到了A_1、B_1、C_1的位置，如图2-10所示。